

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»



На правах рукописи

Буденный Семен Андреевич

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСТАДИЙНОГО
ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ**

Специальность:

25.00.10 – геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.т.н., профессор

Хасанов Марс Магнавинович

Москва – 2019

² Содержание

1	ВВЕДЕНИЕ	4
2	Динамика роста одиночной трещины ГРП	20
2.1	Постановка задачи	23
2.2	Упрощающие предположения	24
2.3	Определяющие уравнения	25
2.3.1	Модель переноса смеси жидкости и пропанта в канале трещины	26
2.3.2	Деформация и разрушение породы	29
2.3.3	Модель течения суспензий	35
2.3.4	Модель утечек жидкости в пласт	38
2.4	Численный алгоритм	40
3	Динамика роста многостадийного ГРП	48
3.1	Постановка задачи	49
3.2	Упрощающие предположения	51
3.3	Определяющие уравнения	52
3.3.1	Течение в скважине	52
3.3.2	Взаимное влияние трещин	55
3.4	Численный алгоритм	60
4	Результаты	62
4.1	Рост трещины в трехслойной симметричной литологии	62
4.2	Вязкостная диссипация в вертикальном росте трещины	66

4.3	Анализ влияния концевого экранирования на динамику роста трещины	68
4.4	Рост и смыкание трещины в сложном геологическом разрезе	70
4.5	Влияние эффекта интерференции на профиль закрепленной трещины	75
5	Заключение	77
6	Приложение	80

1 ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Технология гидроразрыва пласта (ГРП) заключается в создании высокопротягивающей трещины путем нагнетания в целевой пласт жидкости с избыточным давлением, достаточным для инициации и роста трещин в породе. На первом этапе под высоким давлением производится закачка жидкости для инициации трещин, после чего закачивается проппант (гранулообразный материал) с жидкостью более высокой вязкости с целью равномерного распределения частиц проппанта в канале трещины, а также предотвращения быстрого осаждения частиц проппанта в процессе дальнейшего смыкания трещин после остановки закачки рабочей жидкости. Проппант играет роль расклинивающего агента: проппантная упаковка препятствует смыканию трещины в продуктивном интервале под действием горного давления.

Проницаемость закрепленной на проппант трещины на порядки превышает проницаемость породы в целевом слое геологического разреза, соответственно, при успешно проведенной работе технология обеспечивает увеличенный приток пластовой продукции к забою скважины. Совместное использование технологий горизонтального бурения и многостадийного гидроразрыва пласта (МГРП) является успешным решением с точки зрения чистого дисконтированного дохода в разработке как традиционных запасов, так и карбонатизированных коллекторов со сверхнизкой проницаемостью. Помимо интенсификации выработки запасов, находящихся в зоне дренирования скважины, технология ГРП позволяет также

существенно расширить эту зону, приобщив к выработке слабо дренируемые зоны и пропластки, как следствие, достичь более высокой конечной нефтеотдачи. При наличии естественной трещиноватости актуальной также является технология формирования стимулированного объема трещин, гидравлически связанной сети естественных трещин и трещин ГРП.

С практической точки зрения немаловажным также является понимание роста трещин в породе в контексте задачи идентификации трещин авто-ГРП в нагнетательных скважинах при закачке жидкости с давлением, превышающим давление гидроразрыва. В условиях низкой проницаемости коллектора (когда давление в канале трещины стравливается за счет фильтрации закачки жидкости в пласт) возникают риски достижения трещин авто-ГРП скважин добывающего фонда. Наличие таких исходов подтверждается трассерными исследованиями. Таким образом, актуальным является вопрос об определении условий формирования трещин авто-ГРП, образование которых может привести к обводнению добывающего фонда и, как следствие, нерентабельности добычи. Ключевым параметром является критическое давление, превышение которого ведет к образованию трещин авто-ГРП. Гидродинамические исследования позволяют получить оценки значения данного давления, однако, испытания скважин зачастую охватывает ограниченный фонд скважин из-за экономических ограничений и технологических осложнений [8], [9].

Получение информации о динамике роста трещины ГРП ограничено небольшим набором методов, наиболее распространенным из которых является микросейсмический мониторинг. Акустический сигнал, индуцированный новой образованной трещиной в породе, является локальным сейсмическим событием, которое в свою очередь является следствием изменения напряженно-деформированного состояния в окрестности скважины [34]. Определение геометрии трещины по облаку сейсмических событий часто затрудняется из-за присутствия локальных пара-

зитных сигналов, обусловленных, в частности, отражением акустических волн от геологических разломов.

Ввиду отсутствия прямых методов определения геометрии трещины ГРП в процессе ее роста в пласте при планировании дизайна ГРП необходимо опираться на результаты численного моделирования процессов. Несмотря на долгий период эксплуатации технологии ГРП в нефтегазовой промышленности (начиная с 50-х годов), на сегодняшний день не существует единой универсальной физико-математической модели, способной связать и описать все ключевые процессы, протекающие при гидроразрыве: инициация и рост трещин, массоперенос смеси рабочей жидкости и твердой фазы (частиц проппанта) в канале трещины.

Научный и практический интерес к задаче математического моделирования ГРП подтверждается динамикой публикационной активности в научных и научно-технических работах (Рисунок 1).

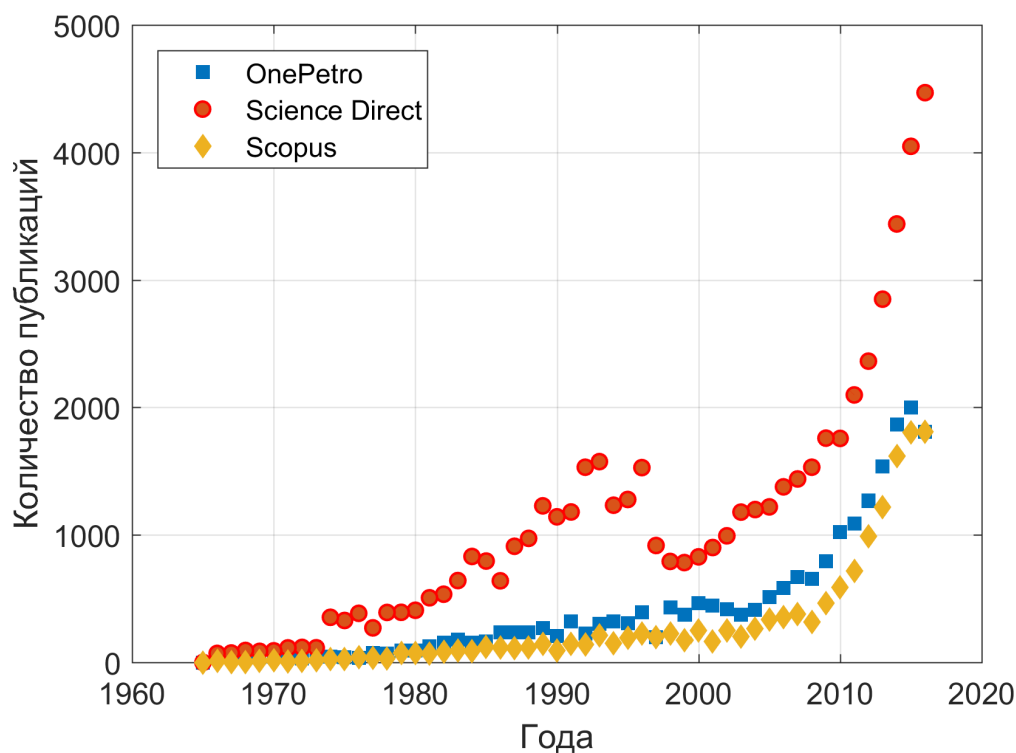


Рисунок 1: Публикационная активность по теме ГРП в ведущих научных и научно-технических изданиях (OnePetro, Science Direct, Scopus) за период с 1965 по 2017 гг.

Из представленного графика можно заметить, что особенно интерес к теме ГРП усилился за последние два десятилетия, что также соответствует активности в области численного моделирования процессов, протекающих при ГРП. Данное поведение главным образом объясняется активным вовлечением в разработку нетрадиционных запасов с середины 2000-х и, как следствие, необходимостью в рентабельных технологиях интенсификации разработки месторождений, в число которых входит технология ГРП [31].

Сложность решения связанной задачи всех процессов обусловлена их сильной нелинейной связью. На сегодняшний день существует множество работ, посвященных решению отдельных задач по теме ГРП, значительно меньшее количество работ можно встретить, где описывается связанное решение всех процессов.

Одновременно с этим интерес в прикладных задачах (планирование режимов закачки для проведения операций ГРП) интерес представляют именно программные комплексы, позволяющие проводить численное моделирование всех протекающих процессов: перенос смеси жидкости и проппанта в канале трещины, разрушение породы, смыкание трещины на проппант и т.д. В связи с этим возникает необходимость в комплексном решении задачи определения динамики роста трещин ГРП, с одной стороны, учитывающем все ключевые физические процессы с минимальным количеством упрощающих предположений, с другой — достаточным для планирования режим работ ГРП (режима закачки) и проведения ретроспективного анализа ранее проведенных работ.

Степень разработанности темы исследования

Первые попытки физико-математической формализации и решения задачи о росте трещины ГРП в породе сделаны Ю. П. Желтовым и С. А. Христиановичем [6]. К сегодняшнему дню математическое моделирование ГРП стало отдельным независимым направлением, в котором можно выделить два основных подхода: дискретный и континуальный.

В дискретном подходе порода представлена в виде ансамбля взаимодействующих частиц конечных размеров. В отличие от континуального подхода дискретный подход требует существенно меньше априорных предположений о свойствах среды. Моделирование процессов пластичности, разрушения, фазовых переходов осуществляется путем численного интегрирования системы уравнений движения, выписанной для всего ансамбля частиц. При решении задачи рассматривается совокупность частиц, находящихся под действием некоторого внешнего силового

поля, а также попарными силами взаимодействия (описывается, например, потенциалами взаимодействия Леннарда-Джонса, Ми, Морзе и др.).

Существенно чаще (встречается практически во всех промышленных программных комплексах для планирования дизайна ГРП) применяется континуальный подход, в котором можно выделить четыре класса моделей для описания роста трещины ГРП: двумерные (2D), псевдотрехмерные (P3D), планарные трехмерные (PL3D) и полностью трехмерные (3D).

2D модели накладывают ограничение на рост трещины в высоту (за исключением радиальной модели). Данное допущение обосновано, когда наблюдается высокий контраст напряжений в пласте или механических свойств между целевым продуктивным слоем и внешними слоями в геологическом разрезе. При этом контраст напряжений является доминирующим фактором. К 2D моделям относят: KGD [6], PKN [40], радиальную модель.

Модель KGD требует условия плоской деформации в горизонтальной плоскости, PKN — в вертикальной.

KGD модель предложена Христиановичем и Желтовым в 1955 г. в работе [6], после чего в 1969 г. была развита Гирстомом и де Клерком в работе [25]. Модель применяют в расчете коротких трещин ($L < h_f$, где L — длина трещины, h_f — высота трещины), при этом влиянием верхней и нижней границ пренебрегают [7]. Последнее предположение позволяет решать задачу роста трещины ГРП связанно с двумерной задачей пороупругости в окрестности трещины [3]. Применение модели актуально на ранних этапах роста трещины (сразу после ее инициации). Связь между профилем раскрытия трещины и избыточным давлением не является локальной: раскрытие трещины зависит от распределения давления во всем канале трещины, в результате чего уравнение связи между давлением в канале трещины и ее раскрытием имеет интегро-дифференциальный вид.

Иная модель трещины ГРП предложена Перкинсом и Керном в 1969 г. Мо-

дель Перкинса-Керна применима в расчете длинных трещин ($L > h_f$). Основным допущением модели является постоянная высота трещины вдоль всей ее длины h_f , что является разумным в случае сильного контраста напряжений между целевым слоем и внешними слоями[28]. Деформация породы в каждом вертикальном сечении рассматривается независимо. Исходя из выше описанных допущений, трещина в рамках модели РКН имеет эллиптический профиль раскрытия, связь между избыточным давлением и шириной максимального раскрытия трещины линейна. Значимое расширение модель получила в 1972 г., когда Нордгрэн в работе [37] дополнил уравнение Перкинса-Керна выражением для неразрывности течения несжимаемой жидкости, содержащим член, отвечающий за утечки рабочей жидкости ГРП в пласт. Данная модель получила название РКН. Итоговое уравнение относительно максимальной ширины раскрытия относится к параболическому типу, в результате чего граничные условия определяют решение во всей расчетной области, и положение правой границы влияет на решение. Однако, в работе [7] отмечено, что возмущения от правой границы сильно затухают в решении. Данное обстоятельство дает возможность определять длину трещины L как координату, в которой ширина максимального раскрытия W не превышает заданное бесконечно малое числ (с точки зрения численной реализации). Важно отметить, что классическая РКН модель не учитывает трещиностойкость породы, сингулярное поведения напряжения на кончике трещины отсутствуют.

Радиальная модель, для которой высота трещины равна ее общей длине ($L/2 \approx h_f$), применяется при решении задачи о росте горизонтальной трещины в вертикальной скважине, что встречается на небольших глубинах или в породах с очень высоким давлением. Вертикальная радиальная модель применима также в случае мощных однородных пластов.

Класс моделей 2D используется, как правило, для экспресс-анализа и содержится в большинстве коммерческих программных комплексах для планирования

дизайна ГРП.

Решение задачи о росте трещины часто предполагает комбинированное использование нескольких моделей. Так, например, модель PKN находит свое применение в рамках модели P3D (описана ниже) в тех случаях, когда границы трещины не выходят за пределы целевого слоя. В случае роста трещины от кластера перфораций в горизонтальном стволе скважины на ранних стадиях, когда границы трещины строго лежат в пределах целевого слоя, прибегают к использованию радиальной модели трещины.

К P3D классу относят параметрическую (lumped-P3D) и кусочно-заданную (cell-based-P3D) модели. В первой модели контур трещины представлен в виде двух сшитых полуэллипсов. Кусочно-заданная модель P3D в первоначальном виде является обобщением модели PKN на случай многослойной литологии [43]. В данной модели трещина представлена набором ячеек, для каждой из которых профиль раскрытия трещины рассчитывается независимо, ячейки связаны при этом гидродинамически. Также данная модель подразумевает наличие одномерного профиля давления внутри трещины, изменяющегося только вдоль направления роста. Другими словами, решение для равновесной высоты трещины определяется только средневзвешенным по сечению канала давлением. В классических моделях P3D горизонтальный рост вызван переносом рабочей жидкости ГРП, вертикальный рост трещины подчиняется механическим законам.

Следующим подклассом моделей в иерархии сложности является планарная модель (planar 3D). При условии роста в заданном направлении, данная модель включает в себя решение геомеханической задачи в двумерной постановке – связи двумерного поля давления внутри трещины и поля напряжений в пласте. В этом состоит принципиальное отличие от 2D и P3D моделей, где принято допущение о наличии градиента давления только в направлении роста трещины.

Трехмерные модели 3D на сегодняшний день являются физически наибо-

лее точными, однако требует значительно большего объема входных данных, что объясняется главным образом отсутствием каких-либо ограничений на геометрию трещины. Получение достаточного объема данных для решения трехмерной задачи не всегда возможно ввиду следующих факторов: ограничения на издержки в проведении геологоразведочных работ, отсутствие методов получения данных (полной карты естественной трещиноватости, напряженно-деформированного состояния), технологические ограничения измерительных приборов и др. Одной из неразрешенных проблем в контексте трехмерной модели трещины является вопрос вычисления поперечного сдвига трещины. Одновременно с этим трехмерные модели требуют существенных расчетных ресурсов. Оговоренные требования делают решение задачи о росте трехмерной трещины на сегодняшний день слабо внедряемым в прикладные задачи промышленности.

Отдельный класс моделей начал формироваться активно с 2000х годов с вовлечением запасов с коллекторами, состоящими из карбонатных пород, которые имеют естественную трещиноватость. Примерами таких моделей являются UFM (Unconventional Fracture Model) [47], DFN (Discrete Fracture Network).

Подробный обзор моделей трещин ГРП в рамках континуального подхода приведен в работах [10], [13]. Явлениям переноса в приложении к задаче ГРП посвящено множество работ, наиболее полный обзор по данному вопросу представлен в работе [39].

Технология многостадийного гидроразрыва пласта в стволе горизонтальной скважины, часто применяемая для низкопроницаемых коллекторов, потребовала решения задачи о росте нескольких трещин в условиях одной или нескольких стадий, — возникла необходимость в связанном решении задач течения в скважине и роста трещин. В свете освоения карбонатных коллекторов с естественной трещиноватостью возникает также необходимость в количественной оценке взаимодействия трещин ГРП и естественных трещин — определении области гидравлически

связанных сети трещин или так называемого стимулированного объема.

Для связанного решения задачи переноса смеси рабочей жидкости и частиц проппанта в стволе скважины и каналах трещин ГРП важной является задача об оценке интерференции трещин, т.е. взаимного влияния друг на друга в процессе роста. Данной теме посвящено множество работ. Условно существующие подходы можно разбить на два класса. В первом классе предлагается решать уравнение пороупругости и фильтрации в области между трещинами. Преимуществом такого подхода является возможность корректного определения утечек жидкости ГРП в пласт, а также учета влияния пластового давления на напряженно деформированное состояние пласта. Во втором классе предлагается рассмотреть взаимное влияние трещин методом разрывных смещений, где каждый элемент трещины рассматривается как источник дополнительно индуцированных напряжений в пласте. Данный подход предложен С.Л. Краучом и А.М. Старфилдом [19] и модифицирован Д. Олсоном (учтена конечная высота трещины) [38].

Цели и задачи работы

Целью работы является разработка математических моделей, вычислительных алгоритмов и программного комплекса для анализа и планирования многостадийного гидроразрыва пласта в горизонтальной скважине. Для достижения поставленной цели автором диссертации решены следующие задачи:

- разработка математической модели и численных алгоритмов моделирования многостадийного гидроразрыва пласта в рамках модели P3D — моделирование процессов течения смеси жидкости неньютоновской степенной реологии и дисперсной твердой фазы (частиц проппанта) в каналах трещин ГРП и

в стволе скважины с переменной площадью сечения и произвольного пространственного профиля, роста трещин в неоднородном геологическом разрезе (произвольном профиле упруго-прочностных свойств) согласно силовому критерию разрушения с учетом вязкостной диссипации энергии, а также взаимного влияния трещин друг на друга за счет индуцированного напряжения;

- апробация реализованных алгоритмов, реализация программного комплекса на базе разработанных численных алгоритмов, позволяющего проводить моделирование дизайна МГРП в стволе горизонтальной скважины путем задания произвольного режима закачки смеси рабочей жидкости и проппанта на устье скважины (месте пересечения скважиной земной поверхности), различных типов проппанта и жидкостей, геомеханического разреза с произвольным количеством слоёв, а также пространственного профиля скважины с произвольным количеством стадий ГРП и точек инициации трещин в каждой из них;
- применение разработанного программного комплекса для решения прикладных задач: анализа влияния эффекта концевого экранирования на профиль закрепленной на проппант трещины, анализа влияния вязкостной диссипации на прорыв в перекрывающие слои в геологическом разрезе, анализа эффекта интерференции на закрепленный профиль трещины и ее траекторию роста.

Научная новизна

- Предложено расширение классической модели ГРП РЗД до модели, учитывающей неявно вязкостную диссипацию энергии в процессе роста трещины

в геологическом разрезе, неоднородном по упруго-прочностным свойствам, путем ввода эффективного коэффициента трещиностойкости.

- Предложен подход расщепления геомеханической и гидродинамической задач, обоснованный наличием временной разномасштабности процессов формирования квазиравновесной трещины (характерные скорости распространения порядка скорости звука в среде) и конвективного массопереноса в канале трещины процесс разрушения породы рассматривается в статической постановке.
- Реализован комплексный подход, позволяющий решать совместно задачи упругости и разрушения в породе с неоднородным геологическим разрезом, массопереноса смеси жидкости неньютоновской реологии и дисперсной фазы в канале трещины и в стволе скважины, а также взаимного влияния трещин друг на друга за счет индуцированных напряжений.

Теоретическая и практическая значимость

На базе реализованного подхода предоставляется возможность комплексного анализа влияния эффектов концевое экранирование — остановки роста трещины в заданном направлении за счет увеличения эффективной вязкости смеси жидкости и проппанта с ростом объемной концентрации дисперсной фазы; эффекта интерференции трещин — взаимного влияния трещин друг на друга за счет дополнительно индуцированных напряжений; влияния режима закачки рабочей смеси на динамику роста трещин. Результаты таких исследований лежат в основе решения практической задачи — планирования оптимального дизайна многостадийного

ГРП, позволяющего достичь целевого значения дебита скважины.

На базе разработанных алгоритмов проведена оптимизация МГРП для скважин, вскрывающих пласты Баженовской свиты [5], [4]. Некоторые результаты диссертации легли в основу разработки коммерческого симулятора ГРП.

Методология и методы исследования

Для решения поставленных задач в диссертационной работе использованы: аппарат теории упругости и разрушения, массопереноса для физико-математической формализации задач; метод конечных разностей для численного решения уравнений в частных производных, описывающих рост трещины и массоперенос в ее канале, а также построения численных экспериментов; метод разрывных смещений для численного определения избыточных напряжений в пласте, индуцированных трещинами ГРП, определения взаимного влияния трещин друг на друга в условиях многостадийного ГРП; численные методы оптимизации для поиска равновесного состояния трещины в неоднородном геологическом разрезе при различных значениях давления внутри трещины.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты:

- предложена комплексная физико-математическая модель для описания динамики МГРП;

- разработан численный алгоритм связанного решения задач массопереноса и геомеханики в приложении к моделированию МГРП;
- разработан программный комплекс для проектирования дизайна МГРП.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, обусловлена решением уравнений на неразрывность фаз и сохранение моментов импульса, использованием эмпирических замыкающих соотношений, наиболее часто встречающихся в научной литературе, а также подтверждающейся практикой в нефтегазовой индустрии при планировании и проведении работ по гидроразрыву пласта. Численные решения проверены на сходимость и сохранение материального баланса. Валидация численного решения также проводилась путем сравнения с результатами, полученными в статьях сторонних авторов.

Основные результаты работы представлены:

- на научно-техническом семинаре компании ООО "Газпромнефть НТЦ" (Санкт-Петербург, 2015);
- на XV Европейской конференции по математике в нефтегазовой отрасли европейской ассоциации геоучёных и инженеров (EAGE) (Амстердам, 2016);
- на Петербургском международном газовом форуме совместно с компанией ООО "Газпромнефть НТЦ" (Санкт-Петербург, 2016);
- на технической конференции общества инженеров-нефтяников (SPE) "ГРП в России: опыт и перспективы" (Москва, 2016);

- на российской нефтегазовой технической конференции и выставке SPE, на региональном конкурсе студенческих работ (Москва, 2016), где в секции аспирантов получено призовое 1-е место;
- на 59ой всероссийской научной конференции МФТИ, где в секции нефтегазового инжиниринга получено призовое 1-е место (Москва, 2016);
- на совместном научно-техническом семинаре общества инженеров-нефтяников (SPE) и европейской ассоциации геоченных и инженеров (EAGE) на тему "Наука о сланцах: проблемы разведки и разработки"(Москва, 2017);
- на ежегодной технической конференции и выставке SPE АСТЕ, на международном конкурсе аспирантов (Сан-Антонио, США, 2017).

Публикации

По теме диссертационной работы опубликовано 8 работ, из которых 6 статей в журналах, включенных в перечень российских и международных рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертации. Автор имеет 6 свидетельств о регистрации программ для электронных вычислительных машин, содержащих ключевые результаты диссертации.

Личный вклад

Автор диссертации принимал активное участие в получении результатов, отражённых во всех совместных публикациях на равноправной основе: постановке задачи, разработке и верификации численного метода для ее решения, проведении численных экспериментов, обсуждении полученных результатов и их физической интерпретации, а также оформлении результатов в виде публикаций и научных докладов.

Благодарности

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение №075-15-2019-1279 от 21.06.2019 г., уникальный идентификатор RFMEFI58117X0027).

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю — д.т.н. М.М. Хасанову за помощь при выполнении работы, Р.Н. Никитину, А.А. Ерофееву, Д.А. Митрушкину, А.В. Бочкареву, Д.В. Чернышеву — за консультационную помощь, Т.А. Тавберидзе и Г.Э. Румянниковой — за предоставленную возможность развития научно-исследовательских подходов в рамках темы диссертации в приложении к промышленным задачам.

2 Динамика роста одиночной трещины ГРП

В настоящей главе представлена физико-математическая формализация задачи роста одиночной трещины ГРП в неоднородном геологическом разрезе в рамках модели РЗД, учитывающей неявно вязкостную диссипацию энергии в вертикальном росте путем введения эффективного коэффициента трещиностойкости. Построено численное решение на основе выписанной математической модели, результаты численного решения апробированы на аналитических решениях, а также на результатах научных статей сторонних авторов.

Факторы, оказывающие существенное влияние на геометрию трещины в процессе ее роста и ее закрепления на проппант, можно условно отнести к двум группам: упруго-прочностным свойствам пласта и дизайну закачки (свойства рабочей жидкости, расклинивающего агента, общий расход смеси, концентрация проппанта).

Минимальное напряжение σ_{min} , обусловленное действием силы тяжести со стороны вышележащих пород, пластовым давлением и тектоническими процессами в пласте, относится к ряду доминирующих с точки зрения влияния на процесс распространения трещины в породе. Контролирующим параметром является отношение между давлением в канале трещины p и разностью между минимальным напряжением в целевом слое и минимальными напряжениями в прилегающих слоях $\Delta\sigma$. Так, например, может наблюдаться тектонический режим, при котором целевой нефтенасыщенный слой имеет минимальное горизонтальное напряжение σ_h существенно меньше, чем у прилегающих слоев, и тогда рост трещины будет происходить в пределах целевого слоя, если давление в канале трещины p не компенсирует разницу напряжений $\Delta\sigma$. В обратном случае может наблюдаться

распространение трещины в вертикальном направлении в случае, когда давление в канале трещины p сравнимо или превышает контраст напряжений $\Delta\sigma$. В тектонически ослабленных районах минимальное напряжение является горизонтальными, в результате чего инициированная вертикально трещина распространяется в плоскости, перпендикулярной к минимальным напряжениям.

Важными также являются упруго-прочностные свойства породы. Так, например, для чистых глин характерны высокие значения коэффициента Пуассона ν , что ведет к более высоким значениям горизонтальных напряжений, чем у алевролитов и песчаников, расположенных вблизи глин. Как следствие, при значительной мощности глинистых слоёв последние выступают в роли барьера для распространения трещины в вертикальном направлении. С увеличением значения модуля Юнга E раскрытие трещины уменьшается: при равных условиях по дизайну закачки, в твердых отложениях (например, в плотных низкопроницаемых песчаниках) ширина трещины будет существенно меньше относительно случая мягких пород. Тогда зоны с высокими значениями модуля Юнга E могут также выступать в роли барьеров для вертикального распространения трещины. Свойством породы, определяющим напрямую условия распространения трещины, является коэффициент трещиностойкости (или вязкостью разрушения) K_{Ic} . Критерий хрупкого разрушения породы состоит в достижении коэффициента интенсивности напряжений (КИН) на кончике трещины величины коэффициента трещиностойкости среды, в которой трещина распространяется.

Ко второй группе регулирующих параметров можно отнести свойства закачиваемой жидкости и проппанта, а также режим закачки (расхода смеси, концентрации твердой фазы). Существует общепринятая классификация используемых дизайнов закачки: HPF (Hydraulic Proppant Fracturing), WF (Water Fracturing), HF (Hybrid Fracturing) [41]. HPF-технология предполагает закачку линейных или сшитых (высокой вязкости) гелей с высокой концентрацией проппанта с целью со-

здания высокопроводимой, но при этом короткой (в сравнении с WF-технологией) трещины ГРП. Технология применима для пород средних и высоких значений абсолютной проницаемости. WF-технология заключается в закачке воды с добавкой химических элементов, снижающих вязкость (slick water), с малой концентрацией проппанта (или вовсе нулевым значением). В результате такого режима закачки формируются длинные трещины малых объемов. Технология применима при необходимости объединить нефтенасыщенные пласты на больших расстояниях от забоя скважины, сформировать стимулированный объем (гидравлически связанную сеть трещин ГРП и естественных трещин). Наконец, HF-технология является комбинацией описанных выше режимов закачки, все чаще встречается в работах по созданию дизайна ГРП как на месторождениях на поздней стадии разработки, так и на новых месторождениях.

Для обоснования физических допущений, на основе которых будет построена физико-математическая модель роста трещины ГРП, в таблице 1 приведены характерные масштабы параметров, типичные для технологии ГРП.

Таблица 1: Диапазоны основных параметров, типичных для технологии ГРП

Параметр	Диапазон значений
Геометрия трещины	
Полудлина трещины, L	100-500 м
Высота трещины, h	10-50 м
Ширина трещины, w	$10^{-4} - 10^{-3}$ м
Свойства жидкости	
Показатель неньютоновского поведения, n	0.5-1
Коэффициент консистенции, K	$10^{-3} - 2$ Па с ^{n}
Свойства проппанта	
Диаметр частиц проппанта, a	$10^{-4} - 2 \cdot 10^{-3}$ м
Объемная концентрация проппанта, β	0-0.4
Дизайн закачки	
Расход смеси, q	0.6-6 м ³ /мин.
Скорость течения смеси, v	0.2-20 м/с

2.1 Постановка задачи

Задача роста одиночной трещины поставлена следующим образом. При заданном профиле упруго-прочностных свойствах пласта (модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν , минимальное горизонтальное напряжение $\sigma_{\min}$, коэффициент трещиностойкости K_{IC} , коэффициент утечек C_l), свойствах несущей фазы (плотность ρ_f , показатель неньютоновского поведения n , индекс консистенции K) и частиц проппанта (плотность материала ρ_p , радиус частиц a), а также режиме закачки (объемный расход смеси q_m , объемная концентрация проппанта β) необхо-

можно определить динамику роста трещины ГРП в процессе роста и ее закрепления пропантом, — временные зависимости длины трещины L , профиля раскрытия w , высоты трещины h_f , а также профиль избыточного давления жидкости в канале трещины $p_{net} = p_f - \sigma_{\min}$.

Физико-математическая формализация задачи о росте трещины ГРП включает две группы уравнений: уравнения для описания переноса смеси вязкой жидкости и пропанта в канале трещины, уравнения линейной механики разрушения, определяющие условия развития трещины в среде.

2.2 Упрощающие предположения

В задаче о росте одиночной трещины ГРП приняты следующие допущения:

- деформация горной породы рассматривается как линейно-упругая: компоненты напряжений являются линейными функциями компонент деформаций;
- влиянием порового давления на напряженно деформированное состояние в окрестности трещины пренебрегается;
- отсутствует запаздывание фронта жидкости перед кончиком трещины;
- внутренняя поверхность трещины считается гладкой, пренебрегается шероховатостью внутренних стенок;
- процесс переноса жидкости рассматривается изотермическим (не учитывается влияние температуры на свойства жидкости);
- жидкость рассматривается слабо сжимаемой (верно, так как для трещины ГРП выполняется неравенство $w\partial\rho/\partial t \ll \rho\partial w/\partial t$ [33])

- дисперсная фаза (проппант) рассматривается несжимаемой;
- ввиду малости ширины раскрытия трещины w (порядка $10^{-4} - 10^{-3}$ м) в сравнении с ее длиной L (порядка $10 - 10^2$ м) и высотой h_f ($10 - 10^2$ м) изменением давления и скорости в поперечном направлении пренебрегается;
- нелокальная связь между давлением внутри трещины и ее раскрытием задается для эффективной среды: упругие свойства неоднородной среды принимаются как средневзвешенное по вскрываемым трещиной слоям;
- утечки рабочей жидкости в пласт определяются согласно модели Картера.

2.3 Определяющие уравнения

Модель Р3D выбрана в качестве базовой в задаче моделирования динамики роста трещины ГРП. В данной модели трещина представлена в виде гидродинамически связанных объемных ячеек (далее ячеек) $A_f \Delta s$, где Δs — длины ячейки (s — криволинейная координата, определяющая направление роста трещины), A_f — площадь сечения канала трещины, определяемая для заданных профиля раскрытия $w(s, z)$ (z — вертикальная координата) и высоты трещины $h_f(s)$ выражением:

$$A_f(s) = \int_{-h_f(s)/2}^{h_f(s)/2} w(s, z) dz. \quad (1)$$

Динамика изменения площади сечения канала трещины A_f определяется расходом жидкости на входе в трещину: решаются уравнения неразрывности и сохранения моментов импульса. Модель подразумевает наличие одномерного профиля давления внутри трещины $p(s)$, изменяющегося только вдоль направления роста,

т.е. вдоль криволинейной координаты s . Профиль раскрытия трещины $w(z)$ при заданном давлении в ячейке p определяется в рамках геомеханической задачи. Задачи гидродинамики и геомеханики рассмотрены ниже. Схематично геометрия трещины в рамках модели R3D приведена на рисунке 2.

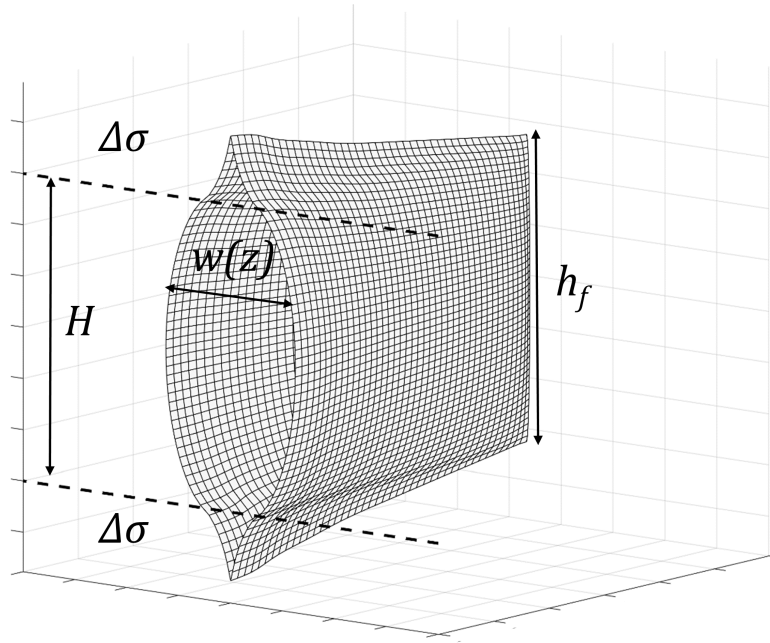


Рисунок 2: Схематичная геометрия трещины ГРП в рамках модели R3D

2.3.1 Модель переноса смеси жидкости и пропанта в канале трещины

Ввиду малости ширины раскрытия трещины w и высокой вязкости флюида, наблюдается быстрое достижение стационарного режима, т.е. достигается режим Стокса (поле скоростей мгновенно адаптируется под изменения поля давления в канале трещины). Таким образом, движение жидкости в канале трещины можно рассмотреть в приближении модели смазочного слоя, откуда имеем следующее выражение для локальной неразрывности жидкости в канале трещины переменного

сечения [46]

$$\frac{\partial \rho_f w}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f q}{\partial s} + q_l = \rho_f q_0(t) \delta(s), \quad (2)$$

где ρ_f — плотность жидкости, w — профиль раскрытия канала трещины, q — объемный расход жидкости в единицу высоты трещины, q_l — объемный расход утечек в пласт, s — криволинейная координата, определяющая траекторию роста трещины, δ — символ Кронекера.

Жидкость ГРП является слабо сжимаемой, т.е.

$$\rho_f \approx \rho_{f0}(1 + c(p - p_0)), \quad (3)$$

где c - коэффициент сжимаемости жидкости, ρ_{f0} - плотность жидкости при заданном опорном давлении p_0 .

Линеаризуем уравнение неразрывности в окрестности точки (ρ_0, p_0) , учитывая, что упругая податливость трещины существенно выше упругой податливости жидкости, получим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + cw \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} + q_l = q_0(t) \delta(s). \quad (4)$$

Таким образом, локальное сохранение массы переходит в выражение локального сохранения объема жидкости

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} + q_l = q_0(t) \delta(s). \quad (5)$$

В качестве начального условия задаётся нулевое раскрытие трещины:

$$w(s, 0) = 0. \quad (6)$$

Граничными условиями являются нулевой объемный поток (вырождение условия Стефана [20]) и нулевое раскрытие на кончике трещины $s = L$, т.е.

$$q(L, t) = 0, w(L, t) = 0, \forall t > 0. \quad (7)$$

Выписанное граничное условие вытекает из условия об отсутствии запаздывания фронта жидкости перед кончиком трещины. В свою очередь условие нулевого лага принято, так как ранний этап, процесс инициации, трещины в настоящей работе не рассматривается. В работах [17], [30] дана оценка на время исчезновения лага, что составляет порядка секунд.

Проверкой корректности численного решения уравнения переноса жидкости является сохранение материального баланса (за период времени t объем закачиваемой смеси равен сумме объема образованной трещины и объема утечек, жидкости, отфильтрованной в пласт), т.е.

$$\int_0^t q_0(t') dt' = \int_0^{L(t)} \int_0^t q_l(s, t') dt' ds + \int_0^t A_f(t') dt'.$$

Так как в большинстве работ по ГРП используются гелеобразные рабочие смеси (водные растворы полимера [14]), в работе рассматривается модель неньютоновской жидкости, чьи касательные напряжения τ зависят нелинейно от мгновенного значения скорости сдвига $\dot{\gamma}$. Среди моделей жидкостей с нелинейной реологией выбрана степенная модель Оствальда - де Ваале (8), так как она описывает с хорошей точностью реологию большинства стандартных жидкостей ГРП

$$\tau = K \dot{\gamma}^n, \quad (8)$$

где K — индекс консистенции, n — показатель неньютоновского поведения.

Связь между потоком жидкости q и чистым давлением p_{net} , следующее из решения задачи об установившемся ламинарном течении жидкости между двумя параллельными плоскостями единичной высоты, разнесенными на расстояние w , даётся уравнением Пуазейля [23]

$$q = -\Lambda(w, p) \frac{\partial p_{net}}{\partial s} \quad (9)$$

где Λ - оператор мобильности жидкости, определяющий сильную нелинейность процесса и в случае степенной реологии имеет вид

$$\Lambda(w, p) = \frac{n}{(2n+1)2^{(n+1)/n}} K^{-1/n} w^{\frac{2n+1}{n}} \left| \frac{\partial p_{net}}{\partial s} \right|^{\frac{1-n}{n}} \quad (10)$$

или в случае ньютоновской жидкости ($K = \mu, n = 1$) имеем кубический закон для сопротивления трещины:

$$\Lambda(w) = \frac{w^3}{12\mu}. \quad (11)$$

Отметим, что данный закон верен в случае, когда толщина канала трещины w существенно превышает характерный размер шероховатости внутренней поверхности стенок трещины [49]. Будем считать, что данное утверждение является верным для оператора мобильности степенной реологии.

Число Рейнольдса для трещины ГРП вычисляется по аналогии с течением между двумя параллельными пластинами

$$Re = \frac{3^{1-n} 2^{2-n} \rho_f v^{2-n} w^n}{K} \left(\frac{3n}{2n+1} \right)^n. \quad (12)$$

В случае высоковязкостных гелей достигается ламинарный режим.

2.3.2 Деформация и разрушение породы

Решение задачи о росте трещины в породе требует соотношений, определяющих влияние геомеханических свойств породы на профиль раскрытия трещины w

при заданном внутреннем давлении трещины p . Нелокальное соотношение между давлением p и профилем раскрытия w в линейно-упругой среде определяется выражением [44]

$$w(z) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^{h_f} (p - \sigma(z')) K(z, z'; h_f) dz', \quad (13)$$

где h_f — высота трещины, $E' = E/(1 - \nu^2)$ — модуль плоской деформации, $K(z, z'; h_f)$ — сингулярное ядро, определяемое как

$$K(z, z'; h_f) = \ln \left| \frac{\sqrt{h_f^2 - z^2} + \sqrt{h_f^2 - z'^2}}{\sqrt{h_f^2 - z^2} - \sqrt{h_f^2 - z'^2}} \right|. \quad (14)$$

Выражение (13) выписано в предположении однородности механических свойств среды (модуль плоской деформации E' стоит за знаком интеграла). В то же время процесс ГРП имеет место в неоднородной среде, неоднородность при этом учитывается для профиля напряжений путем введения чистого давления p_{net} . Подробно данная проблема освещена в работе [11]. В качестве допущения в настоящей работе модуль плоской деформации E' рассматривается как средневзвешенное по вскрытым трещиной слоям.

Для линейного упругого твердого тела при описании полей напряжений у вершины трещины используются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), которые характеризуют энергию раскрытой трещины и являются мерой сингулярности напряжений в окрестности кончика трещины. Раскрытие трещины в твердом теле может быть осуществлено тремя формами смещения K_I — нормальный отрыв (раскрытие трещины), K_{II} — поперечный сдвиг, K_{III} — продольный сдвиг [27]. Согласно силовому критерию хрупкого разрушения Ирвина, условие достижения напряжениями критического значения определяет момент начала распространения трещины.

При рассмотрении вертикального роста трещины, в каждой ячейке берега трещины перпендикулярны плоскости трещины и направлению растягивающих усилий, в связи с чем рассматриваются трещины типа I ($K_I \neq 0$), продольный и поперечный сдвиги отсутствуют. Тогда критерий разрушения породы запишется

$$K_I = K_{IC}, K_{II} = K_{III} = 0. \quad (15)$$

Рост трещины в однородной среде можно рассматривать лишь в некоторых редких случаях. Первым шагом в уходе от такого допущения является рассмотрение слоистой структуры литологии: упруго-прочностные свойства заданы в виде кусочно-заданной ступенчатой функции. В предположении нулевого градиента вертикальной составляющей давления внутри трещины, равновесная высота последней в слоистой среде может быть рассчитана через КИН. В линейно-упругой среде КИН на верхнем и нижнем концах трещины (K_{I+} и K_{I-} , соответственно) определяются выражением [42]

$$K_{\pm} = \sqrt{\frac{2}{\pi h_f}} \int_{-h_f/2}^{h_f/2} (p - \sigma(z)) \sqrt{\frac{h_f/2 \mp z}{h_f/2 \pm z}} dz, \quad (16)$$

где $\sigma(z)$ — профиль пластового напряжения, h_f — высота трещины, p — средневзвешенное по вертикальному сечению давление внутри трещины, определяемое как

$$p(s, t) = \frac{1}{A(s, t)} \int_0^{h_f} w(s, z, t) p(s, z, t) dz. \quad (17)$$

Равновесная высота трещины h_f достигается в том случае, когда КИН на кончиках трещины равен коэффициенту трещиностойкости K_{IC} , — меры, определяющей способность материала сопротивляться образованию трещин, т.е.

$$K_{\pm} = K_{IC}. \quad (18)$$

В контексте задачи ГРП, когда рассматривается только нормальный тип смещения трещины I , силовой критерий разрушения Ирвина эквивалентен энергетическому критерию хрупкого разрушения Гриффитса. Критерий Гриффитса гласит, что рост трещины возможен, если освобождающейся потенциальной энергии достаточно для образования новой свободной поверхности.[2] Условие (18) должно выполняться одновременно на обоих (нижнем и верхнем) кончиках трещины.

Описанный выше подход применим в условиях равновесного роста. В то же время на больших временах преобладает режим роста с вязкостной диссипацией энергии. В работе [21] предложен подход, основанный на введении кажущегося коэффициента трещиностойкости ΔK_{IC} , который зависит от скорости движения фронта кончика трещины. В допущении, что фронт жидкости на кончиках трещины совпадает с фронтом самой трещины, можно предположить, что ввод кажущегося коэффициента трещиностойкости позволяет учесть неявно вертикальный перенос жидкости в трещине и, как следствие, частично снять ключевое допущение Р3D модели об отсутствии вертикального градиента давления в трещине. Таким образом, имеем динамический коэффициент трещиностойкости

$$K_{IC}^{dyn} = K_{IC} + \Delta K_{IC}(v_{\pm}), \quad (19)$$

где $v_{\pm}$ - скорости верхнего и нижнего кончиков трещины, которые в случае неоднородного геологического разреза отличны друг от друга и определяемы как

$$v_+ = \frac{\partial z_{top}}{\partial t}, v_- = \frac{\partial z_{bot}}{\partial t}. \quad (20)$$

Выражение для кажущегося коэффициента трещиностойкости в случае неньютоновской жидкости со степенной реологией имеет вид [21]

$$\Delta K_{IC} = E' \frac{2\sqrt{2}(2+n)}{\pi(2-n)} \left[\frac{K}{nE'h_f^n} \left(\frac{\cos[(1-\beta)\pi]}{\sin(\beta\pi)} \right)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{n(2+n)} \right)^n \right]^{1/(2+n)} v^{n/(2+n)}, \quad (21)$$

где $\beta = 2/(2+n)$.

Учет вязкостной диссипации энергии в вертикальном росте трещины позволяет решить проблему завышенной оценки высоты трещины ГРП в рамках Р3D модели. Данная особенность актуальна в задаче создания оптимального дизайна ГРП в присутствии водонефтяного или газонефтяного контактов: некорректная модель роста трещины завышает риски прорыва фаз воды или газа в скважину.

Корректность разработанного алгоритма определена путем сравнительного анализа с результатами работы [21], в рамках которой описан подход к расширению классической модели Р3D до модели ЕР3D, в которой учитывается неявно вязкостная диссипация энергии при вертикальном росте в трехслойной симметричной литологии. Результаты применения разработанного подхода проверены на корректность на результатах, полученных в рамках модели Planar 3D в исследовательском коде ILSA (Implicit Level Set Algorithm). Модель Planar 3D разрешает связанную двумерную задачу массопереноса в канале трещины и ее роста, соответственно, диссипация вязкостной энергии учитывается явно во всех направлениях. Таким образом, совпадение результатов работы с результатами, полученными в исследовательском коде ILSA, будет свидетельствовать о корректности разработанного подхода к неявному учету вязкостной диссипации в процессе роста трещины в многослойной литологии, что и наблюдается в полученном сравнительном тесте (Рисунок 3).

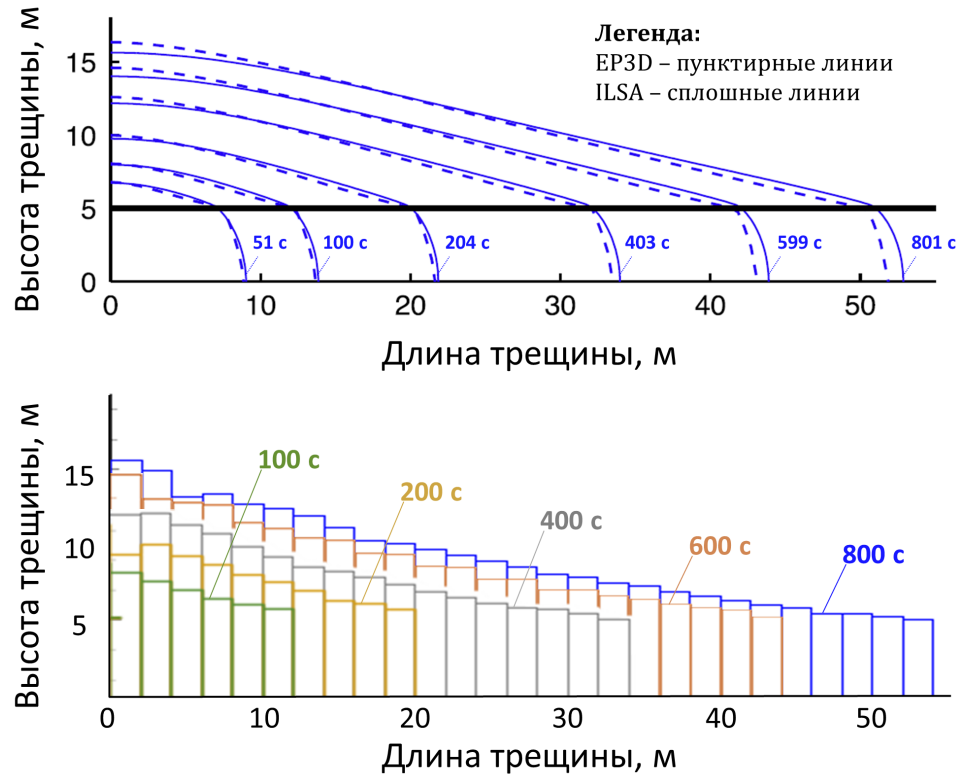


Рисунок 3: Сравнение геометрии трещины в различные моменты времени: сверху - результаты работы [21]; снизу - результаты, полученные в рамках настоящей работы

Параметры, используемые при расчетах, приведены в таблице 2 .

Таблица 2: Используемые параметры из работы [21]: режим закачки, свойства пласта

Параметр	Значение
Период закачки T , с	604
Расход смеси, $\text{м}^3/\text{сек.}$	$1.7 \cdot 10^{-9}$
Вязкость жидкости μ , $\text{Па} \cdot \text{с}$	30.2
Толщина целевого слоя H , м.	0.05
Модуль Юнга E , ГПа	1
Коэффициент Пуассона ν	0.4
Контраст напряжений $\Delta\sigma$, МПа	4.3
Коэффициент трещиностойкости K_{Ic} , $\text{МПа} \cdot \text{с}^{1/2}$	0
Коэффициент утечек Картера C_l , $\text{м} \cdot \text{с}^{-1/2}$	0

2.3.3 Модель течения суспензий

Решение задачи многофазного течения в настоящей работе основано на приближении эффективной среды, где суспензия рассматривается как вязкая несжимаемая жидкость с плотностью и вязкостью, зависящими явно от объемной доли дисперсной фазы.

Рассмотрим задачу о переносе двухфазной системы - смеси жидкости и пропанта. Будем искать усредненные по толщине трещины величины для концентрации пропанта c и скоростей для фаз жидкостей и пропанта v_l и v_p .

Среди существующих подходов для решения задачи многофазного потока выбрана модель смеси. В данной модели фазы системы рассматриваются как вза-

имопроникающие среды.

Объемная доля проппанта является непрерывной функцией времени и пространственных координат, интеграл по всему пространству равен единице. Сохранение массы для каждой из фаз в рамках гомогенной модели скоростей запишется

$$\frac{\partial(1-\beta)A_f}{\partial t} + \frac{\partial(1-\beta)q}{\partial s} + (1-\beta)q_l = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial\beta A_f}{\partial t} + \frac{\partial\beta q}{\partial s} = 0, \quad (23)$$

где β — объемная концентрация проппанта, q — объемный расход жидкости в единицу высоты трещины.

Граничными условиями являются нулевой объемный поток смеси (вырождение условия Стефана) и нулевое раскрытие на кончике трещины ($s = L$)

$$q(t, L) = 0, \quad w = 0, \quad \forall t > 0, \quad (24)$$

а также условия на расход смеси и концентрацию проппанта на входе трещины

$$q(0, t) = q_0(t), \quad \beta(0, t) = \beta_0(t), \quad \forall t > 0. \quad (25)$$

где $\beta_0(t)$ — объемная концентрация проппанта на выходе в канал трещины, $q_0(t)$ — объемный расход жидкости в единицу высоты трещины на входе.

В качестве начального условия задаются нулевое раскрытие трещины и нулевая концентрация проппанта

$$w(s, 0) = 0, \quad \beta(s, 0) = 0. \quad (26)$$

Модель смеси для описания динамики жидкости с твердой фазой требует отношения зависимости вязкостных свойств смеси суспензии от концентрации дисперсной среды. Очевидно, что с увеличением концентрации твердой фазы с общая

вязкость смеси увеличивается. В работе [29] обоснована модель, описывающая следующую зависимость и неявно учитывающую взаимодействие частиц друг с другом и с несущей фазой

$$\mu(c) = \mu_f(1 - c/c^*)^{-\gamma}, \quad (27)$$

где μ_f - вязкость чистой жидкости (в отсутствии твердой фазы), γ - положительная константа, определяющаяся из эксперимента (в работе [39] приведен перечень возможных значений коэффициента, полученных экспериментально различными авторами), c^* - критическая концентрация твердой фазы. Для частиц дисперсной среды сферической формы и одинаковых размеров концентрация максимально плотной упаковки составляет $c^* \approx 0.7$, в реальности же максимально плотная упаковка не достигается, на практике принято пользоваться значением так называемого предела случайной упаковки $c^* \approx 0.65$. При малых концентрациях твердой фазы зависимость вязкости от концентрации c линейна (модель, предложенная Эйнштейном).

При достижении концентрации критического значения вязкость имеет сингулярное поведение (стремится к бесконечности). Регуляризация сингулярности для численного решения возможна отступом значения концентрации c на малую величину ϵ , т.е. $c- > c - \epsilon$. В таком случае численное решение даст достаточно большое и при этом конечное число для вязкости суспензии $\mu_f(c^*/\epsilon)^\beta$, чтобы занулить поток. Стоит также отметить, что рассматриваемая модель согласуется с результатами численного решения динамики твердых частиц в жидкости, полученным независимо методами PD (Particle Dynamics) и SPH (Smoothed Particle Dynamics) в работе [29].

В работе [23] описаны результаты лабораторного эксперимента, в котором изучено влияние твердой дисперсной фазы на вязкостные свойства полимерного геля, имеющего степенную реологию. Показано, что в диапазоне концентраций

твердой фазы от 0 до 0.35 индекс неньютоновского поведения n не зависит от концентрации дисперсной фазы в то время, как индекс консистенции K подчиняется той же эмпирической зависимости, что предлагается для вязкости ньютоновской жидкости. Принципиальным отличием данной зависимости для индекса консистенции является наличие индекса n_f в степени, т.е

$$K(c) = K_f(1 - c/c^*)^{5n_f/2}, \quad (28)$$

где K_f - индекс консистенции чистой жидкости.

Нестационарность реологии, зависимость коэффициентов K и n от времени, необходимо учитывать только при закрытии трещины, так как существенно уменьшение вязкости гелеобразных жидкостей, обусловленное естественной деформацией связей между полимерными цепочками, проявляется на временных масштабах порядка часов, что соизмеримо со временем ожидания процесса закрытия трещины. Стоит отметить, что при наличии твердой фазы, проппанта, может и проявляться обратный, тиксотропный, эффект – увеличение вязкости со временем. Вопрос о зависимости реологических свойств гелей от времени при наличии твердой фазы является отдельной темой исследования.

2.3.4 Модель утечек жидкости в пласт

Так как в процессе роста трещины ГРП давление в канале трещины превышает пластовое давление, происходит фильтрация жидкости ГРП в пласт. В общем случае утечка жидкости в породу должна рассматриваться в рамках задачи нестационарной фильтрации неньютоновской жидкости. Необходимо решать связанную задачу роста трещины и задачу пороупругости в окрестности трещины.

При этом широко распространенной и относительно простой моделью, используемой практически во всех коммерческих симуляторах ГРП, является эмпирическая модель Картера для скорости утечек [18]

$$v_l = \frac{C_l}{\sqrt{t - \tau(s)}} \quad (29)$$

где t - время, прошедшее с начала процесса утечки, $\tau(s)$ - время прихода границы кончика трещины в положение s , C_l - эмпирический коэффициент утечек Картера. Время τ можно понимать как обратную к функции длины трещины $L(t)$, т.е $\tau(s) = L^{-1}(t)$.

Модель Картера получена в следующих предположениях: фильтрация жидкости происходит в нормальном (по отношению к берегам трещины) направлении, скорость фильтрации при этом существенно меньше характерной скорости распространения трещины, рабочий реагент не смешивается с пластовыми флюидами, свойства породы не зависят от порового давления. Нормальность утечек по отношению к берегам трещины обусловлено тем, что размер области, в окрестности которой, происходит фильтрация жидкости, существенно меньше длины трещины. [33]

Объемные утечки с обеих поверхностей трещины с учетом неоднородности фильтрационно-емкостных свойств породы можно выразить как

$$q_l(s, t) = \frac{2\tilde{C}_l h_f}{\sqrt{t - \tau(s)}}, \quad (30)$$

где $\tilde{C}_l$ - средневзвешенный по вскрываемым трещиной слоям коэффициент утечек

$$\tilde{C}_l = \frac{1}{h_f} \int C_l(z) dz. \quad (31)$$

В работе [23] предложен более общий вид для скорости утечек жидкости степенной реологией в случае закрытия трещины $v_l \sim t^{1-\theta}$, где $\theta > 0$ - параметр, зависящий от показателя неньютоновского поведения жидкости. Однако учет именно такой зависимости разрывает связь между этапами Мини-ГРП и ГРП. На этапе проведения Мини-ГРП по анализу кривых падения давления производится оценка коэффициента утечек C_l для данной реологии жидкости, которая в дальнейшем применяется в проведении основных работ ГРП. Таким образом, коэффициент утечек C_l несет в себе информацию не только о фильтрационно-емкостных свойствах пласта, но и о свойствах самой жидкости. По этой причине, в выражении Картера в процессе закрепления трещины вязкостные свойства *a priori* заложены в коэффициенте утечек.

2.4 Численный алгоритм

Среди общих подходов к численному решению задачи о росте трещины ГРП можно выделить следующие. В первом подходе задаётся расчетная область, заведомо превышающая размеры трещины на момент остановки закачки рабочей смеси жидкости и проппанта. Очевидным недостатком такого метода является необходимость в определении размера расчетной области таким образом, чтобы трещина в процессе роста не смогла выйти за ее пределы. Помимо этого, алгоритм должен численно разрешать уравнения только в той области, где физически имеет место трещина, в обратном случае ожидаются излишние временные затраты на численное решение задачи роста трещины.

Второй подход заключается в переходе к приведенной координате $x/L(t)$. Данный подход позволяет зафиксировать количество узлов пространственной сет-

ки, что существенно упрощает численное решение. Однако такой переход влечет за собой появление обратных зависимостей от длины трещины $L(t)$. Таким образом, в начальный момент времени появляется неопределенность в разрешении задачи. Решение проблемы заключается в поиске асимптотического решения основополагающих уравнений на ранних временах, т.е. на стадии инициации трещины. Подробно такой подход описан в работах [23], [50], [12]. Однако в данных работах рассмотрены относительно простые модели: полученные по ним асимптотики не распространяются на все условия, описанные в настоящей работе, в частности, условие на рост трещины в нескольких слоях.

В рамках диссертационной работы уравнения массопереноса в канале трещины решаются численно неявной по времени конечно-разностной схемой, аппроксимация потоков на гранях расчётных ячеек производится противопотоковой схемой. На каждом временном шаге решение уравнений неразрывности и сохранения моментов импульса итеративно приближается путём вычислений обновлённых значений параметров задачи геомеханики (профиля раскрытия трещины). Данный подход обеспечивает устойчивость численной схемы и удовлетворительную сходимость.

Расчетная область расширяется по мере необходимости (в зависимости от объема закаченной жидкости), т.е. в основе численного решения легла идея последовательного роста расчетных ячеек.

Предложен подход расщепления геомеханической и гидродинамической задач. За счет наличия временной разномасштабности процессов формирования квазиравновесной трещины (характерные скорости распространения порядка скорости звука в среде) и конвективного массопереноса в канале трещины процесс разрушения породы рассматривается в статической постановке. Это позволило для заданного профиля упруго-прочностных свойств решать геомеханическую задачу предварительно один раз, после чего профили раскрытия трещины при различных

значениях чистого давления используются в гидродинамическом моделировании в виде заданных таблиц (промежуточные значения по имеющемуся дискретному набору данных вычисляются путем интерполяции).

Задача об определении связи между чистым давлением в сегменте трещины ГРП p_{net} и ее профилем раскрытия w решена путем решения задачи поиска глобального минимума для функционала двух переменных z_t, z_b , координат границ верхнего и нижнего кончиков трещины, т.е.

$$\min_{z_t, z_b} \{|K_+(z_t, z_b) - K_{Ic}(z_t)| + |K_-(z_t, z_b) - K_{Ic}(z_b)|\}, \quad (32)$$

с ограничениями, вытекающими из критерия разрушения породы

$$K_+(z_t, z_b) \geq K_{Ic}(z_t), K_-(z_t, z_b) \geq K_{Ic}(z_b),$$

где $K_{Ic}(z)$ - заданный профиль трещиностойкости, а коэффициент интенсивности напряжений удобно переписать в следующем виде

$$K_{\pm}(z_t, z_b) = \frac{2}{\pi(z_t - z_b)} \int_{z_b}^{z_t} (p - \sigma(z)) \left(\frac{z_t - z}{z - z_b} \right)^{\pm 1/2} dz. \quad (33)$$

Задача сводится в первую очередь к определению положений верхнего и нижнего кончиков трещины z_t, z_b при различных значениях чистого давления p_{net} , на втором этапе производится расчет профиля раскрытия трещины w .

Отметим ряд особенностей целевого функционала. Во-первых, в функционал входит интегральное представление функции КИН для профиля напряжений в общем случае, при этом параметры оптимизации входят как в подынтегральное выражение, так и в границы интегрирования. Во-вторых, ввиду того, что профили напряжения и коэффициента трещиностойкости заданы кусочно-заданными функциями, поверхность целевого функционала терпит разрыв первой производной. Ввиду описанных особенностей имеем высокую неустойчивость в решении

задачи оптимизации (что, в частности, проявляется сильной зависимостью решения от начального приближения), приводящую к рискам скатиться в локальные экстремумы. Последнее положение затрудняет применение стандартных методов оптимизации, основанных на градиентном спуске, так как градиентные методы требуют непрерывной дифференцируемости целевой функции на всем рассматриваемом пространстве параметров. Одним из решений такой проблемы является представление функционала в виде составной функции и применении так называемых суб-градиентов. В настоящей работе для поиска глобального экстремума применен метод Хука-Дживса, безградиентный метод, опирающийся непосредственно на значения функционала.

В качестве начального приближения выбраны точки, соответствующие границам целевого слоя. Оптимизация проводилась для всех точек из множества, сформированного всеми возможными вариантами расположения верхней и нижней границ трещины при заданном значении чистого давления, т.е. от нижней границы целевого слоя до нижней границы литологии для нижнего кончика трещины и от верхней границы целевого слоя до верхней границы литологии для верхнего кончика трещины.

Отметим, что в случае расчета равновесной высоты для одиночной трещины (без учета вязкостной диссипации), задача оптимизации решается один раз для заданного профиля упруго-прочностных свойств. Далее, полученные зависимости профиля раскрытия трещины в зависимости от чистого давления используются в численном моделировании роста трещины ГРП. В каждом секторе трещины решается обратная задача, по заданному положению кончиков трещины определяется значение чистого давления, соответствующего данным положениям кончиков трещины. Промежуточные значения по имеющемуся дискретному набору данных вычисляются путем интерполяции.

Выражение, определяющее связь между профилем раскрытия $w(z)$, упруги-

ми свойствами пласта и положением кончиков трещины в многослойной литологии имеет вид [24]

$$\begin{aligned}
w(z) = & \frac{4}{\widetilde{E}'}(p - \sigma_n)\sqrt{z(h_f - z)} + \\
& + \frac{4}{\pi \widetilde{E}'} \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i)(h_i - z) \operatorname{arcosh} \left(z \frac{1 - 2h_i/h_f}{|z - h_i|} \right) + \\
& + \sqrt{z(h_f - z)} \arccos(1 - 2h_i/h_f),
\end{aligned} \tag{34}$$

где σ_n и σ_i – напряжение в верхней границе трещины и напряжение в i -ом слое, соответственно, h_i – расстояние от нижней границы трещины до верхней границы i -ого слоя, h – высота трещины (Рисунок 4), $\widetilde{E}'$ вводится как средневзвешенное по всем слоям, которые вскрывает трещина, т.е.

$$\widetilde{E}' = \frac{1}{h_f} \int_{h_f} E'(z) dz. \tag{35}$$

Здесь p_{cp} – давление на заданной высоте h_{cp} (например, на уровне кластера перфорации). Интенсивности напряжений на верхней и нижней границах трещины примут вид (Приложение)

$$\begin{aligned}
K_{I\pm} = & p \sqrt{\frac{\pi h_f}{2}} + \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi h_f}} \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \left(\frac{h_f}{2} \arccos \left(\frac{h_f - 2h_i}{h_f} \right) \pm \sqrt{h_i(h_f - h_i)} \right).
\end{aligned} \tag{36}$$

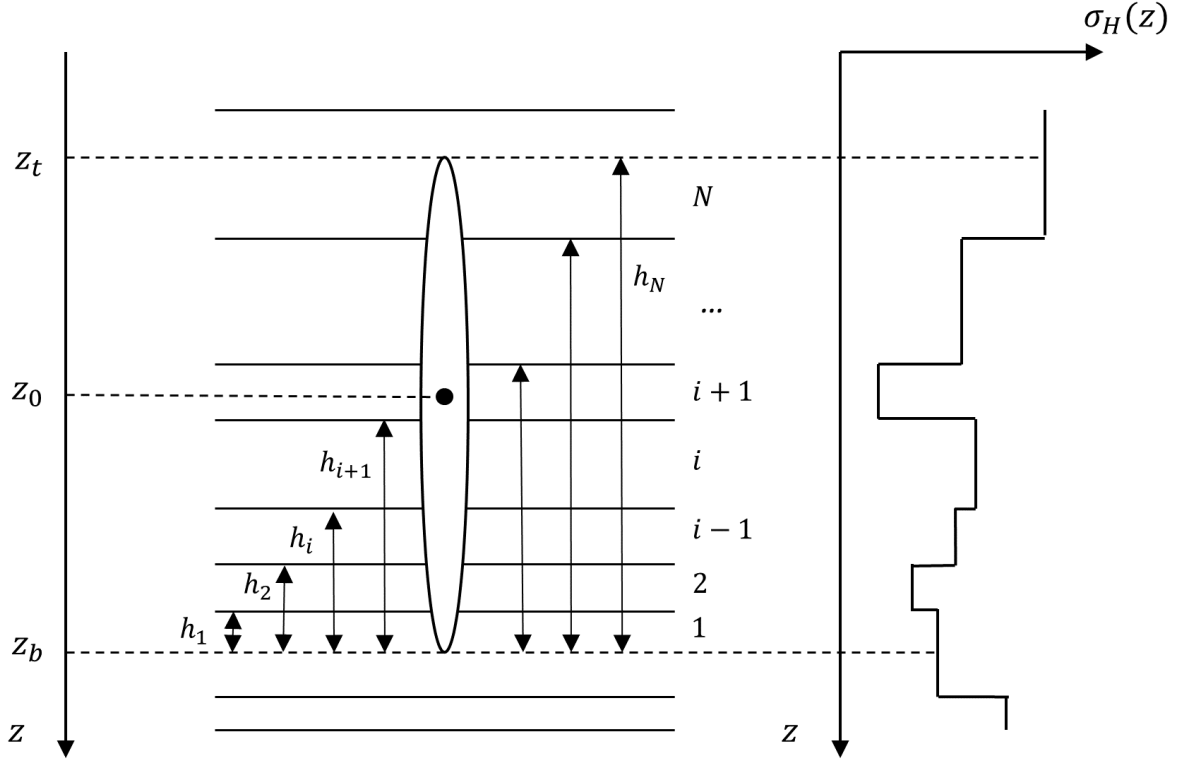


Рисунок 4: Диаграмма напряжений с обозначением используемых переменных

Равновесное положение кончиков трещины z_b , z_t при заданном давлении определяются путем численной минимизации функционала

$$K_{error} = |K_I - K_{IC}|_+ + |K_I - K_{IC}|_-. \quad (37)$$

После того, как найдено равновесное положение трещины, вычисляется раскрытие $w(z)$. Если трещина лежит в целевом слое, профиль ширины раскрытия определяется в рамках модели PKN.

На рисунке ниже представлен результат расчета положений кончиков трещины при различных значениях давления в секторе трещины. Отметим, что с переходом границы между слоями наблюдается разрыв первой производной профилей $z_t(p)$, $z_b(p)$. Также, наблюдается более быстрый прорыв трещины в нижние

слои ввиду более низких значений напряжений в нижних слоях в сравнении с верхними.

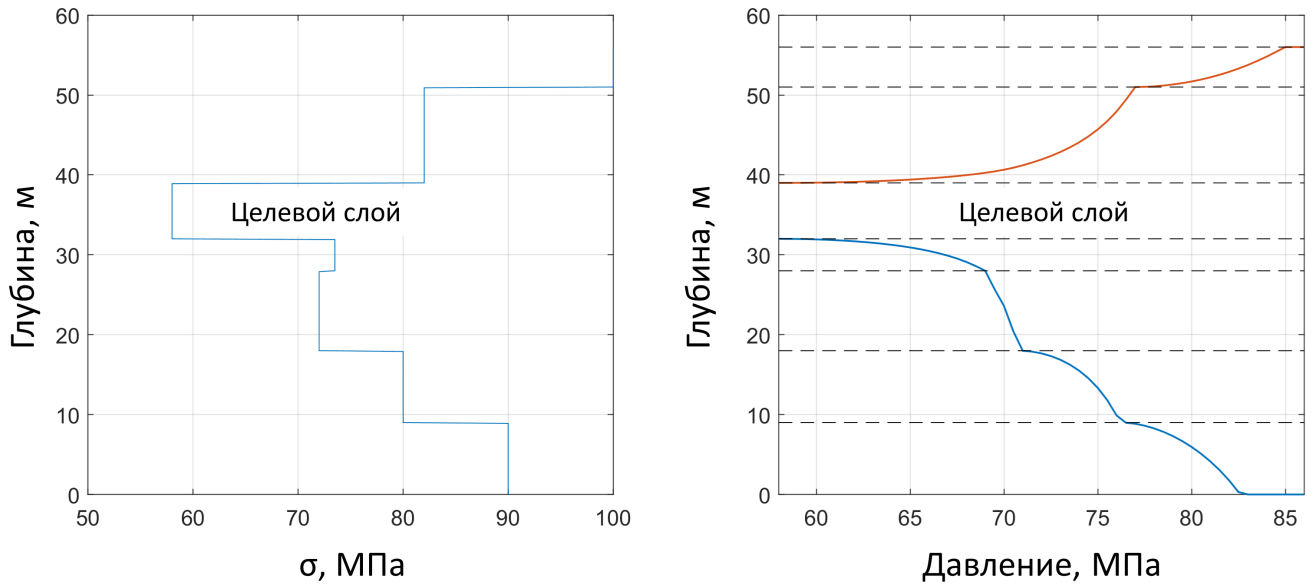


Рисунок 5: Зависимость положения кончиков трещины от значения давления: слева - профиль напряжений, справа - профили кончиков трещины

Для примера ниже представлены графически зависимости КИН на верхнем и нижнем кончиках трещины при заданном значении давления внутри трещины, равном 116 МПа.

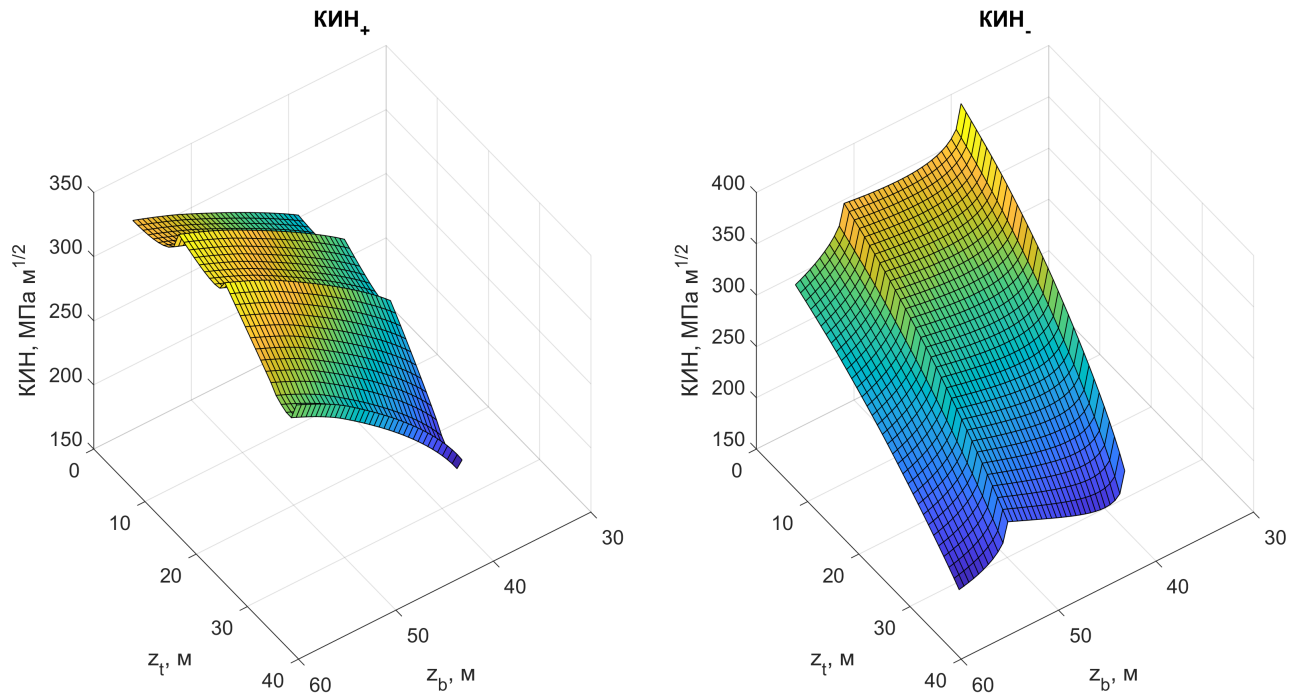


Рисунок 6: Коэффициент интенсивности напряжений при всех возможных положениях кончиков трещины (z_b, z_t) : слева - для верхнего кончика трещины, справа - для нижнего кончика трещины

3 Динамика роста многостадийного ГРП

При рассмотрении задачи роста одиночной трещины ГРП граничные условия (расход смеси, концентрация проппанта) заданы на входе в канал трещины в то время, как на практике контроль расхода жидкости ГРП и концентрации проппанта осуществляется на устье скважины. Соответственно, для корректного планирования дизайна ГРП в процессе численного моделирования задачу массопереноса необходимо решать связанно для системы "скважина-трещина" путем сшивки решений задач массопереноса в скважине и массопереноса в канале трещины, т.е. на забое скважины. Особенно это становится важным, когда рассматривается задача об одновременном росте трещин на нескольких резках внутри одного кластера перфораций в стволе горизонтальной скважины. Протяженность интервала такого кластера может составлять порядка нескольких десятков метров, соответственно, профиль минимальных горизонтальных напряжений и упруго-прочностных свойств для каждого из перфорационных отверстий может отличаться. Как следствие, это может привести к тому, что не все перфорационные отверстия будут активны, что часто подтверждается практикой (многие перфорационные отверстия работают вхолостую, трещина не инициируется).

Одновременно с этим, в процессе переноса рабочей жидкости и проппанта в стволе скважины имеют место потери давления, обусловленные преимущественно вязкостным трением. Таким образом, чтобы определить порядок инициации трещин и распределение расходов по перфорациям, необходимо рассчитывать потери давления в стволе скважины, решив задачу связанно с ростом трещин.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о росте нескольких трещин ГРП. Внутри одной стадии необходимо учесть взаимное влияние трещин с заданными чистыми давлениями. В случае последовательного роста трещин стоит задача определения влияния закрепленных на проппант трещин предыдущих стадий на рост новой одиночной трещины. Решение такой задачи возможно совместным решением следующих задач: моделирование одиночной трещины ГРП, моделирование течения рабочей смеси жидкости и проппанта в стволе скважины. Вдобавок при решении задачи о многостадийном ГРП (МГРП) необходимо рассмотреть вопрос о взаимном влиянии трещин в процессе роста, называемом также эффектом интерференции (stress shadow). Пренебречь интерференцией можно в случае, когда горизонтальные максимальные напряжения существенно превышают минимальные горизонтальные напряжения, что характерно для многих нетрадиционных запасов. [51] Интерференция в процессе роста имеет существенное влияние на форму закрепленной трещины, так как трещина первой стадии при МГРП локально изменяет поле напряжений в своей окрестности, вследствие чего трещины каждой последующей стадии развиваются в измененных геомеханических условиях и могут иметь существенно отличную геометрию (траекторию, размеры). В процессе смыкания трещин последующих стадий эффективная площадь контакта с целевым слоем и проводимость трещины могут существенно отличаться от плановых показателей. Учет эффекта концевой экранировки на этапе проектирования позволит создать сеть трещин, обеспечивающих максимальную область дренирования пласта, и, как следствие, максимизировать приток нефти к скважине.

Таким образом, задачу о многостадийном МГРП можно сформулировать следующим образом. При заданных свойствах пласта, жидкости и частиц проппанта,

а также режиме закачки, задаваемом на устье скважины, необходимо определить динамику трещин ГРП в процессе роста и закрытия.

Задача о переносе смеси жидкости и пропанта в стволе скважины произвольного сечения $A_w(l)$ и произвольного геометрического профиля рассмотрена в нестационарной квазиодномерной постановке за счет усреднения уравнений неразрывности и сохранения момента импульсов по сечению ствола скважины: все величины изменяются только вдоль скважины (вдоль криволинейной координаты l , отсчитываемой от устья до забоя скважины). По заданному расходу рабочей смеси $q_0(t)$ и объемной концентрации твердой фазы $\beta_0(t)$ на устье скважины (месте пересечения скважиной земной поверхности) необходимо определить те же параметры на входе трещин, т.е. граничные условия для трещин $q_i(t)$, $\beta_i(t)$, где индекс i обозначает i -ую трещину (Рисунок 7).

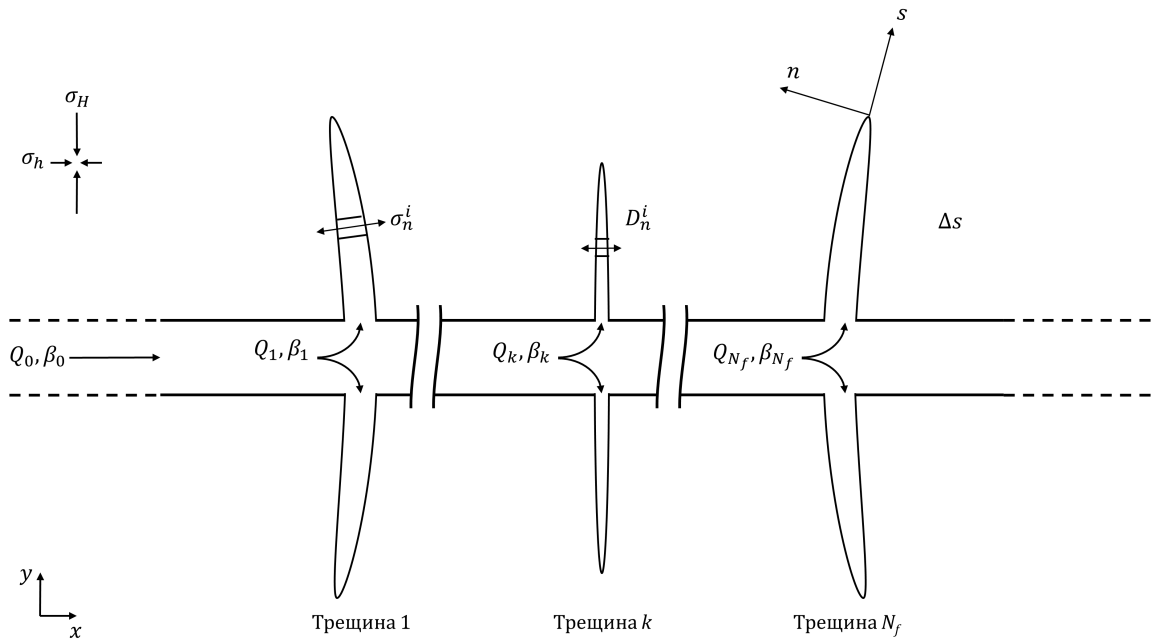


Рисунок 7: Схематичное представление задачи о связанном описании процессов роста нескольких трещин ГРП в стволе скважины

3.2 Упрощающие предположения

К принятым допущениям о задаче одиночной трещины, сделанным в предыдущей главе, в рамках задачи многостадийного ГРП добавляются следующие предположения:

- рассматривается ствол горизонтальной скважины с обсаженным цементированным стволом, проходящий вдоль целевого продуктивного слоя и ориентированного в направлении горизонтальных минимальных напряжений σ_h ;
- предполагается, что жесткость обсадной колонны значительно превышает жесткость породы, тогда внутрискважинное давление не будет влиять на напряженное состояние в окрестности скважины;
- потерей давлений на перфорационных отверстиях пренебрегается;
- внутренняя поверхность скважины идеально гладкая, отсутствует шероховатость;
- течение жидкости рассматривается слабо сжимаемой, деформацией обсадной колонны пренебрегается;
- рост трещины рассматривается в пласте с нормальным тектоническим режимом ($\sigma_v > \sigma_H > \sigma_h$).

3.3 Определяющие уравнения

Рассмотрим взаимодействие всех расчетных модулей, которые отвечают за следующие процессы: гидравлика ствола скважины, перенос рабочей смеси в канале трещины, равновесный рост трещины в многослойной литологии, интерференция в случае МГРП.

Связь данных расчётных модулей «гидравлика скважина» и «массоперенос в канале трещины» осуществляется при помощи граничных условий на перфорационных отверстиях скважины, т.е. решение общей системы производится не в сопряжённом виде. Так на забое скважины и концах трещин ГРП задаётся граничное условие в виде непроницаемой стенки, а на устье скважины – заданный объёмный расход, давление и концентрация проппанта. Отток флюида из скважины в трещины ГРП моделируется при помощи массовых стоков на перфорациях скважины.

3.3.1 Течение в скважине

Задача рассмотрена в нестационарной квазиодномерной постановке за счет усреднения уравнений неразрывности и момента импульсов по сечению ствола скважины: все величины изменяются только вдоль скважины (вдоль криволинейной координаты l , отсчитываемой от устья до забоя скважины). Сохранение потока для каждой из фаз (f - для жидкости, p - для проппанта) определяется выражением

$$\frac{\partial A_w \alpha \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial A_w \alpha \rho_f v_f}{\partial l} = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial A_w \beta \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial A_w \beta \rho_p v_p}{\partial l} = 0, \quad (39)$$

где для каждой из фаз выполняется условие $(\alpha + \beta = 1)$, ρ_i - плотность v_i - скорость и $A_w = \pi r_w^2$ - площадь сечения ствола скважины.

Решение задачи предлагается рассмотреть для смеси и проппанта. С учетом граничных условий на устье скважины и стоков в перфорационных отверстиях имеем систему уравнений

$$A_w \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial A_w \rho_m v_m}{\partial l} = \delta(l) \rho_m q_{m0}(t) - \sum_i^{N_f} \delta(l - l_i) \rho_m q_{mi}, \quad (40)$$

$$A_w \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial A_w \beta v_p}{\partial l} = \delta(l) \beta_0(t) q_{s0}(t) - \sum_i^{N_f} \delta(l - l_i) \beta_i q_{mi}, \quad (41)$$

где N_f - количество трещин, A_{fi} - площадь сечения i -ой трещины на забое скважины, δ - функция Дирака, q_{s0} и β_0 - объемный расход смеси и концентрация проппанта на устье скважины, соответственно, q_{mi} и β_i - объемный расход смеси и концентрация проппанта на i -ом перфорационном отверстии (для i -ой трещины), соответственно, $\rho_m = (1 - \beta)\rho_f + \beta\rho_p$ - плотность смеси, $v_m = ((1 - \beta)\rho_f v_f + \beta\rho_p v_p) / \rho_m$ - средне взвешенная по плотности скорость смеси.

Твердая фаза рассматривается несжимаемой, несущая фаза - в приближении слабой сжимаемости, т.е.

$$\rho_f \approx \rho_{f0}(1 + c(p - p_0)), \quad (42)$$

где c - коэффициент сжимаемости жидкости.

Линеаризуем уравнение неразрывности для смеси жидкости и пропанта в окрестности точки (ρ_0, p_0) , получим уравнение для давления

$$A_w \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial A_w v_m}{\partial l} + A_w v_m c \frac{\partial p}{\partial l} = \delta(l) q_{m0}(t) - \sum_i^{N_f} \delta(l - l_i) q_{mi}. \quad (43)$$

Деформацией компоновки скважины под действием давления жидкости пренебрегается (площадь сечения A_w вынесена из знака производной по времени).

В приближении быстро устанавливающегося давления имеем выражение для потерь давления в стволе скважины с учетом переменной площади сечения ствола скважины

$$\frac{\partial A_w p}{\partial l} = -2\pi r_w \tau + A_w \rho_s g \cos \phi(l), \quad (44)$$

где $\phi(l)$ - угол инклинометрии скважины в точке l , τ - касательные напряжения, определяемые выражением

$$\tau = \rho_m \frac{f(Re, \epsilon)}{4} \frac{v_s |v_s|}{2}. \quad (45)$$

Число Рейнольдса для течения жидкости со степенной реологией в канале круглого сечения имеет вид [36]

$$Re = \frac{D^n v^{2-n} \rho_f}{8^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n K}. \quad (46)$$

Коэффициент трения f при ламинарном режиме течения ($Re \leq 3250 - 1150n$) определяется выражением $f = 16/Re$, при турбулентном режиме течения имеем трансцендентное выражение на связь коэффициента трения и числа Рейнольдса для жидкости степенной реологии:

$$1/\sqrt{f} = \frac{4}{n^{3/4}} \log(Re f^{1-n/2}) - 0.395n^{-1.2}. \quad (47)$$

Система уравнений снабжается уравнениями на массоперенос и геомеханики каждой i -ой трещины. Система уравнения замыкается интегральными сохранениями потоков смеси и объемной концентрации:

$$q_{m0}(t) = \sum_{i=1}^{N_f} q_{mi}, \quad \beta_0(t) = \sum_{i=1}^{N_f} \beta_i. \quad (48)$$

Граничные условия заданы на устье скважины:

$$q_m(0, t) = q_0(t), \quad \beta(0, t) = \beta_0(t), \quad \forall t > 0. \quad (49)$$

В начальный момент времени скважина заполнена буферной жидкостью с нулевой концентрацией проппанта, давление определяется гидростатикой:

$$v_m(l, t = 0) = 0, \quad \beta(l, t = 0) = 0, \quad P(l, t = 0) = \rho_f g z(l), \quad \forall l \in [0, L_w]. \quad (50)$$

3.3.2 Взаимное влияние трещин

Одиночная трещина с внутренним заданным чистым давлением p_{net} индуцирует в своей окрестности поле напряжений. Выражение для данного поля имеет аналитическое решение, согласно которому поле напряжений, перпендикулярное к плоскости трещины, линейно зависит от чистого давления в трещине p_{net} , но при этом быстро затухает с удалением от трещины [48]. Эффект интерференции трещины ("Stress shadow") состоит в формировании такого избыточного поля напряжений в окрестности трещины. Новая трещина, расположенная на расстоянии порядка характерных геометрических размеров (высоты, длины), будет расти в поле напряжений, превышающем изначальное пластовое напряжение. Соответственно,

ширина раскрытия новой трещины при том же значении чистого давления будет меньше.

Для моделирования взаимного влияния нескольких трещин ГРП выбран модифицированный (учитывающий конечную высоту трещины) метод разрывных смещений. Данный метод основан на решении задачи о бесконечной плоскости, смещения в которой терпят постоянный по величине разрыв в пределах элементарного отрезка [1]. Физически разрыв смещений можно представить в виде линейной трещины, поверхности которой смещены относительно друг друга на некоторую постоянную величину. Фактически трещина не является линейной, а ее раскрытие не является постоянным вдоль длины. Метод разрывных смещений позволяет заменить непрерывные вдоль трещины разрывы смещений дискретной аппроксимацией, а именно, разбить трещину на N граничных элементов, считая трещину в пределах каждого элемента прямолинейной, а ее раскрытие – постоянным. Соответственно, данный подход является внедряемым для каждой численной ячейки трещины, т.е. каждая ячейка трещины будет являться локальным источником напряжений.

Ввиду того, что метод граничных элементов базируется на аналитическом решении простых сингулярных задач [19], отсутствует необходимость в поиске оптимального шага численной пространственной сетки [8] (плотность сетки будет определять только качество отображения полей смещений и напряжений).

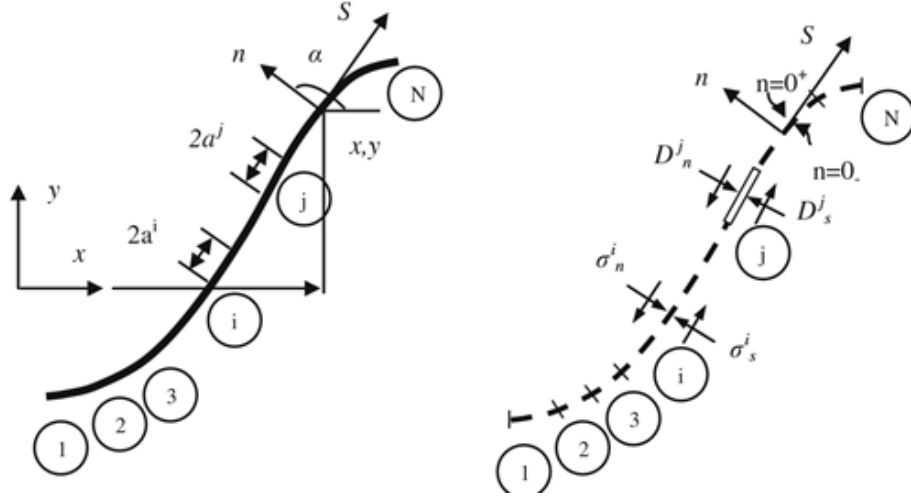


Рисунок 8: Представление геометрии трещины в методе разрывных смещений [19]

Определим локальные продольные и поперечные разрывы смещений (или, соответственно, касательные и нормальные раскрытия берегов трещины) как

$$D_s = u_s(s, 0_-) - u_s(s, 0_+), \quad (51)$$

$$D_n = u_n(n, 0_-) - u_n(n, 0_+), \quad (52)$$

где $u_s(s, 0_-)$, $u_s(s, 0_+)$ - касательные смещения нижнего и верхнего берегов трещины, $u_n(s, 0_-)$, $u_n(s, 0_+)$ - касательные смещения нижнего и верхнего берегов трещины, 0_+ - верхняя поверхность трещины, 0_- - нижняя поверхность трещины.

Предполагаем, что ширина раскрытия трещины равна нормальному разрыву смещений, напряжение сдвига на поверхности трещины отсутствует, т.е. заданы следующие краевые условия

$$w(s) = D_n, \sigma_s = 0. \quad (53)$$

Крауч и Старфилд [19] предложили решение двумерной задачи методом граничных элементов. Данное решение получено в предположении бесконечной высоты трещины (двумерная задача). Модификация метода разрывных смещений,

предложенная Олсоном в работе [38], позволяет вводить поправку на конечную высоту трещин в виде коэффициента

$$A^{ij} = 1 - \frac{d_{ij}^\beta}{(d_{ij}^2 - (h/\alpha)^2)^{\beta/2}}, \quad (54)$$

где d_{ij} - расстояние между i -ым и j -ым элементами, α и β - эмпирические коэффициенты, полученные путем сравнения численного решения и аналитического решения ($\alpha = 1, \beta = 3.3$). Тогда индуцированные напряжения, действующие на элемент трещины в условиях наличия разрывных смещений в расчетной области, выражаются явно:

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A^{ij} C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A^{ij} C_{nn}^{ij} D_n^j, \quad (55)$$

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A^{ij} C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A^{ij} C_{sn}^{ij} D_n^j, \quad (56)$$

где D_s^j и D_n^j - касательная и нормальная компоненты разрывов смещений j -го элемента, а C^{ij} - граничные коэффициенты влияния разрыва смещений j -го элемента на напряжения в i -м элементе.

Таким образом, на каждом временном шаге рассчитывается вклад всех элементарных разрывов смещений на дальнейшее развитие трещин. Приведенное решение не зависит от природы нагрузки в трещине (гидравлическое давление или закрепление на проппант), т.к. величина разрыва смещений определяется только шириной раскрытия трещины и ориентацией каждого граничного элемента. Такой подход позволяет моделировать развитие комплекса трещин как последовательно, так и в рамках одной стадии (одновременно).

Расчитанные значения компонент тензора индуцированных напряжений σ_n , σ_s добавляются аддитивно к пластовым напряжениям. В предположении, что

горизонтальный ствол скважины ориентирован вдоль минимальных пластовых горизонтальных напряжений σ_h (соответственно, перпендикулярно максимальным горизонтальным напряжениям σ_H) имеем

$$\sigma_{xx}^{tot} = \sigma_H + \sigma_{xx}^{tip}, \quad (57)$$

$$\sigma_{yy}^{tot} = \sigma_h + \sigma_{yy}^{tip}, \quad (58)$$

$$\sigma_{xy}^{tot} = \sigma_{xy}^{tip}. \quad (59)$$

В результате угол направления локального максимального стресса напряжений α определяется как

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left| \frac{2\sigma_{xy}^{tot}}{\sigma_{xx}^{tot} - \sigma_{yy}^{tot}} \right|. \quad (60)$$

Направление локального максимального стресса может не совпадать с максимальным пластовым напряжением, в результате чего трещины в процессе своего роста могут менять свою траекторию. Стоит отметить, что данный эффект наблюдается при несущественном значении анизотропии горизонтальных напряжений [32], [16]. В работе принято допущение о том, что рост трещины происходит в направлении, коллинеарном направлению локального максимального напряжения, т.е. под углом α . Данное допущение является верным в случае медленно распространяющейся трещины [52] (в общем случае ориентация трещины определяется модами I и II).

Общее решение для компонент тензора напряжений запишется как

$$\sigma_{xx} = 2GD_x[2f_{xy} + yf_{xyy}] + 2GD_y[f_{yy} + yf_{yyy}], \quad (61)$$

$$\sigma_{yy} = 2GD_x[-yf_{xyy}] + 2GD_y[f_{yy} - yf_{yyy}], \quad (62)$$

$$\sigma_{xy} = 2GD_x[f_{yy} + yf_{yyy}] + 2GD_y[-yf_{xyy}]. \quad (63)$$

Поле смещений, индуцированное трещиной имеет решение

$$u_x = D_{\bar{y}}[-(1 - 2\nu) \cos(\beta)F_2 - 2(1 - \nu) \sin(\beta)F_3 - \bar{y}(\cos(\beta)F_4 + \sin(\beta)F_5)], \quad (64)$$

$$u_y = D_{\bar{y}}[-(1 - 2\nu) \sin(\beta)F_2 + 2(1 - \nu) \cos(\beta)F_3 - \bar{y}(\sin(\beta)F_4 - \cos(\beta)F_5)], \quad (65)$$

одновременно с этим тензор напряжений примет вид

$$\sigma_{xx} = 2GD_{\bar{y}}[-F_5 + \bar{y}(\sin(2\beta)F_6 + \cos(2\beta)F_7)], \quad (66)$$

$$\sigma_{yy} = 2GD_{\bar{y}}[-F_5 - \bar{y}(\sin(2\beta)F_6 + \cos(2\beta)F_7)], \quad (67)$$

$$\sigma_{xy} = 2GD_{\bar{y}}[-\bar{y}(\cos(2\beta)F_6 - \sin(2\beta)F_7)]. \quad (68)$$

3.4 Численный алгоритм

Описание численного решения роста трещин в неоднородном геологическом разрезе приведено в предыдущей главе.

Для численного моделирования массопереноса в стволе скважины построена неявная конечно-разностная аппроксимация уравнений массопереноса. Потоки на гранях аппроксимируются противопотоковой схемой. При этом для дискретизации закона сохранения импульса смеси применяется смещённая расчётная сетка. При такой реализации давление смеси и объёмные концентрации флюидов и твёрдой фазы в виде проппанта определяются в центре расчётной ячейки, в то время как скорость смеси – на её грани.

Связь расчётных модулей, отвечающих за гидравлику ствола скважины и рост трещин, осуществляется при помощи граничных условий на перфорациях скважины (отверстия в колонне скважины, откуда инициируется рост трещин). Отток флюида из скважины в трещины ГРП моделируется при помощи массовых стоков на перфорациях скважины.

В случае роста нескольких трещин на каждом временном шаге рассчитывается вклад всех элементарных разрывов смещений на дальнейшее развитие трещин. Расчитанные значения компонент тензора индуцированных напряжений σ_n , σ_s добавляются аддитивно к пластовым начальным напряжениям.

4 Результаты

В настоящей главе рассмотрены результаты численного моделирования в приложении к прикладным задачам, актуальным в разрезе планирования дизайна ГРП.

4.1 Рост трещины в трехслойной симметричной литологии

Частным случаем Р3Д модели является трехслойная симметричная модель литологии ($K_{IC}^+ = K_{IC}^-$, $\sigma_{min}^+ = \sigma_{min}^- \neq \sigma_N$) с однородным профилем упругих свойств. Подробно данный случай описан в работе [12]. Из предположения о постоянном градиенте давления в вертикальном направлении вытекает, что рост трещины имеет в высоту единственный механизм диссипации энергии, - разрушение породы. Учет вязкостной диссипации энергии в вертикальном слое возможен введением кажущегося коэффициента трещиностойкости, наличие которого обусловлено вертикальным градиентом давления и позволяющем добиться ненулевой скорости кончиков трещины. В таком предположении связь между чистым давлением внутри трещины p_{net} и ее высотой h_f имеет вид

$$p_{net} = \Delta\sigma \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi H}} \frac{K_{IC}}{\Delta\sigma} \sqrt{\frac{H}{h_f}} - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{H}{h_f} \right), \quad (69)$$

где $\Delta\sigma = \sigma_{min}^+ - \sigma_N = \sigma_{min}^- - \sigma_N$ - разница напряжений в целевом слое и слоях перекрывающей породы, H - мощность целевого слоя.

Критическое чистое давление для проникновения трещины за пределы целевого слоя определяется выражением

$$p_{net}^* = K_{IC} \sqrt{\frac{2}{\pi h_f}}. \quad (70)$$

Выражение для профиля ширины раскрытия $w(z)$ в условиях выхода трещины за пределы продуктивного слоя ($h_f > H$) имеет вид

$$w(z) = \frac{2}{E'}(p - \Delta\sigma)\chi + \frac{4\Delta\sigma}{\pi E'} \left(\chi \arcsin \left(\frac{H}{h_f} - z \ln \left| \frac{H\chi + 2z\psi}{H\chi - 2z\psi} \right| + \frac{H}{2} \ln \left| \frac{\chi + \psi}{\chi - \psi} \right| \right) \right), \quad (71)$$

где вспомогательные функции χ и ψ заданы как

$$\chi = \sqrt{h_f^2 - 4z^2}, \psi = \sqrt{h_f^2 - H^2} \quad (72)$$

В случае когда $p_{net} < p_{net}^*$, профиль раскрытия определяется выражением, полученным для модели PKN, т.е. имеет эллиптический профиль раскрытия:

$$w(z) = \frac{2p}{E'} \sqrt{H^2 - 4z^2}. \quad (73)$$

Схематично модель трещины в симметричной трехслойной литологии приведена на рисунке ниже.

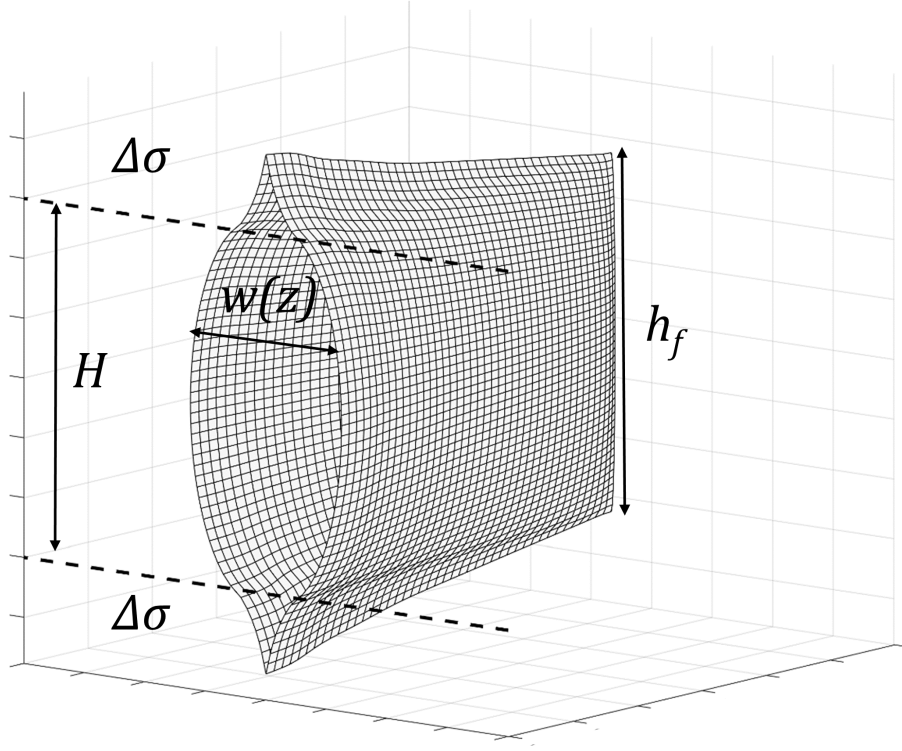


Рисунок 9: Схематичное изображение трехслойной симметричной модели трещины P3D

Решение задачи в рамках симметричной трехслойной модели P3D возможно с введением эффективной величины для профиля раскрытия (усреднение идет по отношению к мощности целевого слоя H , а не высоте трещины h_f)

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{H} \int_{-h_f/2}^{h_f/2} w(x, z) dz \quad (74)$$

$$\bar{w}(x) = \frac{H}{E'} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi H}} K_{IC} \left(\frac{h_f}{H} \right) \right)^{3/2} + \Delta\sigma \sqrt{\left(\frac{h_f}{H} \right)^2 - 1} \quad (75)$$

Тогда уравнение на неразрывность запишется

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + q_l = 0, \quad (76)$$

где усредненный поток задан как

$$\bar{q} = -\frac{1}{H\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-h_f/2}^{h_f/2} w^3 dz. \quad (77)$$

Полученное выражение является трансцендентным уравнением для высоты трещины как функции эффективного раскрытия $h_f(\bar{w})$. В результате, профиль раскрытия w есть функция эффективного раскрытия, т.е. $w = w(\bar{w})$, другими словами знание функции $\bar{w}(x)$ является достаточным для восстановления полного профиля раскрытия. [21] В рамках модели PKN связь между профилем раскрытия и давлением внутри трещин является линейной, в модели РЗД – данная связь является параметрически заданной через высоту трещины h_f , т.е. $p = p(h_f)$, $\bar{w} = \bar{w}(h_f)$.

На рисунке 10 представлен пример расчет роста трещины в трехслойной симметричной литологии.

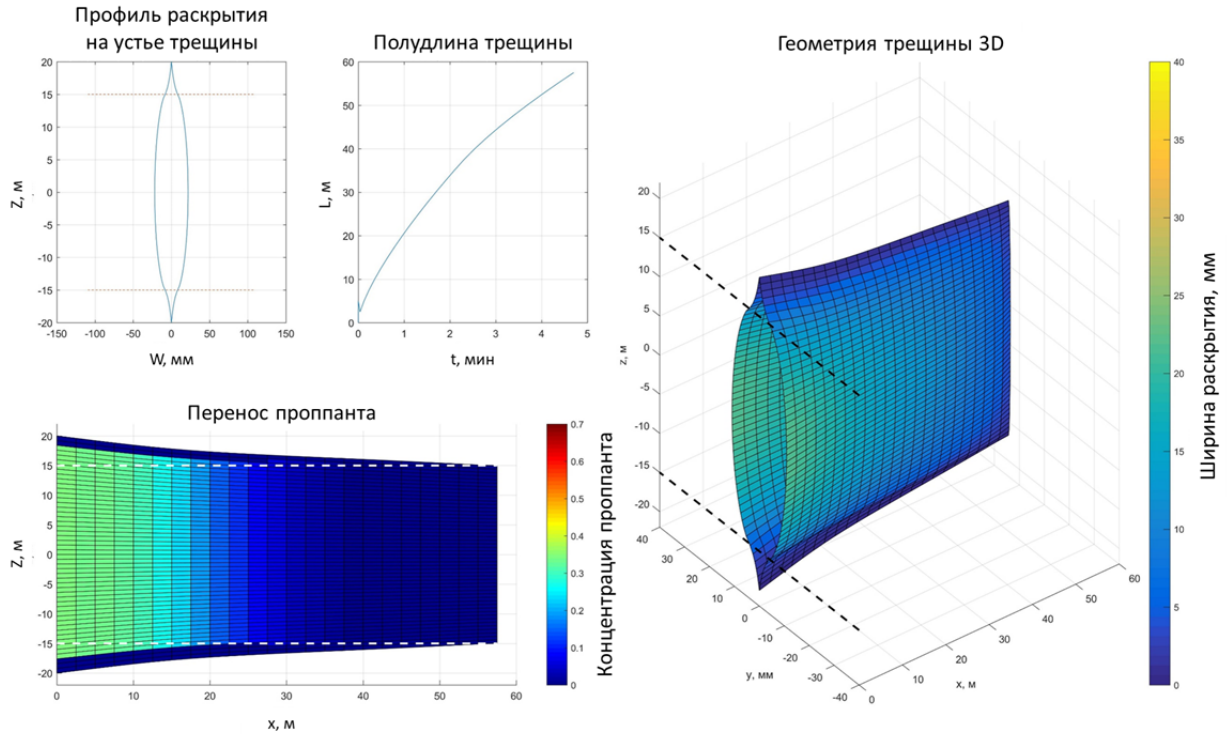


Рисунок 10: P3D модель трещины ГРП в симметричной трехслойной литологии. Рисунок справа — геометрия трещины, нижний левый рисунок — вид сбоку с отображением концентрации проппанта, верхний левый рисунок — профиль раскрытия на входе в трещину, длина трещины в зависимости от времени. Пунктирными линиями отделен целевой пласт.

4.2 Вязкостная диссипация в вертикальном росте трещины

Базовая P3D-модель трещины ГРП завышает значение высоты трещины, так как не учитывает массоперенос смеси жидкости и проппанта в вертикальном росте и, как следствие, вязкостную диссипацию. На практике это может привести к переоценке рисков прорыва водонефтяного или газонефтяного контактов в ствол

скважины, в случае если разработка ведется при наличии водяной подложки или газовой шапки. В настоящем разделе приведен сравнительный анализ результатов, полученных классической моделью РЗД и моделью ЕРЗД, неявно учитывающую вязкостную диссипацию.

Таблица 3: Используемые параметры: режим закачки, свойства пласта

Параметр	Значение
Период закачки T , мин.	10
Расход смеси, $\text{м}^3/\text{мин.}$	3.5
Индекс консистенции K , Па сек. ^{n}	0.05
Показатель неньтоновского поведения n	0.6
Толщина целевого слоя H , м.	10
Модуль Юнга E , ГПа	30
Коэффициент Пуассона ν	0.3
Коэффициент трещиностойкости K_{Ic} , МПа с ^{1/2}	0.5
Коэффициент утечек Картера C_l , м с ^{-1/2}	10^{-15}

На рисунке 11 представлены результаты численного моделирования для обеих моделей. По полученным результатам можно сделать вывод, что пренебрежение вязкостной диссипацией даёт переоценку высоты трещины на 16 %, одновременно с этим длина трещины меньше на 10 %.

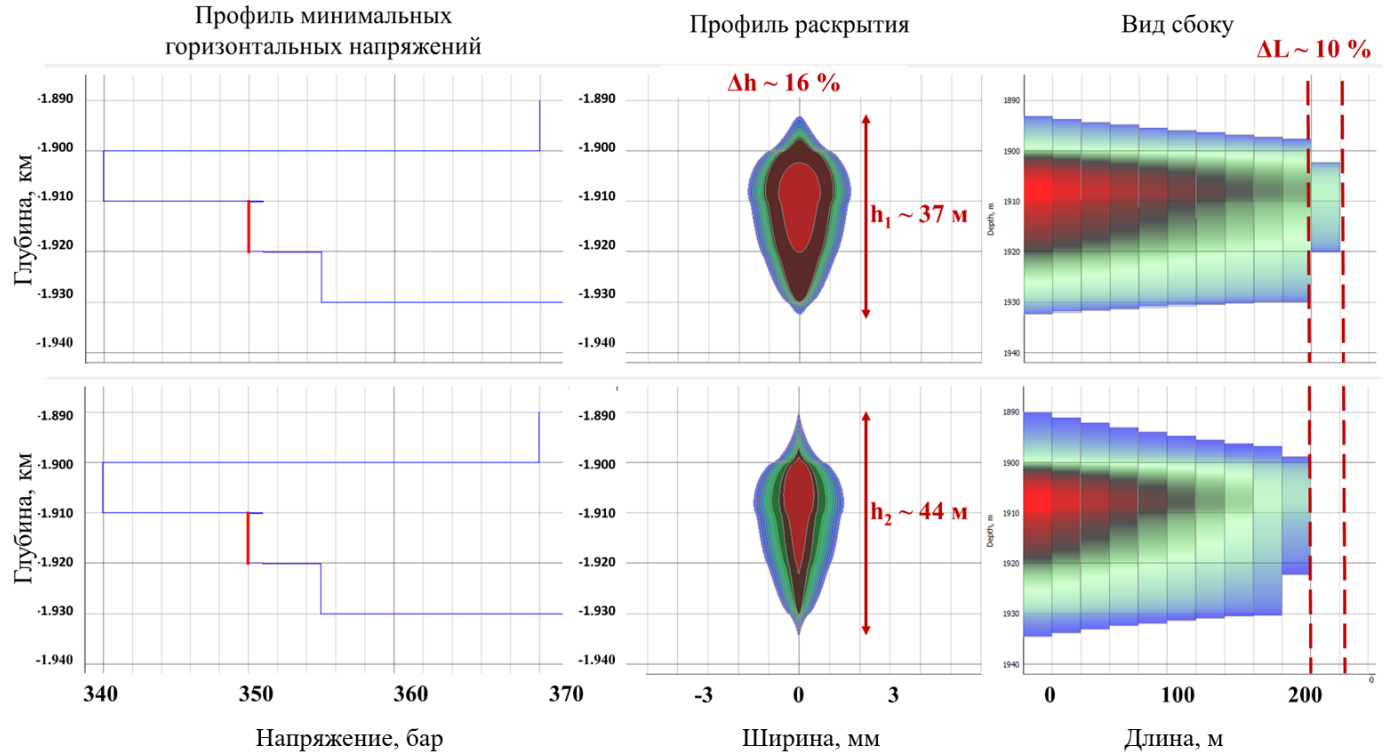


Рисунок 11: Профиль минимальных горизонтальных напряжений, профиль раскрытия трещины, геометрия трещины: сверху - модель EP3D, снизу - модель P3D

4.3 Анализ влияния концевое экранирования на динамику роста трещины

Частным случаем P3D модели является трехслойная симметричная модель литологии ($K_{IC}^+ = K_{IC}^-$, $\sigma_{min}^+ = \sigma_{min}^- \neq \sigma_N$) с однородным профилем упругих свойств. На примере данной модели изучен эффект концевое экранирования, известного также как эффект TSO (TSO — Tip Screen-Out). Суть эффекта заключается в следующем. Проппант переносится в канале, площадь сечения которого уменьшается по мере удаления от забоя скважины, и, как следствие, объемная доля проппанта растёт, что в свою очередь ведет к росту эффективной вязко-

сти смеси и уменьшению потока. Вторым механизмом увеличения объемной доли проппанта в трещине служит фильтрационная утечка рабочей жидкости в пласт. При достижении концентрации критического значения образуется непроницаемая «пробка» на кончике трещины, которая воспрепятствует дальнейшему росту трещины.

«Закупоривание» кончика трещины сопровождается быстрым ростом забойного давления в скважине. TSO используется как технология в тех случаях, когда необходим контроль роста трещины до запланированной длины. При неконтролируемом концевом экранировании давление зачастую возрастает выше допустимых значений, что приводит к невозможности продолжения работы ГРП (возникает риск технологической преждевременной остановки).

Пример численного моделирования эффекта TSO приведен ниже (Рисунок 12). Параметры для проведения численного эксперимента следующие: $T = 34$ мин. — период закачки; $q = 1.2$ м³/мин. — расход смеси; $\beta = 0.2$ — концентрация проппанта; $a = 1$ мм. — диаметр частиц проппанта; $K = 7$ Па сек. ^{n} — индекс консистенции жидкости; $n = 0.1$ — показатель неньютоновского поведения; $H = 30$ м — толщина продуктивного слоя; $E = 10$ ГПа — модуль Юнга; $\nu = 0.2$ — коэффициент Пуассона; $K_{Ic} = 1.5$ МПа с^{1/2} — коэффициент трещиностойкости; $\Delta\sigma = 70$ МПа — контраст минимальных горизонтальных напряжений.

Качественно наблюдаются два эффекта: увеличение объемной доли проппанта по мере прохождения вдоль канала трещины и осаждение за счет сил гравитации (скорость осаждения частиц вычисляется в рамках модели Стокса с учетом влияния объемной концентрации дисперсной фазы на вязкостные свойства смеси). Спустя примерно 30 мин. концентрация проппанта достигает критического значения на кончике трещины, рост в горизонтальном направлении приостанавливается.

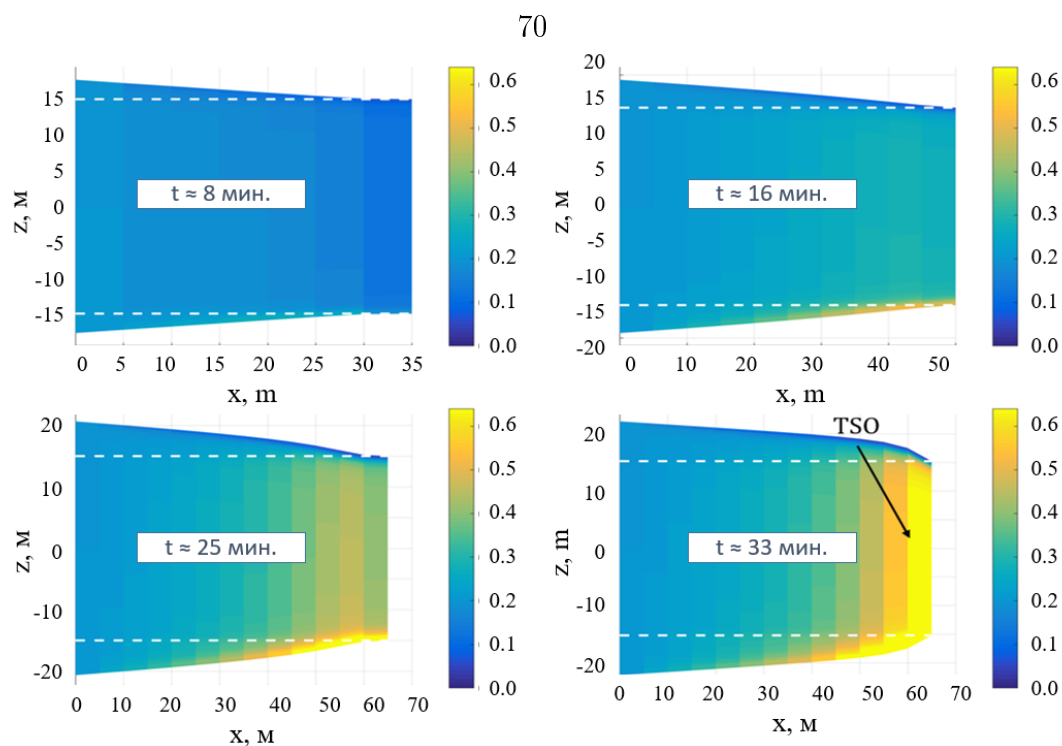


Рисунок 12: Динамика роста трещины (вид сбоку) и переноса пропанта (цветовая карта) в различные моменты времени.

4.4 Рост и смыкание трещины в сложном геологическом разрезе

Приведем результаты расчета роста одиночной трещины для случая более сложного геологического разреза. Используемая в примере литология (Рисунок 13) имеет высокую неоднородность по напряжению, модулю Юнга, коэффициенту Пуассона.

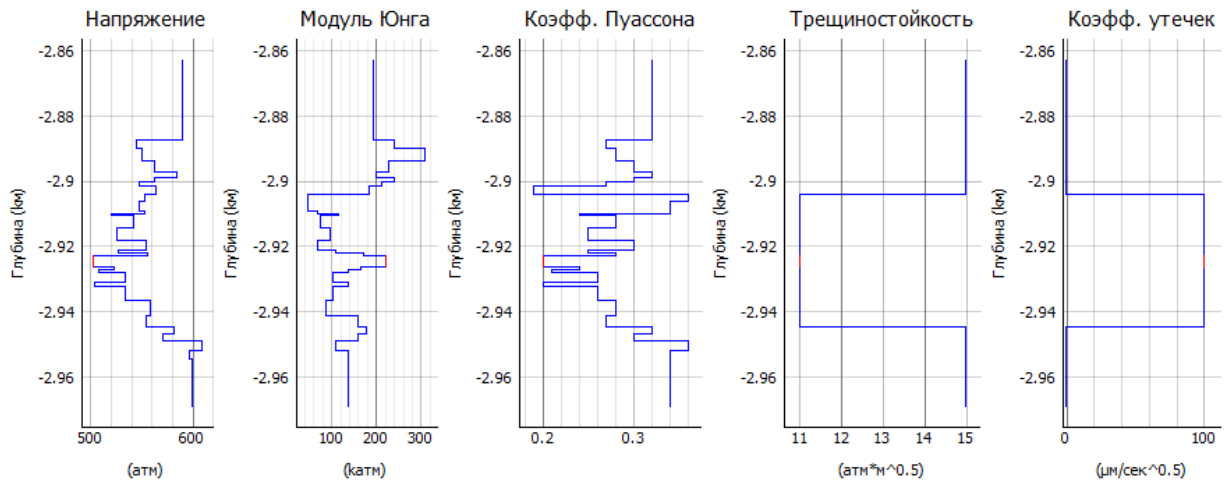


Рисунок 13: Литология, используемая в расчете (красным цветом выделен интервал перфораций – протяженный источник).

Режим закачки, используемый в данном примере, приведен на рисунке 14. Закачиваются гелеобразные жидкости с различной реологией, начиная с момента времени 2.5 мин. происходит ступенчатый набор массовой концентрации пропанта, расход смеси понижен вдвое, до этого момента закачивается подушка (первая стадия закачки жидкости в отсутствии твердой фазы).

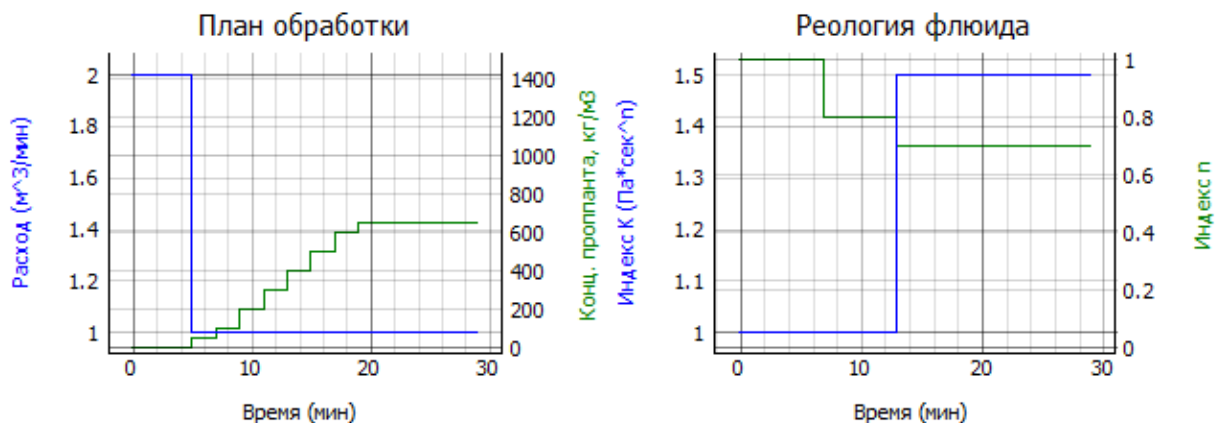


Рисунок 14: Режим закачки: расход смеси и массовая концентрация пропанта – рисунок слева, реологические свойства закачиваемых жидкостей – рисунок справа.

Геометрия трещины в различные моменты времени, а также кривая чистого давления в процессе роста, представлены на рисунке 15.

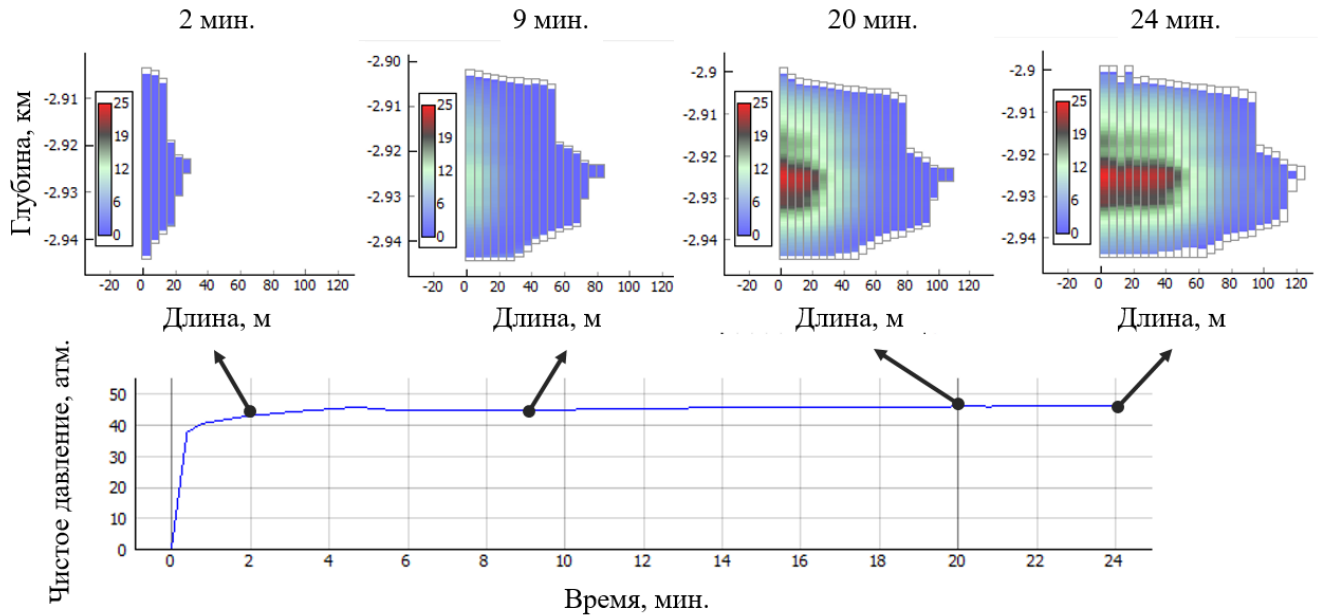


Рисунок 15: Динамика роста трещины (цвет соответствует концентрации проппанта в $\text{кг}/\text{м}^2$) – рисунок сверху, зависимость чистого давления от времени – рисунок снизу. Цветом обозначается массовая концентрация проппанта на единицу площади.

Из рисунка можно наблюдать следующее: чистое давление на устье трещины растет в процессе распространения трещины в пласте, небольшой спад давления на 4.5 мин. обусловлен уменьшением расхода в режиме закачки. Так как чистое давление не превышает 50 атм., трещина зажата в литологическом разрезе между уровнями 2.9 км и 2.945 км в процессе роста, в обратном случае трещина прорывалась бы в новые слои. Начиная с 2.5 мин. в канал трещины закачивается проппант (цвет соответствует массовой концентрации проппанта на единицу площади).

Процесс смыкания трещины может продолжаться на достаточно большом промежутке времени. За это время рабочие жидкости теряют несущую способность, и проппант успевает осесть за счет силы гравитации, в результате чего

профиль раскрытия трещины на момент окончательного смыкания будет неравномерным. Это может привести к тому, что эффективная площадь контакта между проводимой трещиной ГРП и продуктивным слоем будет существенно меньше той, что была на момент остановки закачки, а гидродинамическая связь со скважиной может полностью отсутствовать. Такая особенность наблюдается на рисунке 16, где не закрашенными ячейками отображен профиль трещины на момент остановки закачки (момент начала смыкания). Разница между гидравлической и закрепленной трещинами по площади контакта составляет порядка 40%.

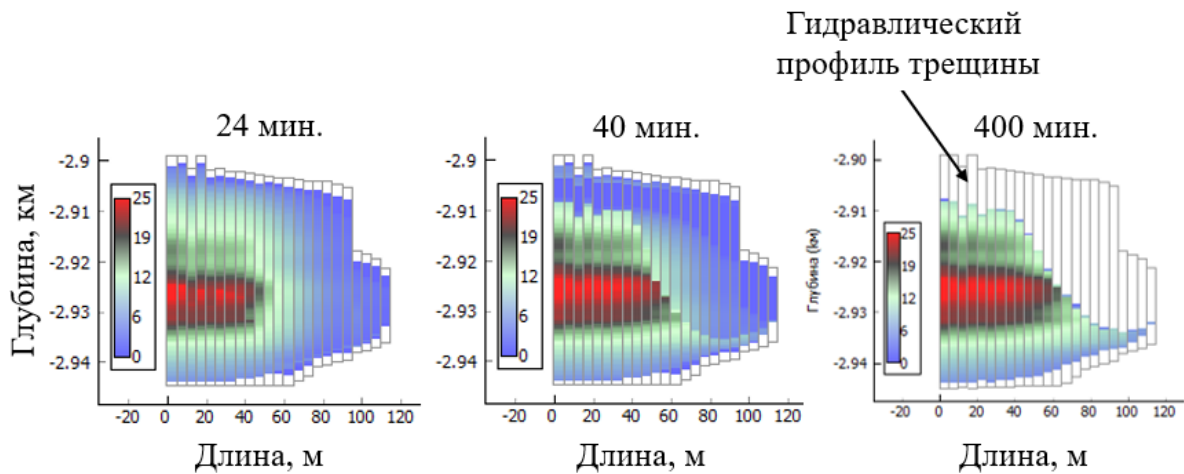


Рисунок 16: Динамика смыкания трещины: рисунок слева – начало закрепления трещины проппантом, рисунок справа – трещина полностью закрепилась. Не закрашенными ячейками изображен профиль трещины на момент начала смыкания. Цветом обозначается массовая концентрация проппанта на единицу площади.

При закреплении трещины существенную роль играет скорость осаждения проппанта под действием силы гравитации в канале v_{set} . Актуальным в рамках задачи осаждения частиц проппанта в канале трещины является вопрос об относительной разнице между временными масштабами осаждений частицы и значением расхода проппанта. В работе [22] предложено безразмерное число G_s , определяемое отношением двух характерных времен за период нагнетания проппанта в

канал трещины Δt

$$G_s = \frac{16\Delta\rho a^2 q Q_0 E'^3 \Delta t}{3\Delta\sigma^4 H^4}, \quad (78)$$

где $\Delta\rho = \rho_p - \rho_f$ - разность плотностей жидкости и проппанта, a - диаметр частиц проппанта.

Так, при $G_s \gg 1$ частицы проппанта успевают осесть (что может привести к образованию плотной упаковки в нижней части трещины и, как следствие, снижению роста трещины в данном направлении), в обратном случае, при $G_s \gg 1$ частицы не успевают осесть за время роста трещины.

Выражение для скорости осаждения сферической частицы в ньютоновской жидкости получено Стоксом

$$v_\infty = \frac{ga^2\Delta\rho}{18\mu_f}. \quad (79)$$

Влияние других частиц, а также конечного размера канала, изучены относительно хорошо для ньютоновских жидкостей, для вязкопластичных жидкостей, в частности, со степенной реологией, уделено меньше внимания. Число Рейнольдса Re для частицы проппанта диаметра d_p в жидкости со степенной реологией имеет вид

$$Re = \frac{\rho_f v^{2-n} a^n}{K}. \quad (80)$$

В ламинарном режиме ($Re < 0.1$) скорость осаждения частицы в жидкости со степенной реологией имеет вид

$$v_\infty = \left(\frac{ga^{n+1}\Delta\rho}{3^{n-1}18K} \right)^{1/n}. \quad (81)$$

4.5 Влияние эффекта интерференции на профиль закрепленной трещины

В настоящем разделе приведены результаты моделирования влияния эффекта интерференции при последовательном росте двух трещин с одинаковым расходом жидкости. В первой стадии трещина растет в невозмущенном поле напряжений, в то время как вторая стадия растет в возмущенном поле напряжений. В результате трещина во второй стадии становится зажатой внутри целевого слоя, не прорывается в обкладывающие слои, но при этом имеет большую длину и ширину раскрытия. В процессе закрепления трещина на первой стадии успевает закрепиться в верхней части в отличие от трещины на второй стадии, где частицы проппанта успевают полностью осесть. В результате, эффективная площадь контакта между трещиной и продуктивным пластом во второй стадии будет существенно ниже. Одним из возможных решений является закачка жидкости для второй стадии с большим значением чистого давления.

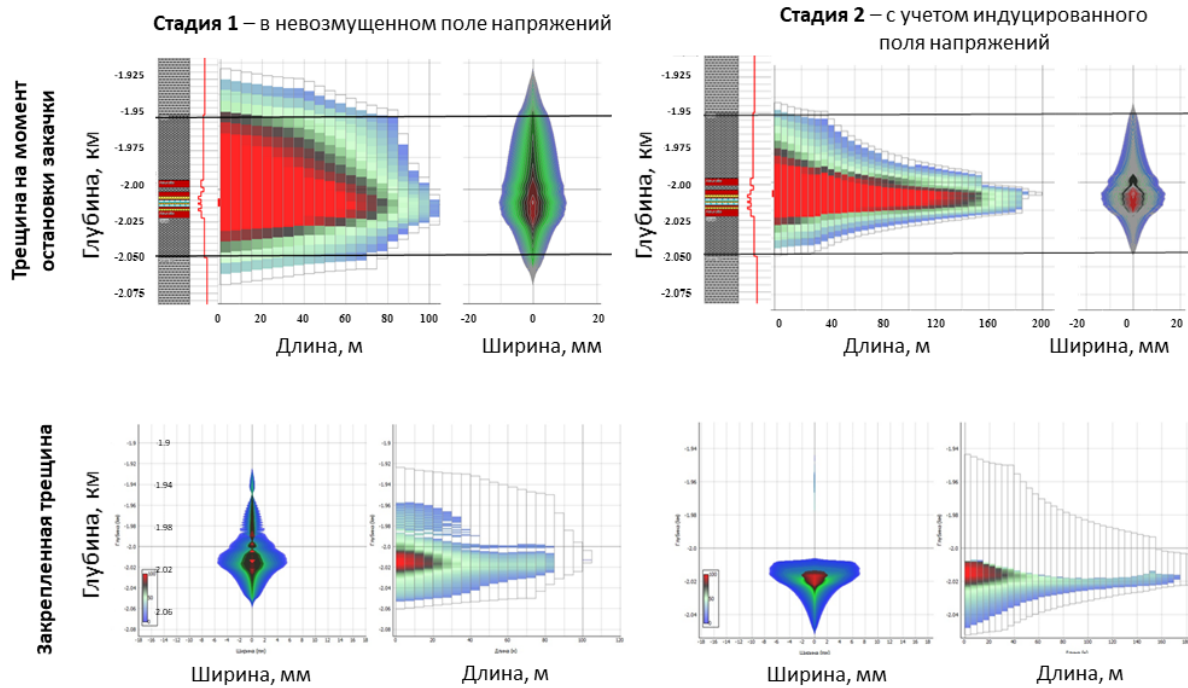


Рисунок 17: Интерференция двух последовательно инициированных трещин при фиксированном объеме закаченной рабочей жидкости: слева — геометрия и профиль раскрытия закрепленной на проппант трещины первой стадии (в невозмущенном поле), справа — геометрия и профиль раскрытия закрепленной на проппант трещины второй стадии в возмущенном поле

5 Заключение

Ниже представлены ключевые результаты работы.

1. В рамках кусочно-заданной псевдотрехмерной модели трещины ГРП представлена физико-математическая формализация и построен численный алгоритм для моделирования многостадийного гидроразрыва пласта в стволе горизонтальной скважины — связанного расчета процессов массопереноса смеси жидкости неньютоновской реологии и проппанта в стволе скважины и каналах трещин ГРП, роста трещин согласно силовому критерию разрушения в неоднородном геологическом разрезе с учетом взаимного влияния друг на друга.
2. Построенное численное решение позволяет в отдельности и в совокупности проводить: анализ влияния эффекта концевого экранирования на профиль закрепленной проппантом трещины, анализ влияния вязкостной диссипации на прорыв в перекрывающие слои в геологическом разрезе, анализ эффекта интерференции на закрепленный профиль трещины и ее траекторию распространения в породе, анализ режимов закачки, свойств несущей и дисперсной фаз на динамику роста трещин.
3. На базе созданного подхода к моделированию МГРП реализован инженерный программный комплекс, позволяющий проводить оценку эффективности применения технологии МГРП в стволе горизонтальной скважины. Реализованный программный комплекс позволяет задавать произвольный режим закачки на устье скважины, различные типы проппанта и жидкости, геомеханический разрез с произвольным количеством слоёв, а также пространствен-

ный профиль скважины с произвольным количеством стадий МГРП и точек инициации трещин в каждой из них.

Полученные результаты диссертации позволяют решать прикладные задачи нефтяного инжиниринга в разрезе ГРП:

1. Учет вязкостной диссипации энергии при вертикальном росте трещины позволяет разрешить проблему завышения рисков прорыва трещины ГРП во внешние слои и, как следствие, определить подходящие условия и обосновать строительство дополнительных скважин на участках пластов, содержащих газовые шапки и подстилающую воду.
2. Учет интерференции трещин позволяет планировать расстояние между кластерами перфораций внутри одной скважины, а также совместно планировать МГРП для нескольких рядом расположенных горизонтальных скважин (технология "zipper frac").
3. Эффект концевой экранирования совместно с подбором режима закачки рабочей смеси жидкости и проппанта, а также реологических свойств несущей фазы позволяет контролировать геометрию трещины и, как следствие, контролировать эффективную площадь контакта трещины ГРП, закрепленной проппантом, и целевого слоя в геологическом разрезе.
4. Зачастую система поддержания постоянного пластового давления заводнением требует подачи расхода воды на нагнетательных скважинах под давлением, неизбежно ведущим к образованию трещин авто-ГРП. В условиях низкой проницаемости коллектора (когда давление в канале трещины стравливается за счет фильтрации закачки жидкости в пласт) имеют место риски достижения трещин авто-ГРП скважин добывающего фонда. Определение условий

формирования трещин авто-ГРП возможно с применением реализованных в работе алгоритмов.

5. Путем переноса рассчитанной системы трещин в гидродинамическую модель месторождения предоставляется возможность в оценке эффективности дизайна МГРП с точки зрения дисконтированной накопленной добычи.

6 Приложение

На рисунке ниже схематично представлено диаграмма напряжений с обозначением используемых переменных в задаче поиска равновесной высоты трещины в неоднородном разрезе напряжений (Рисунок 18).

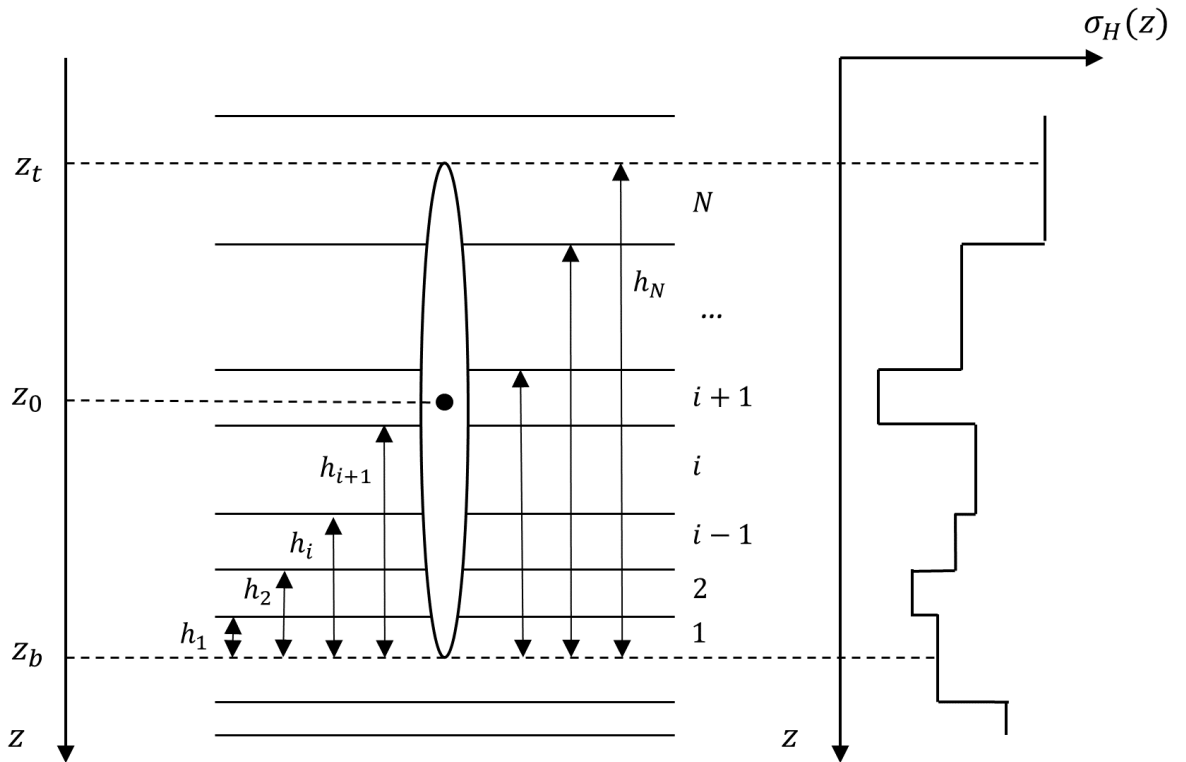


Рисунок 18: Диаграмма напряжений с обозначением используемых переменных в задаче поиска равновесной высоты трещины в неоднородном разрезе напряжений

Вычислим аналитически интеграл для определения коэффициента интенсивности напряжений на кончиках трещины высоты h

$$K_+ = \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \int_{-h/2}^{h/2} (p - \sigma(z)) \sqrt{\frac{h/2 - z}{h/2 + z}} dz$$

для профиля напряжений σ , определенного в виде кусочно-заданной функции.

Интеграл удобно представить в виде двух частей

$$K_+ = pJ_1 - J_2,$$

где J_1 имеет тривиальное решение

$$J_1 = \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} dy = \frac{\pi h_f}{2},$$

а интеграл J_2 удобно представить в виде (с учетом перехода к глобальной системе координат)

$$J_2 = \sum_{i=1}^N \left\{ \sigma_i \int_{z_{bi}}^{z_{ti}} \sqrt{\frac{z - z_t}{z_b - z}} dz \right\} = \sigma_1 F(z_t) - \sigma_N F(z_b) + \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) F(\gamma_i),$$

где i - номер слоя, N - количество вскрываемых трещиной слоев, $\gamma_i = z_{bi} = z_{ti+1}$ - координата границы между i -ым и $i + 1$ -ым слоями, а функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = -\sqrt{(z - z_t)(z_b - z)} - \frac{h_f}{2} \operatorname{arctg} \frac{z_0 - z}{\sqrt{(z - z_t)(z_b - z)}},$$

где $z_0 = (z_t + z_b)/2$ - положение центра трещины.

Заметим, что функция $F(z)$ на кончиках трещины имеет сингулярное поведение во втором слагаемом, соответственно предлагается рассмотреть его в пределе, предварительно приведя к виду

$$F(z = \{z_t, z_b\}) = -\frac{h}{2} \lim_{z \rightarrow z_t, z_b} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{z - z_t}{z_b - z}} + \sqrt{\frac{z_b - z}{z - z_t}} \right).$$

Полученный предел эквивалентен следующему положительно определенному пределу

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \right) = \frac{\pi}{2},$$

тогда верно следующее

$$F(z = \{z_t, z_b\}) = -\frac{\pi h_f}{4}.$$

Преобразуем функцию F к виду

$$F(z) = -\sqrt{h_i(h_f - h_i)} - \frac{h_f}{2} \operatorname{arctg} \frac{h_f - 2h_i}{2\sqrt{h_i(h_f - h_i)}},$$

введя обозначение $x = (h_f - 2h_i)/h_f$ и воспользовавшись тригонометрическим тождеством

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos x,$$

получим

$$F(z) = -\sqrt{h_i(h_f - h_i)} - \frac{h_f}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{h_f - 2h_i}{h_f} \right).$$

Учитывая равенство

$$(\sigma_N - \sigma_1) - \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) = 0,$$

результат интегрирования J_2 примет вид

$$J_2 = - \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \left(\sqrt{h_i(h_f - h_i)} - \frac{h_f}{2} \arccos \frac{h_f - 2h_i}{h_f} \right).$$

В результате всех описанных выше математических выкладок получим итоговое решение для коэффициента интенсивности напряжений

$$K_+ = p \sqrt{\frac{\pi h_f}{2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi h_f}} \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \left(\sqrt{h_i(h_f - h_i)} - \frac{h_f}{2} \arccos \frac{h_f - 2h_i}{h_f} \right).$$

Полученное решение можно проверить путем сравнения с частным случаем, известным выражением КИН для трехслойной симметричной литологии

$$K_{\pm} = \sqrt{\frac{\pi h_f}{2}} \left(p_{net} - \frac{2\Delta\sigma}{\pi} \arccos \frac{h_{pay}}{h_f} \right),$$

где

$$p_{net} = p - \sigma_{payzone}.$$

Список литературы

- [1] Алексеенко, О.П. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва / О.П. Алексеенко. // Сибирский журнал чистой и прикладной математики 11.3, 2011. – С.36-60.
- [2] Астафьев, В. И. Нелинейная механика разрушения/ В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. Самара: изд-во «Самарский ун-т», 2001. – 562 с.
- [3] Байкин, А.Н. Динамика трещины гидроразрыва пласта в неоднородной поропругкой среде/ А.Н. Байкин. // Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2016. – 20 с.
- [4] Бочкарев, А. В. Создание оптимального дизайна многостадийного гидроразрыва пласта с учетом особенностей залежей баженовской свиты / Бочкарев А.В. и др. // Нефтяное хозяйство 3, 2017. – С. 51.
- [5] Буденный, С. А. Моделирование многостадийного гидроразрыва пласта в низкопроницаемых неоднородных коллекторах баженовской свиты / Буденный С.А. и др. // In EAGE/SPE Workshop on Shale Science, 2017. – 36 с.
- [6] Желтов, Ю. П. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта / Ю. П. Желтов, С. А. Христианович // Известия Академии наук СССР. Отд-ние техн. наук. – 1955. – № 5. – С. 3–41.
- [7] Лапин В. Н. Математические модели гидроразрыва пласта. Вычислительные технологии / Лапин В.Н. и др. // Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН. – 2014. –Т. 19. – № 2 – С.33-61.

- [8] Федоров, А. И. Использование геомеханического моделирования для определения давления смыкания трещин гидроразрыва пласта / Федоров А. И, Давлетова А. Р., / Писарев Д. Ю // Нефтяное хозяйство. – 2014. – Т. 11. – С. 51.
- [9] Федоров, А. И. Симулятор напряженного состояния пласта для определения направления развития трещин / А. И. Федоров, А. Р. Давлетова // Геофизические исследования. – 2014. – Т.15. – № 1. – С. 15-26.
- [10] Хасанов, М.М. Подходы к моделированию гидроразрыва пласта и направления их развития / М.М. Хасанов // Нефтяное хозяйство. – 2017. – Т. 10. – 36 с.
- [11] Шель, Е.В. Влияние контраста упругих модулей пород на развитие трещины ГРП в высоту / Е.В. Шель // SPE, 2017. – 65 с.
- [12] Adachi J.I. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers / J.I. Adachi and other // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2010. – № 47(4). – pp. 625-639.
- [13] Adachi J.I. Computer simulation of hydraulic fractures / J.I. Adachi and other // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2007. – № 44(5). – pp. 739-757.
- [14] Barbati A.C. Complex Fluids and Hydraulic Fracturing / A.C. Barbati and others // Annual review of chemical and biomolecular engineering. – 2016. – V. 7. V. – pp. 415-453.

- [15] Bochkarev A.V. Pseudo-3D Hydraulic Fracture Model with Complex Mechanism of Proppant Transport and Tip Screen Out // ECMOR XV-15th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. – 2016. – 64 p.
- [16] Bunger A.P. Parameters affecting the interaction among closely spaced hydraulic fractures / A.P. Bunger and others // SPE Journal 17.01. – 2012. – pp. 292-306.
- [17] Bunger A. P. Early-time solution for a radial hydraulic fracture / A.P. Bunger, E. Detournay // Journal of engineering mechanics. – 2007. – No 133(5). – pp. 534-540.
- [18] Carter R.D. Derivation of the general equation for estimating of extent of the fracturing area // Appendix I of optimum fluid characteristics for fracture extension, drilling and production practice, New-York, USA, American petroleum institute, 1957. – pp. 261-269.
- [19] Crouch, S.L. Boundary element methods in solid mechanics / S.L. Crouch, A.M. Starfield, F.J. Rizzo // Journal of Applied Mechanics. – 1983. – No 50. – 704 p.
- [20] Detournay, E. On the moving boundary conditions for a hydraulic fracture / E. Detournay, A. Peirce // International Journal of Engineering Science. – 2014. – Vol. 84 – pp. 147-155.
- [21] Dontsov, E.V. An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness/ E.V. Dontsov, A.P. Pierce // Engineering fracture mechanics. – 2015. – pp. 116-139.
- [22] Dontsov, E.V. Proppant transport in hydraulic fracturing: crack tip screen-out in KGD and P3D models / E.V. Dontsov, A.P. Peirce. // International journal of solids and structures, 2015. – pp. 206-218.

- [23] Economides, M. J. Reservoir stimulation / M. J. Economides, K. G. Nolte. – 3rd edition. – Chichester: John Wiley And Sons Ltd, 2000. – 856 p.
- [24] Fung, R.L. Calculation of Vertical Fracture Containment in Layered Formations / R.L. Fung, S. Vilayakumar, Donald E. Cormack // SPE, 1987. – 47 p.
- [25] Geertsma, J., de Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures /J. Geertsma, de Klerk F // J. Petrol. Tech. – 1969. – No 12. – pp. 1571–1581.
- [26] Golovin, S.V. Influence of pore pressure to the development of a hydraulic fracture in poroelastic medium / S.V. Golovin, A.N. Baykin // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2016. – Vol. 108. – 65 p.
- [27] Irwin George R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate / George R. Irwin // Journal of applied mechanics. – 1957 – № 24(3). – pp. 361-364.
- [28] Kovalyshen, Y. A reexamintion of the classical PKN model of hydraulic fracture, international journal of solids and structures / Y. Kovalyshen, E. Detournay // Transport in porous media. - 2010. – № 81(2). - pp. 317-339.
- [29] Kuzkin, V.A. Computer Simulation of Effective Viscosity of Fluid-Proppant Mixture Used in Hydraulic Fractruing / V.A. Kuzkin, A.M. Krivtsov, A.M. Linkov // Journal of Mining Science. – 2014. – vol. 50, No. 1. – pp. 1-9.
- [30] Lecampion, B. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag / B. Lecampion, E. Detournay // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007. – No 196(49). – pp. 4863-4880.

- [31] Lecampion, B. Numerical methods for hydraulic fracture propagation: A review of recent trends / B. Lecampion, A. Bunger, X. Zhang // Journal of Natural Gas Science and Engineering. - 2017. – 65 p.
- [32] Lecampion, B. Simultaneous initiation of multiple transverse hydraulic fractures from a horizontal well / B. Lecampion, J. Desroches // American Rock Mechanics Association 14-7110, 2014. – 38 p.
- [33] Lhomme, T. P. Y. Initiation of hydraulic fractures in natural sandstones. 2005. – 87 p.
- [34] Ma Y. Z. Unconventional Oil and Gas Resources Handbook: Evaluation and Development / Y.Z. Ma, S. Holditch // Gulf Professional Publishing. 2015. – 64 p.
- [35] Mark, G. Numerical representation of multilayer hydraulic fracturing / G. Mark, L. Elbel Jacques, Andrew R. Piggott // The 33th US Symposium on Rock Mechanics (USRMS). American Rock Mechanics Association, 1992. – 40 p.
- [36] Metzner, A. B. Flow of non-Newtonian fluids - correlation of the laminar, transition and turbulent-flow regions / A.B. Metzner, J. C. Reed. – AIChE J, 1955. – № 1(4). – pp. 434-40.
- [37] Nordgren, R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture / R.P. Nordgren // SPE J, 1972. – Vol. 12, № 4. – pp. 306–314
- [38] Olson, J.E. Predicting fracture swarms – the influence of sub-critical crack growth and crack tip process zone on joints spacing in rock, in: J.W. Cosgrove, Engelder (Eds.), in: The Initiation, Propagation and Arrest of Joints and Other Fractures / J.E. Olson // L.: Geological Society Special Publications, 2004. – Vol. 231. – pp. 73–87.

- [39] Osipov A. A. Fluid mechanics of hydraulic fracturing: a review / A.A. Osipov // Journal of Petroleum Science and Engineering, 2017. – pp. 513-535.
- [40] Perkins, T.K. Widths of hydraulic fractures / T.K. Perkins, L.R. Kern // J. Petrol. Tech. – 1961. – № 9. – pp. 937–949.
- [41] Reinicke, A. Mechanical and hydraulic aspects of rock-proppant systems: laboratory experiments and modelling approaches, 2009. – 54 p.
- [42] Rice James R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. Fracture: an advanced treatise 2 / James R. Rice // Academic Press, N.Y., 1968. – pp. 191-311
- [43] Simonson, E. R. Containment of massive hydraulic fractures / E.R. Simonson, A.S. Abou-Sayed, R.J. Clifton // Society of Petroleum Engineers Journal, 1978. – № 18(01). – pp. 27-32.
- [44] Sneddon, N. Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity. (The SIAM Series in Applied Mathematics) / N. Sneddon, M. Lowengrub // VIII + 221 S. m. 57 Fig. New York/London/Sydney/Toronto. John Wiley and Sons, Inc. Preis geb. 1969. – 37 p.
- [45] Songxia, Liu. An improve equilibrium-height model for predicting hydraulic fracture height migration in multi-layer formations / Liu Songxia, P. Valko Peter // SPE-173335-MS, 2015. – 49 p.
- [46] Szeri, A.Z. Fluid Film Lubrication / A.Z. Szeri. – Cambridge University Press, 2010. – 45 p.
- [47] Weng, X. Applying complex fracture model and integrated workflow in unconventional reservoirs / X. Weng and others. – Journal of Petroleum Science and Engineering, 124, 2014. – pp. 468-483.

- [48] Warpinski, N.K. Influence of Geological Discontinuities on Hydraulic Fracture Propagation / N.K. Warpinski, L.W. Teufel // JPT, 1987. – pp. 209–220.
- [49] Witherspoon, P. A. Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture / P.A. Witherspoon and others // Water resources research, 1980. – № 16(6). – pp. 1016-1024.
- [50] Wrobel, M. Particle velocity based universal algorithm for numerical simulation of hydraulic fractures / M. Wrobel, G. Mishuris // ArXiv preprint arXiv: 1412.5529, 2014. – 62 p.
- [51] Xu, G. Interaction of multiple non-planar hydraulic fractures in horizontal wells / G. Xu, S. Wong // International petroleum technology conference, 2013. – 65 p.
- [52] Yew, Ching H. Mechanics of hydraulic fracturing / Ching H.Yew, Weng Xiaowei. // Gulf Professional Publishing, 2014. – 23 p.