

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ ГЕОСФЕР
имени академика М. А. САДОВСКОГО
Российской академии наук

На правах рукописи



Гончаров Егор Сергеевич

**Трёхмерные численные модели Шумановского резонанса
для исследования нижней ионосферы**

Специальность 25.00.29 —
«Физика атмосферы и гидросферы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат технических наук
Ляхов Андрей Николаевич

Москва — 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Глобальные модели нижней ионосферы	16
1.1 Эмпирические модели	16
1.1.1 Двухэкспоненциальная модель Уайта-Фергюсона	16
1.1.2 Геофизическая модель IRI	19
1.2 Теоретические модели нижней ионосферы	21
1.2.1 Модели SIC и WACCM	21
1.2.2 Модели D-области ионосферы ИДГ РАН	22
Глава 2. Численные модели расчета ШР	26
2.1 Метод конечных элементов (Finite Element Method — FEM)	26
2.2 Метод конечных разностей во временной области (Finite Difference Time Domain — FDTD)	30
2.2.1 Схема расчета методом FDTD	31
2.2.2 Построение трехмерной сетки в сферической системе координат	39
2.2.3 Определение параметров ШР из расчетов методом FDTD	40
Глава 3. Численное моделирование ШР	45
3.1 Постановка численных расчетов	45
3.2 Тестирование эмпирических моделей нижней ионосферы	46
3.3 Влияние ионной составляющей на параметры распространения КНЧ	50
3.4 Оценка влияния конечной проводимости Земли на параметры ШР	50
3.5 Тестирование теоретических моделей ионосферы	52
3.5.1 Тестирование глобальной модели WACCM	53
3.5.2 Тестирование плазмохимических моделей нижней ионосферы ИДГ РАН	60
Глава 4. Экспериментальные наблюдения параметров Шумановских резонансов	71
4.1 Параметры аппаратуры регистрации КНЧ сигнала ГФО Михнево	72
4.2 Процедура обработки экспериментальных данных в ГФО Михнево	74

4.3	Анализ динамики резонансных характеристик по данным ГФО	
	Михнево	83
4.3.1	Суточные и сезонные вариации ШР	83
4.3.2	Межгодовые вариации ШР	85
4.3.3	Спектральный анализ долгопериодных колебаний параметров ШР	88
4.4	Методика статистического анализа ШР	95
	Заключение	105
	Список сокращений и условных обозначений	107
	Благодарности	108
	Список литературы	109
	Список рисунков	130
	Список таблиц	135
	Приложение А. Метод конечных разностей во временной области (Finite Difference Time Domain)	136
A.1	Формулировка метода FDTD для решения уравнений Максвелла	138
A.1.1	Дискретизация основных уравнений	139
A.2	Формулировка граничных условий	142
A.3	Расчет плотности тока проводимости	157
A.4	Дополнительные материалы	169

Введение

Актуальность темы

Нижняя ионосфера, или так называемый слой **D**, располагается на высотах 40–100 км, охватывая области верхней стратосферы и мезосферы. Главное отличие этой ионосферной области заключается в наличии сложного ионного состава и динамики, полностью определяемой процессами переноса в атмосфере. Ионизация области **D** происходит в дневное время. При невозмущенных условиях в среднеширотной ионосфере электронная концентрация редко превышает 10^3 см^{-3} . Основными источниками ионизации в верхней части области **D** являются Ly_α (121.6 нм) и Ly_β (102.5 нм); в нижележащих слоях — рентгеновское излучение Солнца, жесткое ультрафиолетовое излучение с длиной волны < 80 нм, а также галактические космические лучи. При этом различные источники ионизации преобладают на различных высотах. Плазма нижней ионосферы содержит электроны, положительные и отрицательные ионы, а также кластерные ионы, которые возникают в результате ионизационно-рекомбинационных циклов. Концентрация нейтральных частиц на несколько порядков превышает концентрации ионов, электронов и малых компонент нейтральной атмосферы. Наряду со сложной морфологией нижней ионосферы, проблемой **D**-области оказывается также ее исследование инструментальными методами. Ионозонд позволяет изучать электронный состав начиная с высот ионосферной области **E**. Спутниковые наблюдения ограничены лишь некоторыми малыми нейтральными компонентами, а асиноптическая природа регистрации приводит к проблемам анализа пространственно-временного распределения параметров среды. Радары некогерентного рассеяния расположены в основном в области высоких широт, а их особенности позволяют проводить лишь редкие наблюдения высотного профиля электронной концентрации в нижней ионосфере.

Взаимодействие нижней ионосферы со средней атмосферой приводит к необходимости учета глобальной динамики атмосферы при проведении моделирования ионосферной области **D**. С точки зрения фундаментальных

исследований столкновительной плазмы, нижняя ионосфера представляет большой интерес, являясь природной лабораторией для изучения слабо ионизованной многокомпонентной неоднородной плазмы.

Нижняя ионосфера также является средой распространения КНЧ-ОНЧ-НЧ-ВЧ радиоволн, поэтому основной ее характеристикой, необходимой для рассмотрения радиофизических задач, является отношение электронной концентрации к эффективной частоте соударений электронов с нейтральными частицами, которое сильно варьируется, даже при спокойных гелиогеофизических условиях. Это приводит к возможности использования мониторинга распространения радиоволн для исследования геофизических процессов в верхних геосферах, в частности, в нижней ионосфере. Для этого необходимо использовать источники КНЧ-ОНЧ-НЧ радиоизлучения с известными характеристиками. Одним из вариантов является использование сети станций ОНЧ-НЧ диапазона. Недостатки такого подхода:

- большие энергозатраты, необходимые для непрерывного функционирования передатчика;
- плохо известные параметры излучения (мощность, фаза, режим функционирования) при использовании сторонних передатчиков;
- ограниченный набор радиотрасс.

Более удобным инструментом для мониторинга нижней ионосферы является использование КНЧ радиоволн. Интерес к КНЧ диапазону возник еще в 50-х годах прошлого века. Распространение электромагнитных волн КНЧ диапазона происходит специфическим образом. Благодаря тому, что длина волны соизмерима с радиусом Земли, в КНЧ диапазоне могут наблюдаться глобальные резонансы, когда частота колебаний совпадает с собственной частотой резонатора, образованного сферической полостью между Землей и ионосферой.

Первые предположения о существовании глобальных электромагнитных резонансов были выдвинуты еще Фицджеральдом в 1893 [1], и позднее Николой Тесла в 1905 [2]. Однако широкое изучение феномена глобальных электромагнитных резонансов началось с теоретических работ Шумана [3; 4]. Он представил полость Земля-ионосфера в виде простого полого сферического электромагнитного резонатора с идеально проводящими границами и представил аналитическое решение для расчета резонансных частот:

$$F_n = \frac{c}{2\pi R_e} \sqrt{n(n+1)}, \quad (1)$$

где c — скорость света в вакууме, $R_e = 6370$ км — радиус Земли, n — номер резонанса. В качестве основного источника электромагнитного излучения в КНЧ диапазоне предполагалась глобальная молниевая активность [5]. Вертикальный молниевый разряд рассматривался в виде большой антенны, излучающей электромагнитную энергию в частотном диапазоне ниже 100 кГц [6]. Несмотря на то, что излучение в нижней части спектра (<100 Гц) является незначительным, затухание электромагнитных волн, распространяющихся в волноводе Земля-ионосфера не превышает 0.5 дБ/Мм, что позволяет им распространяться на значительные расстояния и усиливаться на резонансных частотах за счет интерференции.

Именно Шуман предпринял первые попытки измерить характеристики глобальных электромагнитных резонансов [4; 5], которые оказались неудачными. Экспериментальное подтверждение существования так называемых Шумановских резонансов (ШР) было получено позднее в работах [7–9]. При этом наблюдаемые резонансные частоты отличались от теоретически предсказанных аналитической моделью Шумана, что связано с несколькими аспектами. Упрощенная аналитическая модель не учитывает конечную проводимость средней атмосферы, влияние геомагнитного поля Земли, а также зависимость резонансных параметров от расстояния источник-приемник. При этом потери при распространении электромагнитной КНЧ волны в средней атмосфере приводят к уширению резонансных пиков, и наблюдаемые резонансные добротности находятся в диапазоне 4–6, в зависимости от резонансной частоты.

Для моделирования наблюдаемых глобальных резонансов был разработан ряд аналитических подходов, позволяющих учитывать упрощенные модели проводимости нижней ионосферы: двухслойную [10], многослойные [11–13], а также более сложные модели [14–17]. При этом стоит отметить, что несмотря на то, что упрощенные модели ионосферы позволяют достаточно хорошо воспроизвести усредненные параметры ШР, они представляют собой лишь эквивалентную радиоионосферу для КНЧ радиоволн, поэтому не в состоянии описать реально наблюдаемую динамику ШР. За последние годы был разработан ряд двух- и трехмерных численных моделей для расчета параметров ШР, например, на основе метода электропередачи (Transmission Line Modeling) [18], а также метода конечных разностей во временной области (Finite Difference Time Domain) [19]. Такие модели потенциально пригодны для расчетов ШР с учетом сложной трехмерно-неоднородной проводимости ионосферы.

Большой интерес к КНЧ радиодиапазону изначально был обоснован возможностью беспроводной связи на дальние расстояния. Возможность КНЧ радиоволн проникать глубоко под воду делает возможным их использование в качестве инструмента связи с подводными лодками на большой глубине. Опытные установки, работающие в этом диапазоне были созданы в США (например, проект SANGUIN) и в СССР (проект ЗЕВС) на частотах 70–80 Гц. Однако низкая скорость передачи информации, чрезвычайно высокие требования к энергопотреблению, а также конструкционные сложности проектирования передающей антенной системы привели к снижению интереса изучения КНЧ радиосвязи.

Активное изучение КНЧ радиоволн возобновилось в 1990-х, когда в работах [20; 21] была продемонстрирована связь параметров ШР с изменениями климата. На сегодняшний день исследования ШР включают в себя следующие направления:

- исследование распределения глобальной молниевой активности ([22–24] и др.);
- определение параметров ЭМИ мощных молний (англ. Q-bursts) ([25–28] и др.);
- использование наблюдений ШР в качестве климатического «термометра» ([20; 29] и др.);
- связь ШР с сейсмической активностью ([30–32] и др.);
- создание прогностических моделей динамики ШР [33–35];
- исследование морфологии нижней ионосферы Земли при различных геологогеофизических условиях.

В теории ШР до сих пор остается много до конца нерешенных вопросов, таких, как:

- изучение зависимости ШР от положения терминатора [36–38];
- влияние 11-летнего солнечного цикла [39–41];
- влияние солнечных вспышек и мощных протонных событий [42–45];
- механизм проникновения КНЧ радиоволн в верхние атмосферные слои [46];
- влияние мощного космического гамма-излучения [45; 47];
- исследование поглощения КНЧ радиоволн в полярной шапке;
- отклик ШР на антропогенные возмущения нижней ионосферы: высокоэнергетические события, воздействие мощных радиоволн, выброс

химически активных веществ и др. (более подробно об искусственных возмущениях области нижней ионосферы см. [48]).

Большинство нерешенных вопросов связано с наименее затрагиваемой задачей в теории ШР — изучение морфологии и динамики мезосферы и нижней ионосферы (40–100 км) по характеристикам распространения радиоволн КНЧ диапазона. Так как именно область нижней ионосферы определяет параметры распространения радиоволн КНЧ диапазона, то, научившись решать соответствующую некорректную обратную задачу, мы сможем использовать данные наблюдений КНЧ для определения параметров нижней ионосферы. Основной проблемой является необходимость использования эффективной трехмерной численной модели, позволяющей выполнять расчеты ШР с учетом многокомпонентной неоднородной анизотропной ионосферной плазмы. Как уже было отмечено, на сегодняшний день существует ряд численных методов, подходящих для решения такой задачи, однако в большинстве представленных численных расчетов используются только упрощенные модели проводимости средней атмосферы.

Определение ионосферных параметров с использованием данных наблюдений в КНЧ диапазоне имеет ряд преимуществ. Во-первых, источником электромагнитного излучения является природный феномен — глобальная молниевая активность, что делает возможным непрерывные длительные измерения характеристик распространения радиоволн без энергозатрат на обеспечение стабильного излучения. Во-вторых, распространение радиоволны КНЧ диапазона происходит во всем волноводе Земля-ионосфера, поэтому для данного радиодиапазона не применимо понятие радиотрассы, как в случае с ОНЧ-НЧ радиопередатчиками. Это позволяет выполнять регистрацию радиоволн в любой точке земного шара, а также выявлять глобальные ионосферные изменения ионосферы независимо от локального времени в точке наблюдения. Однако, как правило, ионосферные возмущения меньше влияют на параметры ШР, чем вариации глобальной молниевой активности, что приводит к необходимости высокоточных экспериментальных измерений ШР. Одним из подходов к повышению точности измерений является совместный анализ данных ШР, одновременно регистрируемых на различных станциях. Это позволяет исключить локальные помехи измерений КНЧ электромагнитного поля, более точно разделить влияние молниевой активности и модификаций ионосферы и повысить

точность определения КНЧ спектра [49; 50]. Детальный обзор когерентного анализа данных ШР представлен в работе [49].

Вышеизложенные задачи приводят к необходимости использования новейших численных электродинамических моделей для расчета параметров волноводного распространения радиоволн, разработки унифицированной методики для определения экспериментальных резонансных характеристик ШР, а также использование новых методик для анализа КНЧ наблюдений на различных временных масштабах.

Более полно история открытия Шумановских резонансов описана в работе [51]. Большое количество информации по теории ШР, моделированию и экспериментальным наблюдениям представлено в монографиях [49; 52; 53], а также в работе [54].

Цели и задачи работы

Общая цель работ — развитие моделей численного расчета волноводного распространения КНЧ-ОНЧ-НЧ радиоволн в ионосферной плазме, а также методик определения и анализа экспериментальных характеристик КНЧ радиодиапазона применительно к исследованию нижней ионосферы. Для достижения сформулированной цели решались следующие задачи:

1. разработка трехмерных расчетных кодов для численного моделирования параметров ШР, позволяющих учитывать неоднородные анизотропные многокомпонентные модели нижней ионосферы;
2. разработка оптимальных параметров для методики определения характеристик КНЧ радиоволн по данным наблюдения магнитного поля в ГФО Михнево ИДГ РАН и реализация программного модуля для автоматизированного расчета характеристик ШР;
3. применение вероятностного анализа динамики ШР на основе расчета нестационарной плотности вероятности наблюдаемых параметров;
4. проверка некоторых глобальных моделей нижней ионосферы при помощи численного расчета ШР в различных гелиогеофизических условиях

и сравнение с экспериментальными наблюдениями параметров ШР в ГФО Михнево ИДГ РАН.

Научная новизна

- Реализованы и верифицированы два трехмерных численных метода для расчета параметров ШР.
- Предложено использование ШР для тестирования глобальных физических моделей нижней ионосферы.
- Определены оптимальные параметры и алгоритмы обработки первичных данных измерений вариаций геомагнитного поля в диапазоне частот 3–30 Гц для восстановления параметров Шумановских резонансов (собственные частоты, интенсивности, добротности). На основе полученных результатов реализована автоматизированная система расчета и обработки КНЧ спектров по данным регистрации горизонтальных компонент геомагнитного поля в ГФО Михнево.
- Исследована динамика параметров ШР в 2016–2020 годах по данным среднеширотной обсерватории «Михнево» Института Динамики Геосфер им. академика М. А. Садовского. На основе полученных результатов выявлены долгопериодные вариации ШР, отражающие глобальную динамику мезосферы-нижней ионосферы.
- Впервые на основе длительных измерений выполнен одновременный спектральный анализ параметров ШР и амплитуд ОНЧ радиосигналов на радиотрассах разной ориентации, на основе которого определена возможность использования параметров ШР для детектирования сигнатур планетарных волн.

Научная и практическая значимость работы

Разработанный инструментарий для расчета и обработки характеристик КНЧ спектра в ГФО Михнево используется для накопления экспериментальных данных ШР, что в дальнейшем позволит использовать полученные результаты для решения широкого круга различных геофизических задач.

Предложенная методика тестирования теоретических моделей нижней ионосферы на основе сравнения расчетных и наблюдаемых параметров ШР может быть применена для проверки прогностических моделей нижней ионосферы и атмосферы нового поколения.

Реализованные средства численного моделирования распространения ЭМ волн в ионосферной плазме на основе метода FDTD могут быть использованы для широкого радиочастотного диапазона, а также для других задач взаимодействия электромагнитных волн с ионосферной плазмой, например, самосогласованных расчетов воздействия ЭМ излучения на ионосферную плазму (в том числе с учетом нелинейных эффектов).

Методы исследования

Основные методы исследования — создание численных электродинамических моделей, а также средств обработки и анализа КНЧ радиоволн.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Реализован и верифицирован трехмерный конечно-разностный код для расчета распространения ЭМ волн в трехмерно-неоднородной анизотропной многокомпонентной ионосфере Земли.

2. Впервые на основе численных расчетов получено эмпирическое соотношение между изменением собственных частот ШР и интенсивностью солнечной рентгеновской вспышки.
3. Показано, что современные эмпирические и теоретические модели нижней ионосферы не способны воспроизвести наблюдаемые вариации параметров ШР, а также оказываются непригодными для моделирования ШР с учетом распределения глобальной молниевой активности, что требует их дальнейшего совершенствования в части учета ионизации жестким электромагнитным излучением Солнца.
4. Впервые показано, что в экспериментальных спектрах параметров ШР присутствуют периоды, совпадающие с известными периодами планетарных волн в атмосфере Земли. Это делает возможным использование ШР в качестве инструмента мониторинга волновых процессов в мезосфере-нижней ионосфере.
5. Впервые предложено и обосновано применение вероятностного подхода для анализа динамики параметров ШР на различных временных масштабах при помощи расчета нестационарной плотности вероятности.

Апробация работы

Результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

- ”Гелиогеофизические исследования в Арктике” (г. Мурманск, ПГИ, 2016),
- ”Триггерные эффекты в геосистемах” (г. Москва, ИДГ РАН, 2017),
- ”Физика плазмы в солнечной системе” (г. Москва, ИКИ РАН, 2017),
- ”Научно-техническая конференция ВНИИА-2017” (г. Москва, ВНИИА им. Духова, 2017),
- ”Конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу” (г. Звенигород, ИОФ РАН, 2017),
- ”Распространение радиоволн” (г. Казань, КФУ, 2019),
- ”Состояние и перспективы развития современной науки по направлению Информатика и вычислительная техника” (г. Анапа, технополис «ЭРА», 2020),

”Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы” (г. Москва, ИОА СО РАН, 2021),

”Научно-техническая конференция ВНИИА-2022” (Москва, ВНИИА им. Духова, 2022).

Также автор докладывался на семинарах ИДГ РАН (г. Москва).

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 публикациях, индексируемых в Web of Science, Scopus и двух публикациях, индексируемых в РИНЦ:

1. *Goncharov E. S., Lyakhov A. N., Loseva T. V.* 3D-FEM simulation model of the Earth-ionosphere cavity // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2019. Vol. 33, no. 6. P. 734—742
2. *Goncharov E. S., Lyakhov A. N., Losseva T. V.* Seasonal Schumann Resonance variations according to magnetic field measurements at Mikhnevo observatory // 27th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics, Atmospheric Physics. Vol. 11916 / ed. by G. G. Matvienko, O. A. Romanovskii. International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2021. P. 1672—1678
3. Frontiers in the D-region physics / A. N. Lyakhov [et al.] // 25th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics. Vol. 11208 / ed. by O. A. Romanovskii, G. G. Matvienko. SPIE, 2019. P. 1875—1879
4. *Lyakhov A. N., Goncharov E. S., Losseva T. V.* FDTD, FDFD, and mode sum methods for VLF-LF propagation in the lower ionosphere // 26th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics, Atmospheric Physics. Vol. 11560 / ed. by G. G. Matvienko, O. A. Romanovskii. International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2020. P. 1885—1889
5. *Lyakhov A. N., Goncharov E. S., Losseva T. V.* The numerical simulation of ELF-LF propagation in the Earth-ionosphere waveguide under

- WACCM-X results // 27th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics, Atmospheric Physics. Vol. 11916 / ed. by G. G. Matvienko, O. A. Romanovskii. International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2021. P. 1665—1671
6. *Goncharov E. S., Lyakhov A. N., Losseva T. V.* Long-term Schumann resonance dynamics based on horizontal magnetic field data at Mikhnevo observatory during 2016–2020 // *Radio Science*. 2022. Vol. 57, no. 5
 7. *Гончаров Е. С., Ляхов А. Н., Лосева Т. В.* Влияние солнечных вспышек на частоты Шумановского резонанса // *Гелиогеофизические исследования в Арктике. Сборник трудов конференции (Полярный геофизический институт). Кольский научный центр Российской академии наук (Апатиты)*, 2016. С. 15—18
 8. *Гончаров Е. С., Ляхов А. Н., Лосева Т. В.* О возможности верификации моделей нижней ионосферы по наблюдениям Шумановских резонансов // *Динамические процессы в геосферах*. 2017. № 9. С. 124—130

Личный вклад

Автором программно реализованы представленные в диссертации численные модели для расчета распространения КНЧ радиоволн в ионосферной плазме на основе методов FDTD и FEM [55; 58; 61], а также методики обработки и постобработки экспериментальных характеристик КНЧ спектра [56; 60]. Также автором выполнены все численные расчеты и проведен анализ полученных экспериментальных и расчетных результатов. В основных результатах, выносимых на защиту, вклад диссертанта является определяющим.

Объём и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы, списка рисунков, списка

таблиц и приложения. Полный объём диссертации составляет 170 страниц, включая 50 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 210 наименований.

Краткое содержание работы

Диссертация имеет следующую структуру:

В **главе 1** выполнен обзор глобальных моделей нижней ионосферы, используемых для численных расчетов.

В **главе 2** приведено описание двух численных трехмерных моделей для расчета параметров ШР, и представлены результаты их верификации.

В **главе 3** выполнена проверка рассмотренных моделей нижней ионосферы на основе сравнения экспериментальных наблюдений в ГФО Михнево с результатами расчетов ШР по разработанным численным моделям.

В **главе 4** представлены результаты обработки и анализа первичных данных регистрации магнитного поля КНЧ диапазона в ГФО Михнево ИДГ РАН. Определен оптимальный набор параметров алгоритма расчета количественных характеристик ШР для условий ГФО Михнево ИДГ РАН. Выполнен анализ суточных/сезонных/межгодовых вариаций параметров ШР на основе наблюдений в ГФО Михнево за 2016–2020 гг. Для исследования долгопериодных вариаций ШР предложен вероятностный подход и продемонстрирована его эффективность.

Глава 1. Глобальные модели нижней ионосферы

Используемые для расчета параметров ШР упрощенные модели проводимости мезосферы и нижней ионосферы [14—17] позволяют получить хорошую количественную оценку экспериментально наблюдаемым параметрам ШР, однако их недостатки очевидны:

- неучет зависимости параметров ионосферы от солнечного зенитного угла;
- невозможность моделирования динамики ШР на различных временных масштабах, связанная с изменением состояния нижней ионосферы;
- невозможность моделирования ШР в условиях различных ионосферных возмущений;
- применимость только для КНЧ радиодиапазона.

Таким образом использование ШР для мониторинга глобального состояния нижней ионосферы приводит к необходимости применения в численных расчетах физических моделей нижней ионосферы. На данный момент существует большое количество разнонаправленных экспериментальных и теоретических исследований области нижней ионосферы. По типу построения модели нижней ионосферы можно классифицировать на эмпирические и теоретические [63]. В настоящей главе рассматриваются некоторые глобальные модели нижней ионосферы, используемые далее для численного моделирования ШР.

1.1 Эмпирические модели

1.1.1 Двухэкспоненциальная модель Уайта-Фергюсона

Несмотря на радиофизический характер, модель повсеместно используется не только для моделирования распространения ОНЧ-НЧ радиоволн, но

и при расчетах распространения широкополосных ЭМИ [64]. Изначально модель нижней ионосферы (60–100 км) Уайта [65] была разработана на основе результатов ракетных экспериментов для расчета характеристик волноводного распространения ОНЧ–НЧ радиоволн. Модель описывает нижнюю ионосферу в виде электронного газа, и задает выражения для вертикального профиля электронной концентрации N_e [м⁻³] и эффективной частоты соударений электронов с нейтральными частицами ν_e [с⁻¹]:

$$N_e(h) = 1.43 \times 10^{13} e^{-0.15h_p} e^{(\beta-0.15)(h-h_p)}, \quad (1.1)$$

$$\nu_e(h) = 1.816 \times 10^{11} e^{-0.15h}, \quad (1.2)$$

где h — высота [км], h_p — эквивалентная высота отражения радиоволны, β — наклон электронного профиля. Значения параметров h_p и β подбираются согласно гелиофизическим условиям. Оптимальными (h_p, β) для дневного и ночного профилей электронной концентрации являются (72; 0.3) и (87; 0.5) соответственно [65].

На основе многопараметрической аппроксимации для 570 профилей электронной концентрации в работе [66] были предложены эмпирические выражения для параметров h_p и β :

$$\beta = 0.5349 - 0.1658 \cos(\chi) - 0.0854 \cos(X_3) + 0.1296 X_5, \quad (1.3)$$

$$h_p = 74.37 - 8.087 \cos(\chi) - 1.213 \cos(X_3) + 5.779 \cos(\theta) - 0.0044 X_4 - 6.035 X_5, \quad (1.4)$$

где

- χ — солнечный зенитный угол в градусах, функция дня года, широты и мирового времени;
- θ — географическая широта точки расчета;
- $X_3 = 2\pi(M - 0.5)/12$, где M — номер месяца в году;
- X_4 — солнечная активность, заданная числом Вольфа (число солнечных пятен);
- X_5 — эмпирический фактор геомагнитной активности (1 — высокая, 0 — низкая).

Значения косинуса солнечного зенитного угла рассчитываются по известным геодезическим формулам:

$$\cos(\chi) = \sin(\theta) \cdot \sin(\delta) + \cos(\theta) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(HRA) \quad (1.5)$$

$$\delta = 23.45 \cdot \sin \left[\left(\frac{360}{365} \right) (d + 284) \right], \quad (1.6)$$

$$HRA = \left(UT + \frac{\varphi}{15.0} - 12 \right) \cdot 15, \quad (1.7)$$

где δ — склонение Солнца, HRA — часовой угол, UT — мировое время в десятичных часах, φ — географическая долгота в градусах, d — номер дня в году. Параметры β и h_p варьируются в диапазонах (0.15–0.9) и (60–90), соответственно. На рисунке 1.1 приведен пример суточной вариация параметра β .

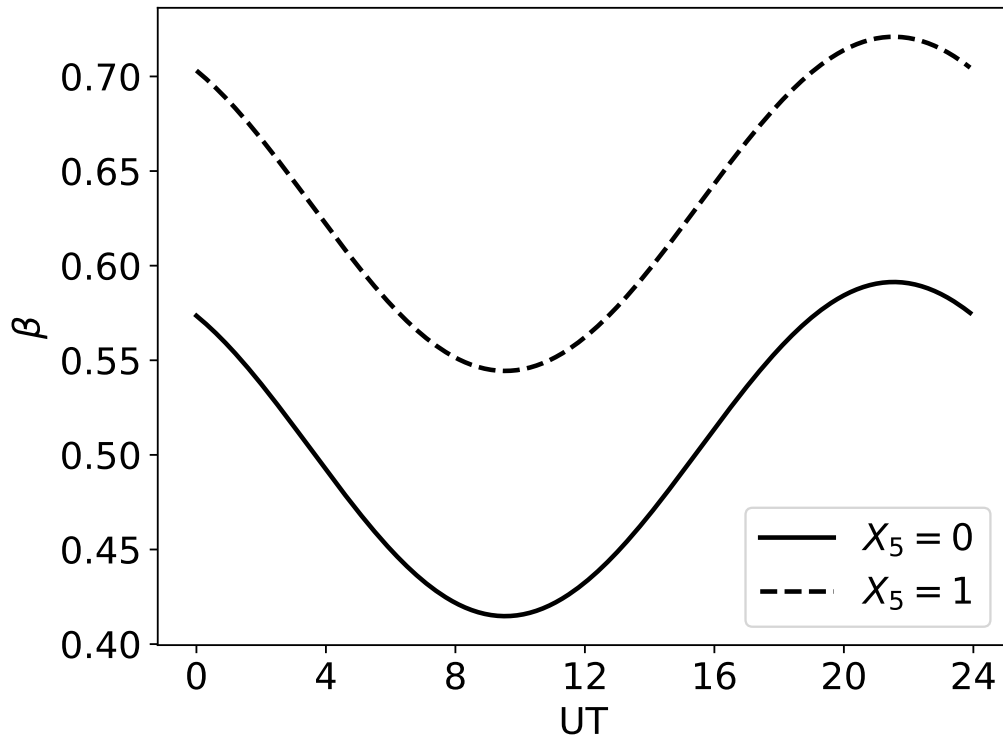


Рисунок 1.1 — Суточная динамика параметра β для точки с координатами 55° с. ш., 37° в. д. для 11 января, в соответствии с (1.3). Сплошная линия — спокойные условия, пунктирная линия — высокая геомагнитная активность.

Точностные показатели данной модели были получены на основе сравнения с регистрацией сигналов ОНЧ–НЧ передатчиков в диапазоне частот 10–60 кГц на радиотрассах протяженностью до 2 500 км [66]. Средняя ошибка составила 6 дБ мкВ/м, максимальная — 18 дБ мкВ/м. Данные показатели

считаются приемлемыми для решения задач прогноза распространения радиоволн в естественной нижней ионосфере для классических ОНЧ радиостанций мегаваттного класса. Однако стоит еще раз подчеркнуть, что вышеприведенная модель Уайта-Фергюсона задает не физическую ионосферу, а эквивалентную радиоионосферу.

1.1.2 Геофизическая модель IRI

Наиболее масштабной на сегодняшний день является геофизическая модель ионосферы «International Reference Ionosphere» (IRI), созданная совместно Комитетом Космических Исследований (COSPAR) и Международным Объединением Радиофизики (URSI) в качестве единого стандарта для расчета параметров ионосферной плазмы. Модель IRI периодически дорабатывается при появлении новых экспериментальных измерений характеристик ионосферы, а также разработке новых методик моделирования. Последней версией модели на текущий момент является IRI-2016, однако стоит отметить, что модуль нижней ионосферы (60–150 км) не изменялся с версии IRI-2007. Ранее, для описания электронной концентрации в области нижней ионосферы IRI предлагала несколько моделей нижней ионосферы, разработанных на основе результатов ракетных экспериментов [67–69]. На данный момент IRI содержит только модель нижней ионосферы «Friedrich International Reference Ionosphere» (FIRI) [69], продемонстрировавшую лучшее согласие с измерениями электронной концентрации радаром некогерентного рассеяния обсерватории Джикамарка (Перу) [70]. Последняя версия полуэмпирической модели нижней ионосферы FIRI представлена в работе [71]. Основная идея модели FIRI заключается в том, что экспериментальные данные используются только для корректировки простой стационарной теоретической модели нижней ионосферы. В качестве исходной взята теоретическая модель из работы [72], использующая в качестве исходных данных температуру и состав нейтральной атмосферы из модели NRLMSIS00 [73], а также экспериментальные измерения концентрации оксида азота (HALOE [74]) и атомарного кислорода (SABER [75]). Корректировка теоретической модели [72] проводится в зависимости от параметров, влияющих на данные электронной концентрации, а

именно: географической широты, сезона, солнечного зенитного угла и индекса солнечной активности. Модель FIRM применима для высот 60–150 км. Однако стоит отметить, что выше 100 км ионосфера достаточно хорошо описана многолетними измерениями ионозондов и радаров некогерентного рассеяния, а приближение стационарности ионосферы выше 120 км оказывается неприменимым. Пример глобального распределения электронной концентрации согласно модели FIRM представлен на рисунке 1.2. Несмотря на глобальный харак-

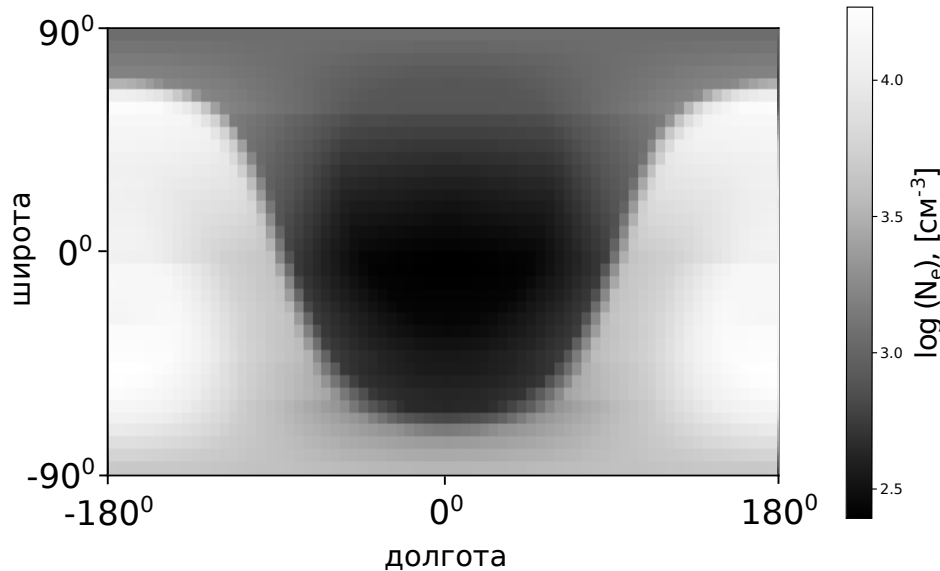


Рисунок 1.2 — Распределение электронной концентрации на высоте 85 км, рассчитанное по модели IRI-2016 для 1 января, 0 UT.

тер модели, она имеет ряд недостатков. Неточность описания электронной концентрации в области мезопаузы является следствием большой ее изменчивости. Из-за небольшого объема экспериментальных данных (327 профилей электронных концентраций) ионосфера предполагается стационарной, а время учитывается косвенно через параметр солнечного зенитного угла. Учет солнечной активности ограничивается только значением индекса $F_{10.7}$ в текущий момент времени, не учитывая его временную предысторию. Кроме того, FIRM является, строго говоря, моделью северного полушария, из-за недостатка экспериментальных данных для южного полушария (23 профиля электронной концентрации). Для расчета электронной концентрации в южном полушарии текущий день года сдвигается на 6 месяцев. Также, модель FIRM не применима для области высоких широт.

1.2 Теоретические модели нижней ионосферы

Отличительная особенность нижней ионосферы — большая номенклатура положительных и отрицательных ионов, а также зависимость ионизационно-рекомбинационных циклов от плохо известных концентраций малых нейтральных составляющих: NO , CO_2 , H_2O , O_3 , OH , NO_x , HO_x и др. Фотохимическое время жизни малых нейтральных компонент на высоте нижней ионосферы зачастую превышает характерные времена динамического переноса, следовательно, аккуратный расчет концентраций этих компонент требует совместного решения уравнений динамической метеорологии с уравнениями химической кинетики. Эта задача на сегодняшний день полностью не решена, а существующие модели требуют проверки на радиофизических экспериментальных наблюдениях. Тем не менее, теоретические модели ионосферы представляют большой интерес с точки зрения моделирования возмущенных ионосферных условий.

1.2.1 Модели SIC и WACCM

Наиболее полной химической моделью нижней ионосферы является модель «Sodankyla Ion and Neutral Chemistry Model» (SIC) [76], разработанная для изучения взаимодействия ионосферы с нейтральной атмосферой. Последняя химическая схема включает в себя 70 видов ионов (41-положительные, 29-отрицательные), а также 34 нейтральных компоненты. Диапазон описываемых моделью высот составляет 20-150 км. Модель позволяет учитывать внешние воздействия на нижнюю ионосферу, такие, как, солнечное излучение (ультрафиолет, мягкий рентген), потоки галактических космических лучей, а также электронные и протонные события. В условиях высыпания энергичных частиц модель SIC хорошо воспроизводит атмосферный состав заряженных и нейтральных компонент [77—81]. Однако из-за высокой вычислительной сложности, SIC используется в основном для нуль-мерных (в точке) или одномерных расчетов динамики концентрации заряженных частиц. Модель «The Whole Atmosphere Community Climate Model» (WACCM) представляет из се-

бя глобальную трехмерную климатическую модель атмосферы, разработанную Национальным Центром Атмосферных Исследований (NCAR). WACCM позволяет рассчитывать параметры атмосферы начиная от поверхности Земли вплоть до термосферы (~ 140 км). В 2016 г модель была значительно модифицирована в части ионной химии нижней ионосферы [82], основываясь на модели SIC. Это позволило воспроизвести эффекты, наблюдаемые во время протонных событий [79]. Однако стоит отметить, что WACCM содержит лишь ограниченный набор ионных составляющих (20 положительных, 21 отрицательных) по сравнению с SIC. Пример глобального распределения электронной концентрации представлен на рисунке 1.3. В настоящей работе используются данные WACCM по следующим заряженным компонентам: e^- , N_2^+ , NO^+ , O^+ , N^+ .

1.2.2 Модели D-области ионосферы ИДГ РАН

В Институте Динамики Геосфер им. ак. М. А. Садовского РАН проводится широкий круг исследований по изучению ионосферы. Среди разработанных моделей ионосферы можно выделить две, основанные на детерминированном подходе. Наиболее масштабной является модель ионосферы, разработанная совместно с ИСЗФ СО РАН и ИДГ РАН в 2008–2015 гг [83]. Блок расчета параметров нижней ионосферы (40–100 км) представляет собой 22-х компонентную плазмохимическую модель (рисунок 1.4), основанную на результатах исследования [84–86]. Дополнительный модуль расчета скоростей ионизации позволяет выполнять явный учет рентгеновского излучения во время солнечных вспышек. Модель прошла проверку на расчетах распространения ОНЧ-НЧ-ВЧ радиоволн. Далее модель обозначается как ИДГ-22К. Более простая модель нижней ионосферы — пятикомпонентная плазмохимическая модель (далее обозначается как ИДГ-5К) [87; 88]. Модель включает следующие сорта частиц:

- заряженные частицы:
 - положительные молекулярные ионы и ионы–связки NO^+ , CX^+ ;
 - отрицательные молекулярные ионы и ионы–связки O_2^- , CX^- ;
 - электроны e ;
- малые нейтральные компоненты H_2O , O_3 , CO_2 ;

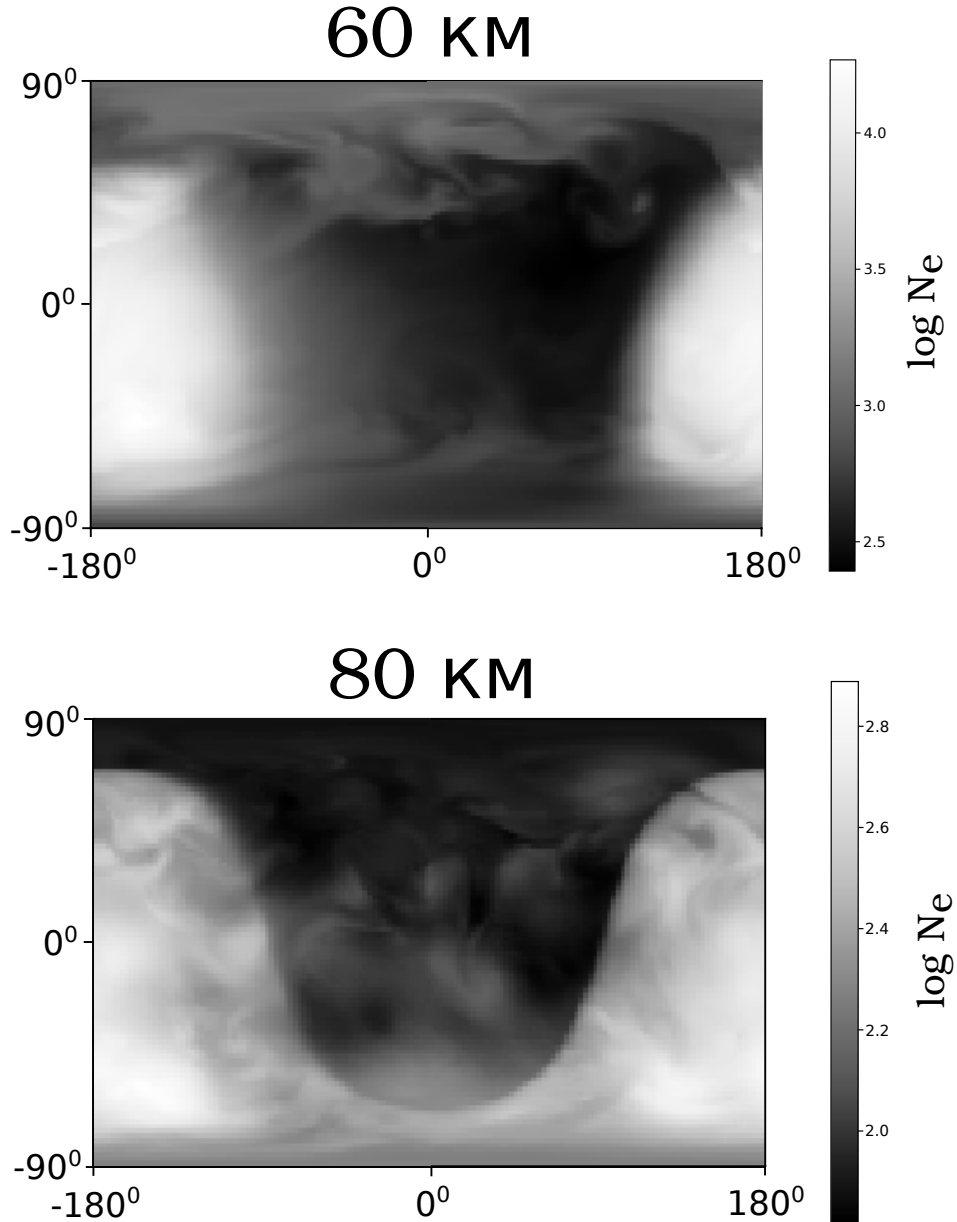


Рисунок 1.3 — Распределение электронной концентрации на высотах 60 и 85 км, рассчитанные по модели WACCM для 5 января 2017 г, 0 UT.

— основные нейтральные компоненты N_2 , O_2 .

Концентрации малых нейтральных компонент задаются независимо по спутниковым данным или эмпирическим моделям, например модели ROSCOE [89]. Источник ионизации рассчитывается независимо, учитывая все известные процессы ионизации жестким излучением Солнца. Исходными параметрами для расчета концентраций электронов, положительных и отрицательных ионов являются концентрации O_2 , N_2 , H_2O , CO_2 , O_3 , NO , $O_2(^1\Delta_g)$. Концентрации NO и $O_2(^1\Delta_g)$ необходимы для расчета высотного профиля скорости ионизации,

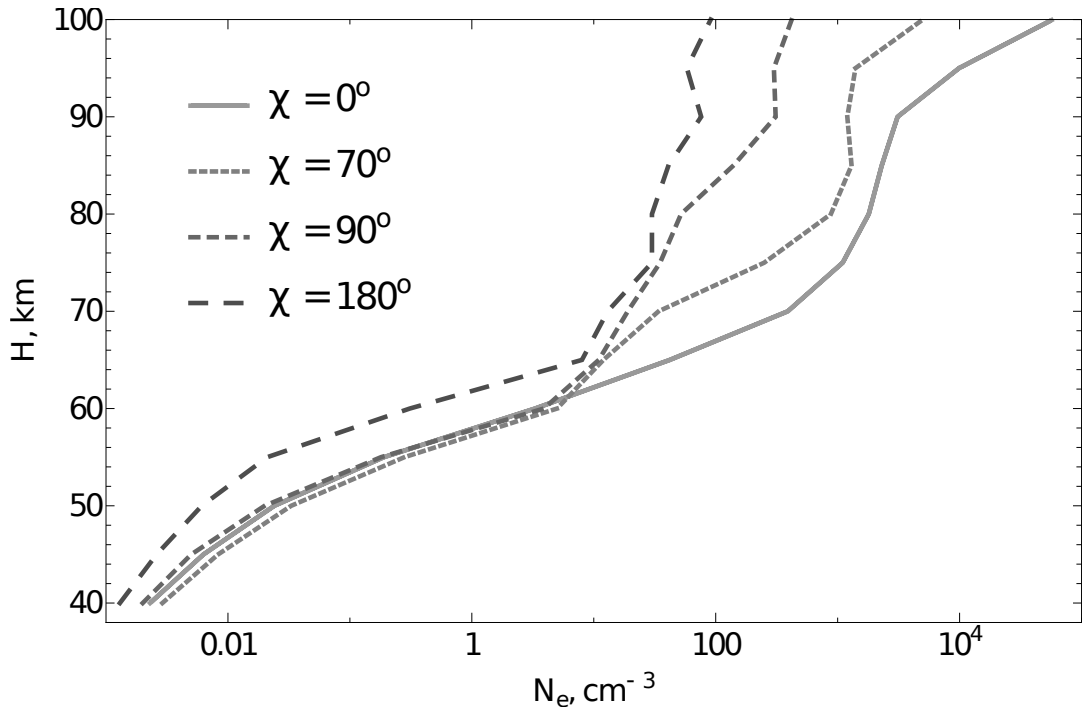


Рисунок 1.4 — Профили электронной концентрации для различных солнечных зенитных углов, рассчитанные по плазмохимической модели ИДГ-22К при спокойных геофизических условиях.

согласно эвристической модели [90]. Проверка модели ИДГ-5К выполнена на основе данных распространения ОНЧ-НЧ радиоволн [91; 92].

Рассмотренные модели ИДГ-22К и ИДГ-5К являются детерминированными. Однако уже давно декларируется необходимость использования статистических методов при решении ионосферных и радиофизических задач [93]. В связи с этим нельзя не отметить еще одну модель разрабатываемую в ИДГ РАН, на основе вероятностно-статистического подхода. Подробное описание модели представлено в работах [88; 94; 95]. Модель показала актуальность вероятностного подхода при проверке на экспериментальных данных распространения ОНЧ-НЧ радиоволн, регистрируемых в ГФО Михнево ИДГ РАН [95]. В настоящей работе для численного моделирования ШР используются только детерминированные модели.

Вывод к главе 1

Для проведения численных расчетов ШР в настоящей главе отобраны некоторые глобальные модели нижней ионосферы, разработанные на различных принципах и применимые для решения прикладных задач. В качестве эмпирических моделей рассматриваются: радиофизическая модель Уайта-Фергюсона (раздел 1.1.1) и геофизическая модель IRI-2016 (раздел 1.1.2). В качестве теоретических моделей рассматриваются: зарубежная динамическая модель WACCM (раздел 1.2.1), а также две отечественные плазмохимические модели, разработанные в ИДГ РАН (раздел 1.2.2).

Глава 2. Численные модели расчета ШР

На сегодняшний день разработан ряд численных методов, используемых для решения задачи распространения КНЧ радиоволн в волноводе Земля-ионосфера. Среди существующих численных моделей для расчета ШР можно выделить два наиболее эффективных подхода: метод линии передачи (Transmission-Line Modeling — TLM) [18; 96], а также метод конечных разностей во временной области (Finite Difference Time Domain — FDTD) [19; 97]. Методы TLM и FDTD используют пространственно-временную дискретизацию и позволяют получить пространственно-временные характеристики распространения электромагнитной волны в волноводе.

В настоящей главе для решения задачи волноводного распространения предложены два отличных от использованных ранее численных трехмерных подхода: код основанный на методе конечных элементов FEM, а также электромагнитный код, основанный на оптимизированном методе конечных разностей во временной области (3D FDTD). Предложенные методы позволяют получать характеристики распространения КНЧ излучения в сильно неоднородной, анизотропной, многокомпонентной ионосфере.

2.1 Метод конечных элементов (Finite Element Method — FEM)

Метод конечных элементов был выбран для трехмерного численного решения задачи расчета собственных частот резонатора Земля-ионосфера. Предполагая гармонический характер электромагнитного поля, из системы уравнений Максвелла можно получить волновое уравнение вида:

$$\nabla \times \mu^{-1} (\nabla \times \vec{E}) + k_0^2 \epsilon_0 \tilde{\epsilon} \vec{E} = 0, \quad (2.1)$$

где $\tilde{\epsilon} = 1 - \frac{i\tilde{\sigma}}{\epsilon_0\omega}$ — обозначает комплексный тензор проницаемости среды. В качестве среды распространения электромагнитной волны выступает нижняя ионосфера. Далее приведем расчет тензора проводимости нижней ионосферы

применительно к КНЧ радиодиапазону. Рассмотрим упрощенную модель движения частицы в электромагнитном поле с учетом столкновений:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0) - m\nu\vec{v}, \quad (2.2)$$

где $-m\nu\vec{v}$ обозначает силу трения, возникающую за счет столкновения с частицами других сортов. В гармоническом приближении, уравнение (2.2) в отсутствие внешнего магнитного поля можно записать в частотной области в виде:

$$i\omega m\vec{v} = q\vec{E} - m\nu\vec{v}. \quad (2.3)$$

Плотность тока при этом оказывается

$$\vec{j} = Nq\vec{v} = -\frac{iNq^2}{m(\omega - i\nu)}\vec{E}, \quad (2.4)$$

откуда получаем выражение для комплексной проводимости

$$\tilde{\sigma} = -\frac{iNq^2}{m(\omega - i\nu)}. \quad (2.5)$$

Следовательно, среда ведет себя как диэлектрик с поглощением. При этом диэлектрическая проницаемость дается выражением:

$$\varepsilon = 1 - \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m(\omega^2 + \nu^2)}, \quad (2.6)$$

а проводимость имеет вид:

$$\sigma = \frac{Nq^2\nu}{m(\omega^2 + \nu^2)}. \quad (2.7)$$

За счет большой концентрации нейтральных частиц в области нижней ионосферы эффективная частота столкновений ν оказывается приближенно равной эффективной частоте столкновений электронов с нейтральными частицами. Остальными типами столкновений можно пренебречь. Для КНЧ диапазона в области нижней ионосферы $\omega \ll \nu$, таким образом, хорошим приближением диэлектрической проницаемости и проводимости в изотропном приближении оказываются $\varepsilon = 1$ и $\sigma = \frac{Nq^2}{m\nu}$.

В общем случае для произвольного направления вектора внешнего магнитного поля $\vec{B}_0$ тензор диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}$ можно также получить из уравнения движения в виде [98]:

$$\sigma_{ij} = -i \frac{Ne^2}{\tilde{\omega}m} \frac{1}{1 - \Omega^2/\tilde{\omega}^2} (\delta_{ij} - \Omega_i\Omega_j/\tilde{\omega}^2 + i\varepsilon_{ijk}\Omega_k/\tilde{\omega}), \quad (2.8)$$

где $\vec{\Omega} = e\vec{B}_0/m$, $\tilde{\omega} = \omega - i\nu$.

Решение задачи на поиск собственных значений волнового уравнения (2.1) реализовано методом конечных элементов (FEM) в программном комплексе COMSOL Multiphysics (модуль «Wave Optics»). Геометрия волновода представляет собой полость, образованную поверхностью Земли $R_{Earth} = 6370$ км и идеально проводящей сферой $R_{ion} = 6470$ км (внешняя проводящая сфера выбрана заведомо выше точки отражения волны, а значит не влияет на параметры волноводного распространения).

Результатом расчета являются комплексные значения собственных частот резонатора $\tilde{f}_n = \delta_n + i\omega_n$, где $F_n = \omega_n/(2\pi)$ — соответствует значению резонансной частоты [Гц], а δ_n пересчитывается к более привычному значению добротности соответствующей резонансной частоты $Q_n = \frac{\omega}{2\delta_n}$.

Необходимость разрешения высотного экспоненциального профиля ионосферной проводимости на расчетной области требует генерации сложной неравномерной сетки (рисунок 2.1). В данном случае используется встроенный генератор сеток программы COMSOL. Элементарная ячейка представляет собой правильную треугольную призму с ребром основания ~ 100 км и высотой ~ 3 км. Оптимальная высота призмы в области нижней ионосферы получена из расчетов сходимости решения с учетом экспоненциальной модели ионосферы Уайта (см. раздел 1.1.1), в которых высота призм варьировалась в пределах 5–2 км. При этом значения собственных частот для сеток с высотой призм 2 км и 3 км различаются менее, чем на 0.05 Гц. Такая расчетная точность является достаточной, так как сравнима с погрешностью экспериментальных наблюдений. Все расчеты выполнялись на 32 ядерном компьютере с 256 Гб оперативной памяти.

Преимущество такой численной модели заключается в независимости полученных резонансных значений от параметров источника, что позволяет выделить только влияние ионосферы на резонансные параметры. Полученное в результате расщепление резонансных частот на $2n + 1$ значений, где n — номер резонансной частоты, соответствует аналитическому решению Шумана [3]. В случае отсутствия ионосферной плазмы, $2n + 1$ собственных значений вырождаются. Возможность расчета всех мод резонансной частоты позволяет использовать настоящую модель для исследования тонкого эффекта расщепления резонансных частот в зависимости от параметров ионосферы.

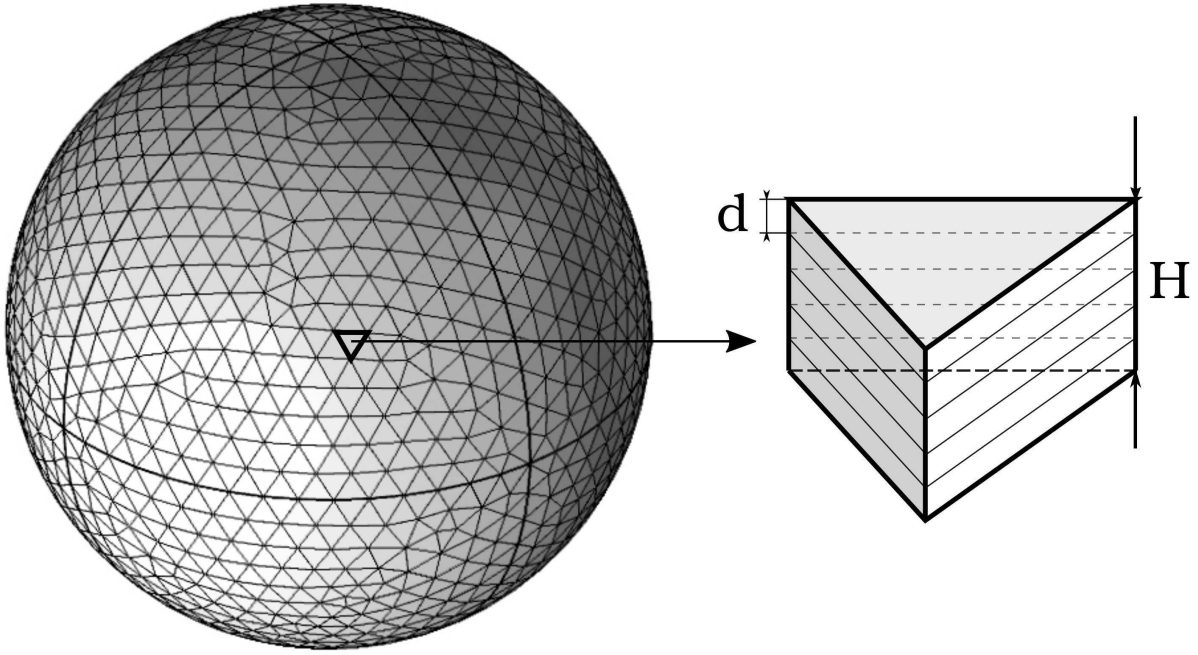


Рисунок 2.1 — Схема расчетной сетки волновода Земля-ионосфера.

Интерпретация расчетных результатов

Как было отмечено в разделе 2.1, результатом численного расчета являются $2n + 1$ собственных значений для каждой резонансной частоты, которые в общем случае имеют различные значения резонансных добротностей. В экспериментальных наблюдениях из-за низкой резонансной добротности расщепление резонансных частот является неразличимым эффектом. Это приводит к необходимости разработки интерпретации расчетных результатов для сравнения с экспериментом. Будем считать, что $2n + 1$ близко расположенных пиков сливаются в один, наблюдаемый на экспериментальных данных. В таком случае «истинные» значения резонансных частот F_{n0} и их добротностей Q_{n0} пересчитываются согласно выражениям:

$$F_{n0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n+1} F_n^i, \quad (2.9)$$

$$Q_{n0} = \frac{F_{n0}}{(F_n^{2n+1} - F_n^1) + \frac{1}{2} \left(\frac{F_n^1}{Q_n^1} + \frac{F_n^{2n+1}}{Q_n^{2n+1}} \right)}, \quad (2.10)$$

где F_n^i и Q_n^i — собственные резонансные значения и их добротности, соответственно для n -ого резонанса.

2.2 Метод конечных разностей во временной области (Finite Difference Time Domain — FDTD)

Метод FDTD показал себя наиболее эффективным для решения задач электродинамики, так как благодаря дискретизации исходных уравнений Максвелла, FDTD содержит минимум приближений и следовательно применим для широкого спектра задач. В последние годы для решения задачи распространения КНЧ-ОНЧ-НЧ радиоволн было реализовано несколько различных вариантов метода FDTD, основанных на различных вариантах сеток, а также методов решения системы дифференциальных уравнений (ДУ) [19; 99—101]. Основными недостатками большинства разработанных моделей для расчета распространения КНЧ является их низкая вычислительная эффективность, а также использование упрощенных моделей ионосферной проводимости, что заведомо исключает их использование для других радиодиапазонов и соответственно для корректного расчета распространения широкополосных ЭМИ.

В настоящей работе представлена оптимизированная трехмерная численная модель расчета распространения КНЧ-ОНЧ-НЧ радиоволн в волноводе Земля-ионосфера на основе метода FDTD в сферической системе координат. В данной главе коротко описана базовая расчетная схема метода FDTD, а также отражены основные особенности, позволившие добиться расчетной эффективности модели для задачи расчета распространения широкого диапазона радиоволн. Расчетный электродинамический код на основе метода FDTD реализован на языке C++. Благодаря тому, что вычисление электромагнитного поля в каждой ячейке требует значений полей только в соседних ячейках, метод FDTD обладает хорошим потенциалом для распараллеливания, поэтому для дополнительного ускорения расчета и повышения масштабируемости задачи при разработке кода использован стандарт реализации параллельных вычислений Message Passing Interface (MPI). Подробное описание метода приведено в приложении.

Применительно к задаче расчета параметров ШР стоит отметить, что метод FDTD не позволяет напрямую получить набор резонансных параметров. С одной стороны это усложняет расчет непосредственно параметров ШР, так как требует достаточно продолжительного расчета распространения КНЧ сигнала

в волноводе (~ 10 с) и дополнительного спектрального анализа. С другой стороны эта особенность делает модель расчета распространения электромагнитного излучения в волноводе Земля-ионосфера более универсальной. При этом расчет характеристик ШР при помощи метода FDTD можно разделить на два этапа:

- расчет распространения широкополосного импульса (молниевое разряда) в волноводе Земля-ионосфера и регистрация временных форм электромагнитного поля в точках приема;
- расчет амплитудного спектра по рассчитанным результатам электромагнитного поля методом модифицированных периодограм [102].

Результаты численных расчетов обрабатываются в точности той же методикой, что и данные экспериментальных наблюдений. Фактически, численное моделирование становится численным экспериментом.

Основным преимуществом разработанной численной электродинамической модели является ее универсальность с точки зрения применимости для широкого диапазона частот. Это позволяет проводить верификацию моделей нижней ионосферы по результатам расчета распространения диапазона радиоволн: КНЧ (расчет Шумановских резонансов), ОНЧ-НЧ (расчет ОНЧ-НЧ радиотрасс).

2.2.1 Схема расчета методом FDTD

Основу метода составляет решение уравнений Максвелла:

$$\nabla_s \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2.11)$$

$$\nabla_s \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_s + \vec{J}_m, \quad (2.12)$$

где $\vec{J}_s$ — плотность тока источника, $\vec{J}_m$ — плотность тока ионосферной проводимости. Подставляя в систему уравнений (2.11, 2.12) численную аппроксимацию первой производной в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F(x + \delta x) - F(x)}{\Delta x}, \quad (2.13)$$

уравнения Максвелла дискретизируются на пространственно-временной сетке в сферической системе координат [103]. Отличительной чертой базового метода

FDTD является расположение компонент электромагнитного поля (так называемая схема Yee [104]) на пространственно-временной сетке. В пространстве компоненты электрического поля (E) расположены на ребрах элементарной расчетной ячейки, а компоненты магнитного поля (H) располагаются на гранях расчетной ячейки (рисунок А.1). При этом по времени расчеты электрического и магнитного полей смещены друг относительно друга на половину продолжительности расчетного шага, что повышает устойчивость численного метода.

Проводимость нижней ионосферы в приближении холодной плазмы определяется концентрациями заряженных и нейтральных компонент, значением вектора геомагнитного поля, а также частотой несущей электромагнитной волны. Пренебрегая дисперсией КНЧ радиодиапазона, а также учитывая незначительное влияние геомагнитного поля на параметры распространения, стандартным подходом при расчете их распространения методом FDTD является приближение нижней ионосферы в виде изотропного диэлектрика. При этом ток ионосферной проводимости записывается в виде [97; 105]:

$$J_m = \sigma(r)\vec{E}, \quad (2.14)$$

где $\sigma(r)$ — высотный профиль проводимости нижней ионосферы, который задается согласно одной из моделей ионосферной проводимости для КНЧ диапазона [15; 40]. На ряду с простотой реализации подобный подход в описании нижней ионосферы оказывается применимым только для КНЧ диапазона, из-за неучета частотной дисперсии и ионосферной анизотропии.

В случае расчета распространения гармонических ОНЧ-НЧ радиоволн, а также молниевых широкополосных импульсов в волноводе Земля-ионосфера, учет ионосферной проводимости реализуется за счет решения дополнительных дифференциальных уравнений (ДУ) для тока проводимости $\vec{J}_m$ заряженных частиц ионосферной плазмы [106—109]:

$$\frac{d\vec{J}_{mk}}{dt} + \frac{q_k}{m_k} \vec{J}_{mk} \times \vec{B}_0 + \nu_k \vec{J}_{mk} = \frac{N_e |q_k|^2}{m} \vec{E}, \quad (2.15)$$

где q_k , m_k , N_k — заряд, масса, концентрация заряженных частиц вида k , соответственно, $\vec{B}_0$ — вектор геомагнитного поля, ν_k — эффективная частота соударений заряженных частиц с нейтралами. При этом полный ток проводимости в уравнении (2.12) вычисляется как $J_m = \sum J_{mk}$. Такой подход

естественным образом описывает ток проводимости многокомпонентной ионосферы широкого диапазона радиоволн с учетом частотной дисперсии, а также анизотропии, вызванной присутствием геомагнитного поля.

В данной работе предложен численный расчет характеристик Шумановских резонансов на основе трехмерного расчета распространения КНЧ радиоволн при помощи оптимизированного метода FDTD. Метод включает помимо уравнений Максвелла (2.11, 2.12) решение дополнительных ДУ (2.15) для электронов и ионных компонент, что позволяет легко включать и проводить верификацию глобальных многокомпонентных моделей нижней ионосферы.

Численное решение дополнительного ДУ вида (2.15) в явном виде было предложено как в изотропном [110], так и анизотропном [108; 109; 111; 112]. При таком подходе ионосферная проводимость делает условие сходимости метода FDTD более строгим в зависимости от максимального значения электронной плазменной частоты в области расчета, что может существенно уменьшить расчетный временной шаг. В работе [109] за счет расположения компонент плотности тока проводимости на пространственно-временной сетке вместе с компонентами электрического поля, было предложено два метода решения ДУ (2.15) в неявном виде, а также выполнена их верификация на примере расчетов распространения ОНЧ радиоволн. Неявные методы решения дополнительных ДУ продемонстрировали ряд преимуществ по сравнению с явными методами за счет независимости расчетного шага по времени от значения электронной плазменной частоты. Это позволило значительно ускорить расчет за счет увеличения шага по времени, особенно при наличии локальных неоднородностей ионосферы. Для расчета распространения КНЧ радиоволн ускорение расчета оказывается большим преимуществом, так как для достижения точности КНЧ спектра 0.1 Гц необходима временная форма сигнала длительностью 10 с.

Как было отмечено ранее ионосферная проводимость для КНЧ радиоволн на разных высотах формируется за счет разных заряженных компонент, при этом для каждой компоненты необходимо решать отдельное уравнение (2.15). Для явных методов расчета тока проводимости при учете многокомпонентности ионосферы вид решения уравнений (2.11, 2.12), а также дополнительных ДУ (2.15) не меняются. В случае использования неявной схемы решения, все составляющие тока проводимости должны вычисляться одновременно, что делает неявные методы, предложенные в работе [109] неприменимыми для многокомпонентной плазмы. Этот недостаток был разрешен в работе [113], в приближении

независимости тока проводимости ионных компонент от геомагнитного поля. Также было продемонстрировано, что только одна из неявных схем оказывается вычислительно выгодной при большом количестве ионных компонент. При этом в изотропном приближении расчет полей $\vec{E}$ и $\vec{J}_k$, где k обозначает электроны и N видов ионов, на шаге $n+1$ принимает вид:

$$\vec{E}^{n+1} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N+1} \Theta_k} \left(\left(1 - \sum_{k=1}^{N+1} \Theta_k\right) \vec{E}^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N+1} (1 + a_k) \vec{J}_k + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \nabla \times \vec{H} \right), \quad (2.16)$$

$$\vec{J}_k^{n+1} = a_k \vec{J}_k^n + b_k \varepsilon_0 \omega_{pk}^2 \frac{E^{n+1} + E^n}{2}, \quad (2.17)$$

$$\theta_k = \frac{b_k \omega_{pk} \Delta t}{4}; \quad a_k = e^{\nu_k \Delta t}; \quad b_k = \frac{1 - e^{\nu_k \Delta t}}{\nu_k},$$

где ω_{pk} и ν_k обозначают плазменную частоту частиц k и эффективную частоту соударений с нейтральной атмосферой, соответственно.

Верификация расчета проводимости анизотропной нижней ионосферы

Верификацию программы для расчета волноводного распространения радиоволн КНЧ-ОНЧ диапазона методом FDTD удобно проводить на сравнении с решением распространения радиоволн ОНЧ диапазона методом нормальных волн согласно модовому приближению [65; 114] средствами модового решателя Long Wave Propagation Capability (LWPC). Ранее, сравнения метода FDTD и метода нормальных волн выполнялись неоднократно [64; 108; 115; 116], при этом была продемонстрирована эффективность метода FDTD для решения задач волноводного распространения радиосигнала. Однако также было показано, что при использовании метода конечных разностей всегда присутствует численная дисперсия, обусловленная использованием аппроксимации производных второго порядка (2.13). Численная дисперсия приводит к отклонению фазовой скорости волны, и как следствие к фазовому сдвигу в зависимости от частоты и расстояния до источника излучения. Однако этот недостаток оказывается не критичным. В работе [115] получено, что при отношении радиочастоты к

линейному размеру ячейки $\lambda/dx > 30$ наблюдаемый сдвиг фаз оказывается незначительным даже на расстояниях более 2×10^3 км. Иначе, в работах [64; 115; 117] предлагается несколько методов для коррекции фазы волны, которые позволяют избавиться от численной дисперсии. Для распространения гармонического сигнала хорошо подходит метод [115], который основан на введении фиктивного коэффициента вертикальной компоненты магнитной проницаемости μ_r . При расчетах распространения ЭМИ более удобными оказываются методы [64; 116], которые основаны на приближении одномерного распространения электромагнитной волны, причем такая коррекция сигнала выполняется уже на стадии постобработки расчетных электромагнитных полей. Такие методы позволяют использовать более грубую расчетную сетку без потери точности конечного решения.

Как было отмечено ранее, в настоящем разработанном электромагнитном коде реализовано различных схем для решения дополнительного уравнения для расчета тока проводимости, одна из которых представляет собой неявную схему. Неявная схема является наиболее предпочтительной для целевых расчетов, так как имеет ряд преимуществ, главное из которых — сокращение времени расчета. В связи с этим, представленные верификационные расчеты ОНЧ трасс сравниваются с «эталонными» расчетами LWPC только для гарантии отсутствия ошибок в численном алгоритме. Основной целью является сравнение результатов, полученных при помощи метода FDTD с разными схемами решения дополнительного уравнения для расчета тока проводимости, которые до этого не приводились в литературе. Схема расчетного волновода представлена на рисунке 2.2. Длина радиотрассы составляет 2000 км, высота волновода 100 км. Верхняя граница волновода считается идеально проводящей ($E_\varphi = E_\theta = H_r = 0$), что однако не влияет на параметры расчета, так как радиоволна ОНЧ диапазона отражается заведомо ниже верхней границы волновода на высотах $\sim 75\text{--}90$ км. Подстилающая поверхность задается импедансными граничными условиями SIBC (приложение А.2). Электрофизические параметры подстилающей поверхности $\epsilon = 8$, $\sigma_e = 0.01$ Ом/м. Вектор геомагнитного поля $|\vec{B}_0| = 0.5$ Гс направлен вниз под углом 55° к горизонту, азимут относительно плоскости радиотрассы составляет 170° . Источник располагается на границе волновода, которая считается осью симметрии ($E_\theta = H_\varphi = H_r = 0$). Вертикальный точечный диполь задается в виде плотности тока элементарной расчетной

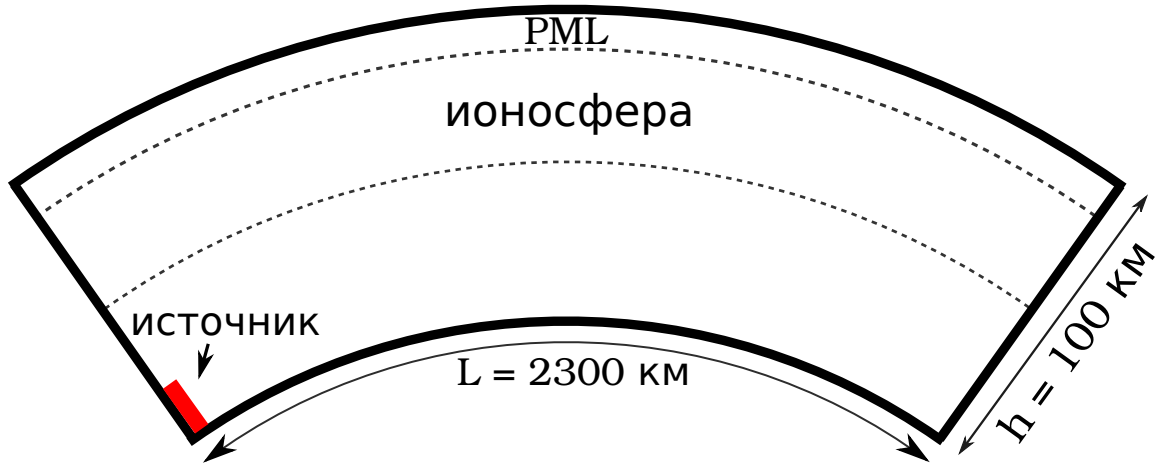


Рисунок 2.2 — Схема волновода для двумерного расчета распространения ОНЧ радиоволн методом FDTD.

ячейки с заданной мощностью (W [кВт]) и несущей частотой (f [Гц]) [115]:

$$J_n = \sqrt{\frac{3W}{\pi Z_0}} \frac{c}{f} \sin 2\pi f t, \quad (2.18)$$

где $Z_0 = 120\pi$ — импеданс электромагнитной волны в вакууме. При этом стоит отметить, что данная формула верна исключительно для вертикального диполя. При ином расположении источника необходимо использовать концепцию поверхности Гюйгенса, которая часто используется в задачах расчета рассеяния [118; 119]. Расчет распространения сигнала выполняется до момента отражения радиоволны от границы волновода.

Так как метод нормальных волн позволяет проводить расчет только для случая кусочно однородной ионосферы, для тестового расчета используется экспоненциальная модель нижней ионосферы Уайта (см. раздел 1.1.1) с постоянными значениями $\beta = 0.3$, $h_p = 72$ км. При помощи описанной схемы волновода проведена серия расчетов распространения радиоволн с частотами 5, 10, 20, 50 кГц от вертикального диполя на расстояние 2000 км при помощи метода FDTD и программного комплекса LWPC. Линейный размер элементарных расчетных ячеек для тестовых расчетов методом FDTD составляет 500 м, что позволяет для рассматриваемого диапазона частот считать численную дисперсию пренебрежимо малой. На рисунке 2.3 представлено затухание вертикальной компоненты электрического поля вдоль поверхности Земли, полученное из расчета на 1 кВт излучаемой мощности. Амплитуда электрического поля выражена в дБ относительно опорной величины электрического поля

$E_0 = 1$ мкВ/м. Во-первых, можно отметить хорошее соответствие результатов,

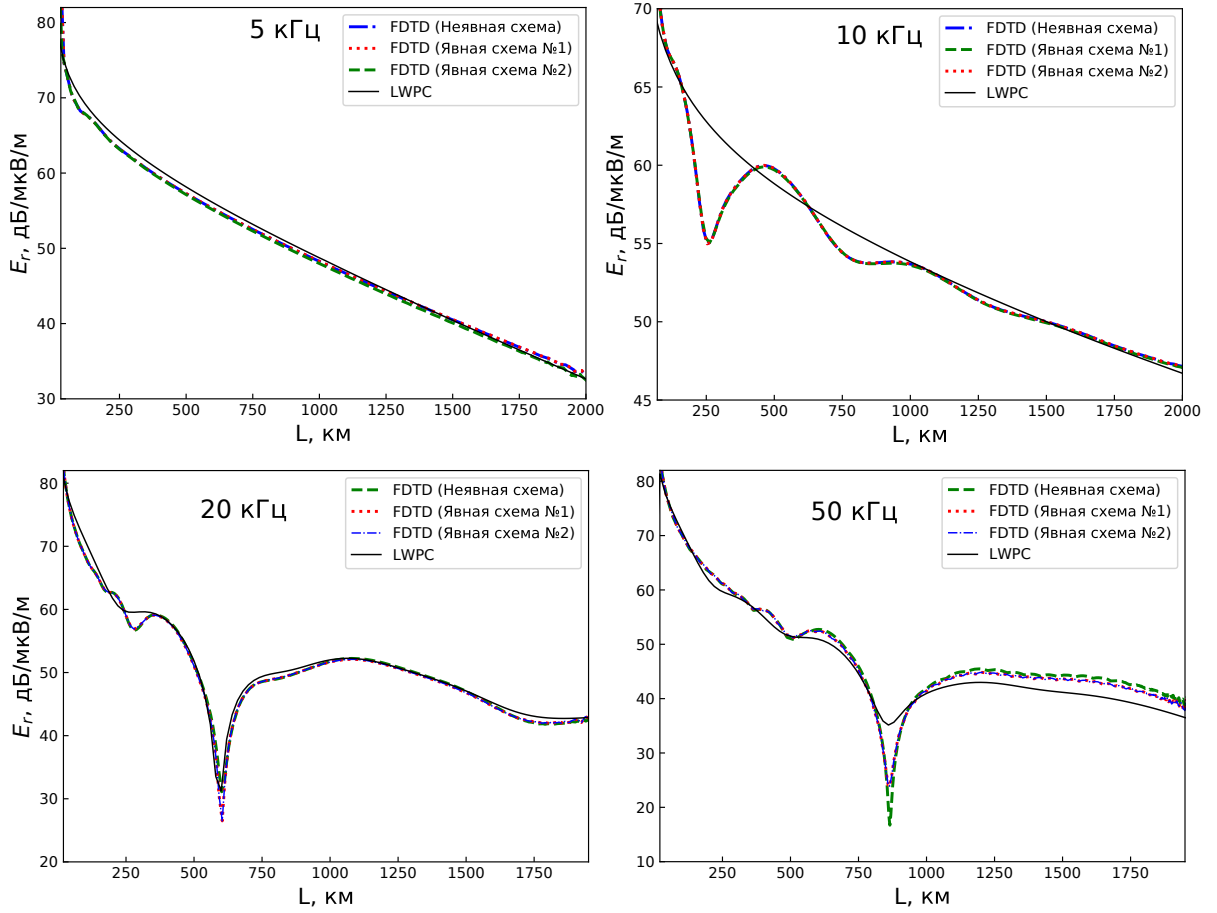


Рисунок 2.3 — Вертикальная компонента электрического поля E_r вдоль радиотрассы протяженностью 2000 км для различных частот, рассчитанная по методу конечных разностей FDTD (с различными методами решения ДУ для тока проводимости) и методу нормальных волн (программный пакет LWPC).

Ионосфера — стандартная дневная ($\beta = 0.3$, $h_p = 72$ км).

полученных при помощи метода FDTD и метода нормальных волн, что свидетельствует о корректности решения дифференциальных уравнений Максвелла и дополнительного ДУ для тока проводимости. Во-вторых, все используемые схемы расчета ДУ для тока проводимости дают эквивалентные результаты волнового распространения, даже при грубой сетке (отношение длины волны $\lambda=6$ км, соответствующей частоте 50 Гц, к линейному размеру элементарной ячейки $dl = 0.5$ км составляет $\lambda/dl = 12$). Также результаты расчетов свидетельствуют о возможности использования неявных схем [109; 113] для расчета тока проводимости, что поможет значительно ускорить процесс расчета КНЧ

параметров. Стоит отметить, что переходя к расчету распространения КНЧ радиоволн для такой же расчетной сетки, численная погрешность также оказывается пренебрежимо малой.

Верификация расчета импедансных граничных условий (учет проводимости подстилающей поверхности)

Для верификации реализации приближенных импедансных условий при различных условиях проводимости поверхности Земли в методе FDTD, выполнена серия расчетов распространения электромагнитного излучения от гармонического вертикального диполя с частотой излучения 20 кГц и различными электрофизическими параметрами однородной подстилающей поверхности $\sigma_e = (0.1, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-6})$ См/м; $\epsilon_r = 10$ (рисунок 2.4). Параметры расчетной сетки, вектор геомагнитного поля, параметры ионосферной проводимости установлены аналогично разделу 2.2.1. Такая же серия расчетов выполнена при помощи решателя LWPC. Результаты, полученные при помощи LWPC и численной модели FDTD показывают хорошее соответствие для широкого диапазона электрофизических параметров подстилающей поверхности, а также согласуются с результатами расчетов, полученных в работе [115]. На рисунке 2.4 представлены результаты распределения вертикальной компоненты электрического поля E_r с различными параметрами σ_e . Полученные результаты доказывают корректность решения импедансных граничных условий в методе FDTD. Это позволяет далее в численных расчетах методом FDTD учитывать неоднородности подстилающей поверхности с масштабами, соответствующими линейному размеру одной расчетной ячейки.

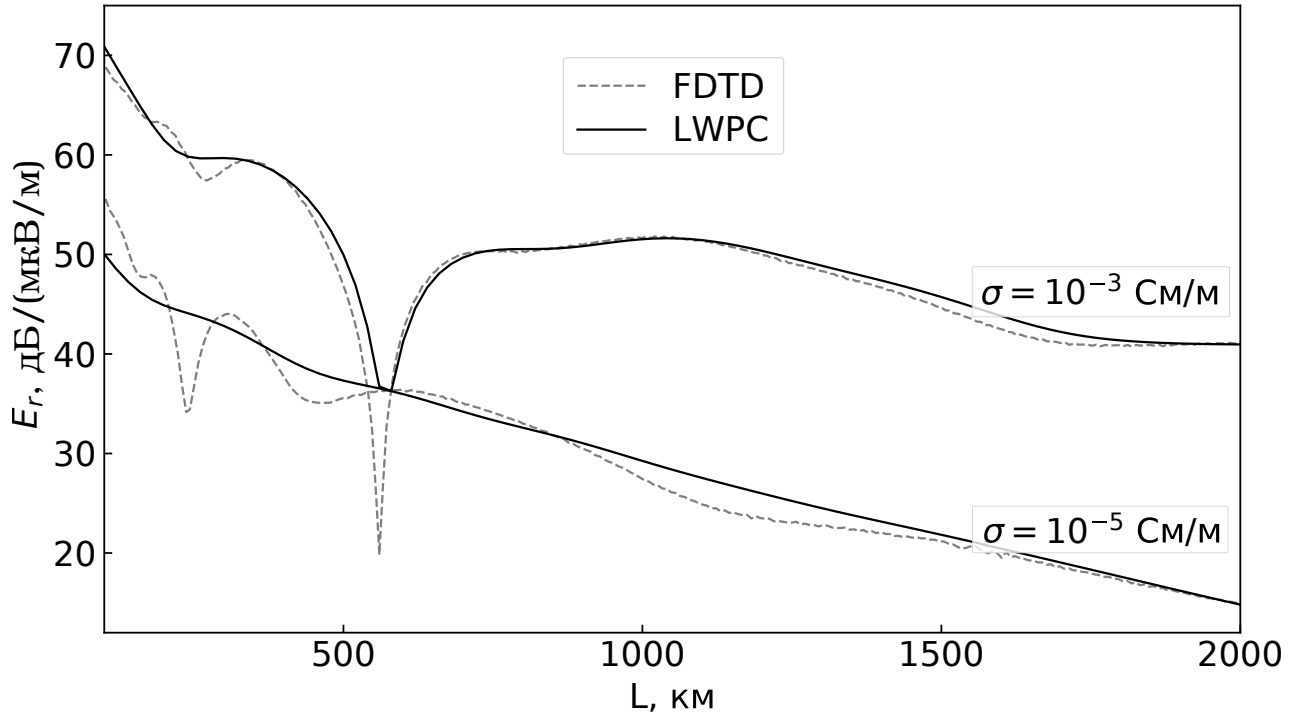


Рисунок 2.4 — Вертикальная компонента электрического поля E_r вдоль радиотрассы протяженностью 2000 км для частоты 20 кГц, рассчитанная по методу конечных разностей FDTD и методу нормальных волн (программный пакет LWPC) с параметрами подстилающей поверхности $\epsilon = 10$ и различными значениями проводимости σ_e . Ионосфера — стандартная дневная ($\beta = 0.3$, $h_p = 72$ км).

2.2.2 Построение трехмерной сетки в сферической системе координат

Метод FDTD в сферической системе координат имеет серьезный недостаток за счет использования равномерно распределенных пространственных узлов сетки. При такой дискретизации пространства наблюдается сильное сгущение узлов сетки у полюсов. При этом попытка уменьшения размера элементарных расчетных ячеек приводит к значительному росту числа расчетных узлов, а избыточное пространственное разрешение расчетной сетки у полюсов приводит к неравномерной расчетной нагрузке в разных областях пространства. В настоящей работе применено построение неравномерной расчетной сетки (вдоль координаты, соответствующей долготе), аналогично работе [100]. Осо-

бенность построения такой сетки заключается в том, что по мере удаления от полюсов количество ячеек вдоль координаты φ , увеличивается (рисунок А.1). Такое разбиение расчетной области позволяет добиться пространственной ба-

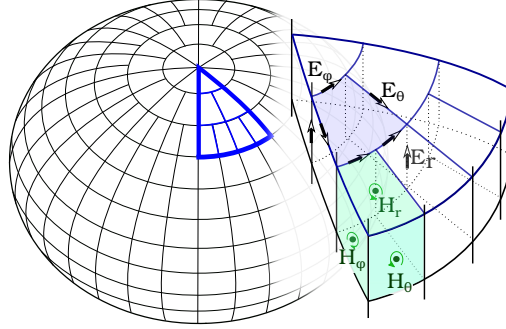


Рисунок 2.5 — Пространственное расположение компонент электромагнитного поля на расчетной сетке.

лансировки вычислительной нагрузки, сократить количество расчетных узлов (в области полюсов) и соответственно увеличить расчетный шаг при сохранении точности расчета. При этом дополнительное время, затрачиваемое на переинтерполяцию полей на каждом временном шаге при вычислении пространственных производных (рисунок А.1), оказывается незначительным по сравнению с выигрышем времени за счет увеличения расчетного шага. Дополнительным преимуществом оказывается сохранение вида дискретизации уравнений Максвелла (2.11, 2.12) и дополнительных ДУ (2.15).

2.2.3 Определение параметров ШР из расчетов методом FDTD

Получение амплитудного КНЧ спектра, а также параметров ШР по результатам расчета распространения электромагнитного импульса методом FDTD (вертикальная компонента электрического поля и горизонтальные компоненты магнитного поля) является важным этапом. Динамика электромагнитного поля в рассматриваемой точке волновода является примером непрерывного сигнала (особенно в случае множественных источников). Для использования дискретного преобразования Фурье применяется методика модифицированных

периодограмм [102], аналогично анализу экспериментальных наблюдений ШР (см. раздел 4.2). Получение КНЧ спектров и последующее определение параметров ШР из расчетного электромагнитного поля реализованы на языке Python. Стандартная библиотека *Scipy.signal* содержит реализацию метода модифицированных периодограмм *welch*, а также поиска локальных максимумов спектра *find_peaks*, *find_width*.

Дискретизация полученного спектра зависит от исходной длительности расчетного сигнала ($\Delta F = 1/T$), поэтому выполнение интерполяции спектра позволяет более точно определить пиковые резонансные значения. Далее, изучим зависимость рассчитанных резонансных параметров от длительности исходного сигнала (рисунки 2.6 и 2.7). Можно отметить сходимость резонансных параметров при увеличении длительности расчетного сигнала. При этом установление значений резонансных частот с погрешность не более 2×10^{-2} Гц наблюдается уже для сигнала длительностью 5 с (рисунок 2.6), что является достаточной точностью для сравнения с экспериментальными наблюдениями.

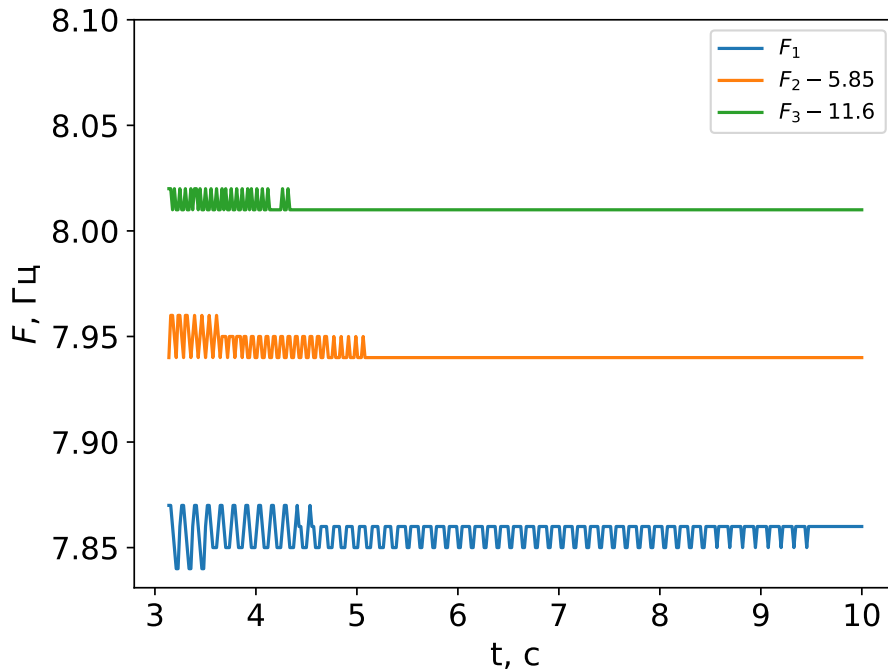


Рисунок 2.6 — Зависимость значения первых трех резонансных частот F_i от длительности расчетного сигнала. Расчет выполнен для ионосферной модели WACCM для 05.09.2017, 0 UT.

На рисунке 2.7 представлен пример сходимости значения добротности для первой резонансной частоты для расчета ШР для 09.05.2017 по модели

WACCM. Сходимость значений добротностей отказывается более медленной.

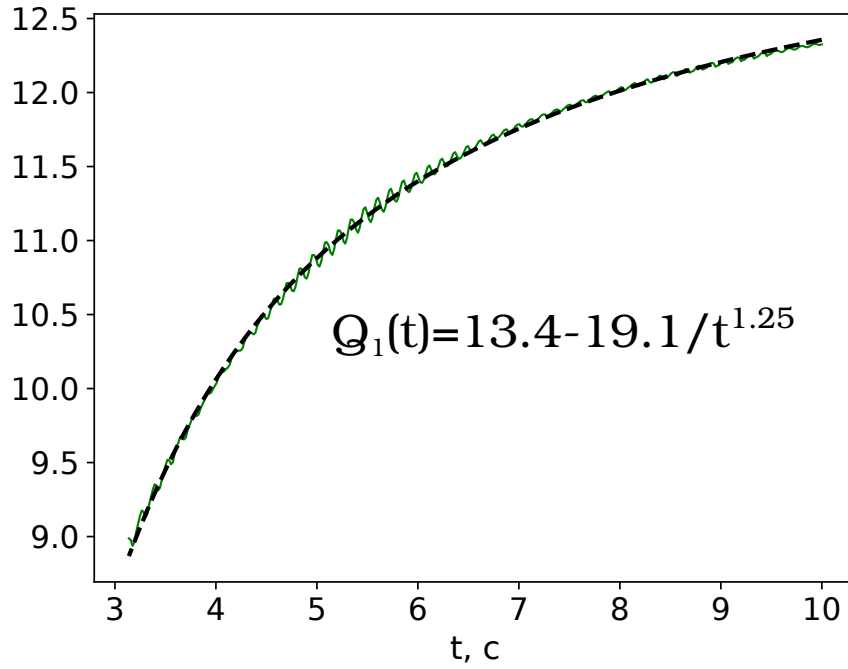


Рисунок 2.7 — Зависимость значения добротности первой резонансной частоты Q_1 от длительности расчетного сигнала. Расчет выполнен для ионосферной модели WACCM для 05.09.2017, 0 UT. Пунктиром обозначена аппроксимационная кривая.

На рисунке 2.7 изображена типичная зависимость от времени, наблюдаемая для значений добротности. С хорошей точностью наблюдаемую кривую можно аппроксимировать функцией вида:

$$Q_i(t) = Q_{i0} + A t^n, \quad (2.19)$$

где Q_{i0} — можно считать истинным значением расчетной добротности i -ого резонанса.

На рисунке 2.8 изображены функции $Q_{i0} - Q_i(t)$, наглядно демонстрирующие зависимость добротностей от длительности временного сигнала для первых трех резонансов. Можно отметить согласие наблюдаемых значений с тем фактом, что более высокие частоты быстрее затухают в волноводе Земли-ионосфера. Таким образом, установление истинного значения добротности для более высоких резонансных частот происходит раньше. При этом даже при длительности исходного сигнала ~ 10 с погрешность добротности для первой

резонансной частоты оказывается > 1 . Увеличение длительности расчетного сигнала оказывается нецелесообразным. Для расчета истинных значений резонансных добротностей Q_{i0} более простым подходом является построение аппроксимационной функции $Q_i(t)$.

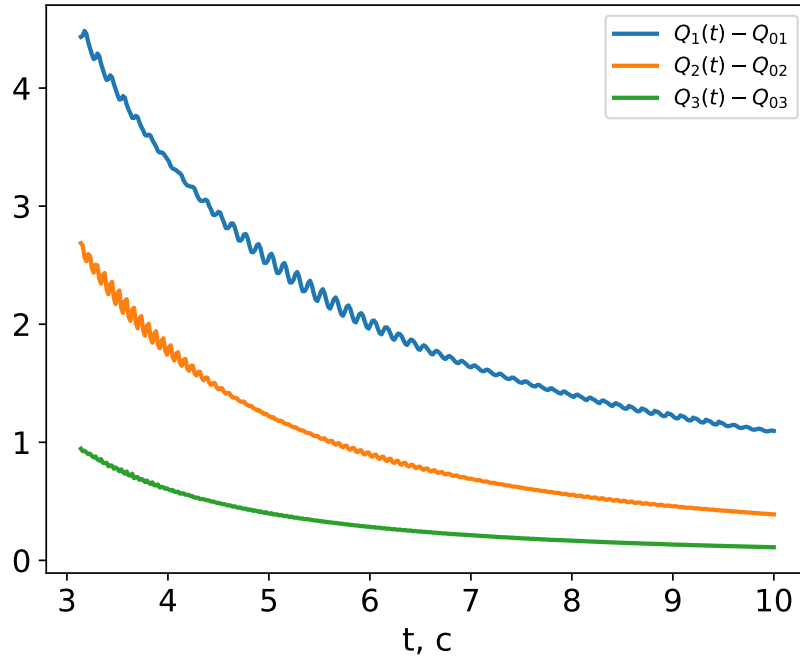


Рисунок 2.8 — Отношение добротности собственной частоты $Q_i(t)$, рассчитанной для сигнала длительностью t к ее истинному значению Q_{i0} для первых трех резонансных частот. Расчет выполнен для ионосферной модели WACCM для 05.09.2017, 0 UT.

В результате исследования зависимости резонансных параметров от длительности расчетного сигнала было получено, что для определения истинных значений резонансных параметров (Q_{i0} и F_{i0}) из расчетного сигнала необходимо:

- получить КНЧ спектр методом модифицированных периодограмм;
- выполнить интерполяцию полученного спектра (для определения истинных значений собственных частот F_{i0});
- найти параметры аппроксимационной функции (2.19) для определения истинных значений резонансных добротностей Q_{i0} .

Далее, в результатах расчетов истинные значения резонансных параметров для простоты будут обозначаться без индекса нуль.

Выводы к главе 2

В настоящей главе предложены две численные модели для расчета параметров ШР. Модель на основе метода конечных элементов (FEM) имеет следующие преимущества:

- позволяет исследовать собственные резонансные параметры волновода Земля-ионосфера без учета влияния источника;
- результат расчета описывает все $2n + 1$ моды резонансных частот, где n — номер резонансной частоты. Эта особенность модели может быть использована для изучения тонкого эффекта расщепления резонансных частот;
- позволяет учитывать неоднородности ионосферы масштаба элементарной расчетной ячейки.

Модель на основе метода конечных разностей (FDTD) также имеет очевидные преимущества:

- применимость для широкого диапазона радиочастот: КНЧ-ОНЧ-НЧ;
- возможность задания произвольных пространственно-временных характеристик источника;
- масштабируемость, за счет реализации параллельных вычислений;
- вычислительная эффективность, за счет реализации неявных методов решения дополнительного ДУ ионосферной проводимости, а также неравномерной расчетной сетки.

Указанные преимущества предложенных моделей соответственно определяют круг задач, для которых они оказываются наиболее оптимальными.

В качестве верификации метода FDTD выполнена серия тестовых двумерных расчетов распространения ОНЧ радиосигналов. При этом продемонстрирована применимость неявного метода решения дополнительного ДУ для расчета волноводного распространения широкого спектра радиосигналов КНЧ-ОНЧ-НЧ, а также корректность решения импедансных граничных условий.

Так как влияние геомагнитного поля на КНЧ радиоволны является малым, в настоящей работе расчет распространения КНЧ выполняется в изотропном приближении. Влияние геомагнитного поля на характеристики ШР являются предметом отдельного исследования.

Глава 3. Численное моделирование ШР

Численное моделирование распространения радиоволн КНЧ диапазона в волноводе Земля-ионосфера представляет интерес с точки зрения решения обратной задачи, а именно восстановления глобального состояния нижней ионосферы при различных гелиогеофизических условиях [120], а также для тестирования глобальных моделей мезосферы и нижней ионосферы [57]. Это оказывается возможным за счет наличия большого количества экспериментальных наблюдений характеристик ШР, регистрируемых в различных точках земного шара.

3.1 Постановка численных расчетов

Постановка численного расчета параметров ШР методом FEM приведена в разделе 2.1. Для расчета глобального распространения электромагнитного импульса в волноводе Земля-нижняя ионосфера методом FDTD элементарная расчетная ячейка волновода имеет пространственное разрешение: $\delta\varphi \sim \delta\theta \sim 100$ км, $\delta r = 3$ км. Источник электромагнитного импульса задается в виде вертикального электрического диполя на поверхности Земли в географических координатах, соответствующих расположению центра глобальной молниевой активности. ЭМИ представляет собой растянутый по времени широкополосный Гауссов импульс тока, согласно работе [97]:

$$I(t) = I_0 [\exp(-70t) - \exp(-100t)]. \quad (3.1)$$

Для проверки корректности геометрии модельных волноводов, а также решения базовых уравнений: (2.12, 2.11) — метода FDTD и (2.1) — метода FEM, выполнены расчеты резонансных частот при отсутствии ионосферной плазмы. Полученные значения резонансных частот соответствуют аналитическому решению Шумана (1) [3; 4] и представлены в таблице 1. Также в качестве теста численной модели на основе метода FEM, выполнен расчет резонансных параметров с однородными дневным и ночным высотными профилями проводимости $\sigma(h)$, предложенными в работе [17] и разработанными непосредственно

для симуляции корректных КНЧ характеристик волновода Земля-ионосфера. Полученные в результате расчетов резонансные параметры хорошо воспроизводят средние экспериментально наблюдаемые значения, а также соответствуют результатам расчета, полученным в оригинальной работе [17].

Выполненные тестовые численные расчеты демонстрируют хорошее согласие с результатами аналитических приближенных моделей для расчета параметров ШР, что подтверждает возможность использования описанных численных методов в случае более сложных атмосферных моделей.

3.2 Тестирование эмпирических моделей нижней ионосферы

Характеристики электронного состава нижней ионосферы задаются по двум радиофизическим моделям нижней ионосферы (см. раздел 1.1):

- двухпараметрическая модель Уайта. Параметры (β, h_p) для дневной полусферы (0.5, 87), для ночной (0.3, 72) являются постоянными. При этом согласно работе [121] границу между дневной и ночной ионосферой (линия терминатора) можно считать при значении солнечного зенитного угла $\chi = 98^\circ$;
- модель Уайта-Фергюсона, в которой параметры β и h_p меняются непрерывно в зависимости от солнечного зенитного угла (χ);

а также геофизической модели нижней ионосферы IRI-2016. Эффективная частота соударений электронов с нейтральными частицами задается согласно выражению (1.2). Стоит подчеркнуть, что рассмотренные модели описывают только концентрацию электронов в области нижней ионосферы.

Серия расчетов параметров ШР для эмпирических моделей нижней ионосферы выполнена при помощи численной модели на основе метода FDTD для 1 января, 12 UT в спокойных гелиогеофизических условиях. Импульсный источник (3.1) расположен в точке (0° с.ш.; 0° в.д.).

На рисунке 3.1 изображены расчетные резонансные спектры в точке (0° с.ш.; 180° в.д.). Резонансные параметры, соответствующие вертикальной компоненте электрического поля (E_r) указаны в таблице 1. Полученные в ре-

зультате значения резонансных частот F_n и добротностей Q_n представлены в таблице 1. При этом стоит отметить, что указанные в таблице 1 экспериментальные параметры ШР представляют собой усредненные референсные значения [52], и рассматриваются только для грубой оценки корректности расчетных результатов.

Распределение электронов в области нижней ионосферы является наиболее важной характеристикой при формировании резонансных частот, так как непосредственно определяет высоту отражения КНЧ радиоволны. Несмотря на более сложную пространственную структуру моделей IRI и Уайта-Фергюсона по сравнению с моделью Уайта, полученные с их помощью расчетные резонансные частоты превышают экспериментально наблюдаемые значения более, чем на 1 Гц (рисунок 3.1). Это говорит о заниженных значениях электронной плотности в области отражения КНЧ радиоволны. Наиболее близкие значения резонансных частот к экспериментально наблюдаемым показала модель Уайта с однородными дневной и ночной полусферами (см. таблицу 1). Также можно отметить, что для всех эмпирических моделей значения резонансных добротностей оказались завышенными, что в основном связано с учетом проводимости ионных компонент средней атмосферы.

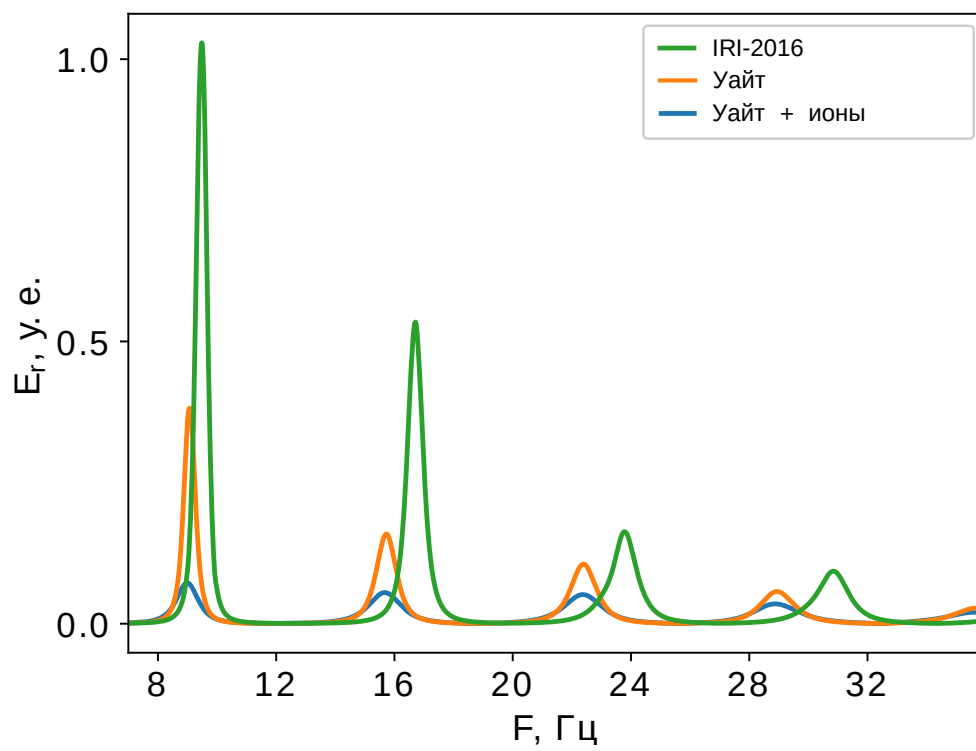


Рисунок 3.1 — Расчетные КНЧ спектры для эмпирических моделей ионосферы.

Таблица 1 — Расчетные значения ШР согласно различным моделям нижней ионосферы

Численный метод	Модель нижней ионосферы	F_1 , Гц	Q_1	F_2 , Гц	Q_2	F_3 , Гц	Q_3
FEM	—	10.5	—	18.2	—	25.7	—
	Профиль проводимости Николаенко[17]	7.8	4.6	13.9	5.6	20.0	6.1
	ИДГ-22К (электроны + ионы)	7.8	6.3	13.7	6.5	19.6	6.6
FDTD	—	10.5	—	18.2	—	25.7	—
	IRI-2016 (электроны)	9.5	28.4	16.7	39.4	23.8	38.1
	Уайт-Фергюсон (электроны)	9.1	28.1	15.7	29.1	22.4	32.7
	Уайт (электроны)	8.8	26.1	15.3	32.0	21.9	24.4
	Уайт (электроны) + ионы [106]	8.6	11.8	15.1	15.1	21.7	15.8
	WACCM (электроны + ионы; 18.01.2018, 15 UT)	7.8	19.1	13.9	21.1	19.8	18.1
	ИДГ-5К (электроны + ионы; 10.09.2017, 15.75 UT)	6.6	4.5	12.5	7.8	16.9	7.7
	Эксперимент [52]	7.8	4.6	14.1	6.0	20.3	6.6

3.3 Влияние ионной составляющей на параметры распространения КНЧ

Для количественной оценки влияния ионной проводимости на характеристики распространения КНЧ радиоволн выполнен расчет ШР методом FDTD для случая многокомпонентной ионосферы (электроны, положительные/отрицательные ионы). В качестве модели электронной составляющей взята эмпирическая модель Уайта, показавшая наиболее близкое совпадение с экспериментом из всех рассмотренных эмпирических моделей. Высотные профили (дневной и ночной) концентрации положительных ионов взяты из работы [106]. При этом концентрация отрицательных ионов рассчитывается исходя из приближения электронейтральности ионосферной плазмы. Эффективная частота соударений ионов с нейтрами приближенно считается $\nu_i = 100\nu_e$. По результатам расчета (рисунки 3.1 и 3.2) можно отметить, что ионная составляющая проводимости существенно влияет на затухание КНЧ сигнала в волноводе Земля-ионосфера даже при спокойных гелиогеофизических условиях. Учет ионной проводимости соответственно отражается на значениях резонансных добротностей (см. таблицу 1).

Это говорит о том, что для моделирования корректных параметров ШР необходимо проводить численные расчеты с учетом многокомпонентных моделей, описывающих электронно-ионный состав в области мезосферы-нижней ионосферы при различных гелиогеофизических условиях. При этом разработанные программные методы для численного расчета ШР представляют хороший инструмент для тестирования именно таких моделей.

3.4 Оценка влияния конечной проводимости Земли на параметры ШР

Во всех ранее выполненных расчетах поверхность Земли с хорошим приближением считается идеальным проводником. Однако следуя аналогии с ионной проводимостью (которая дает значимый эффект только при распростра-

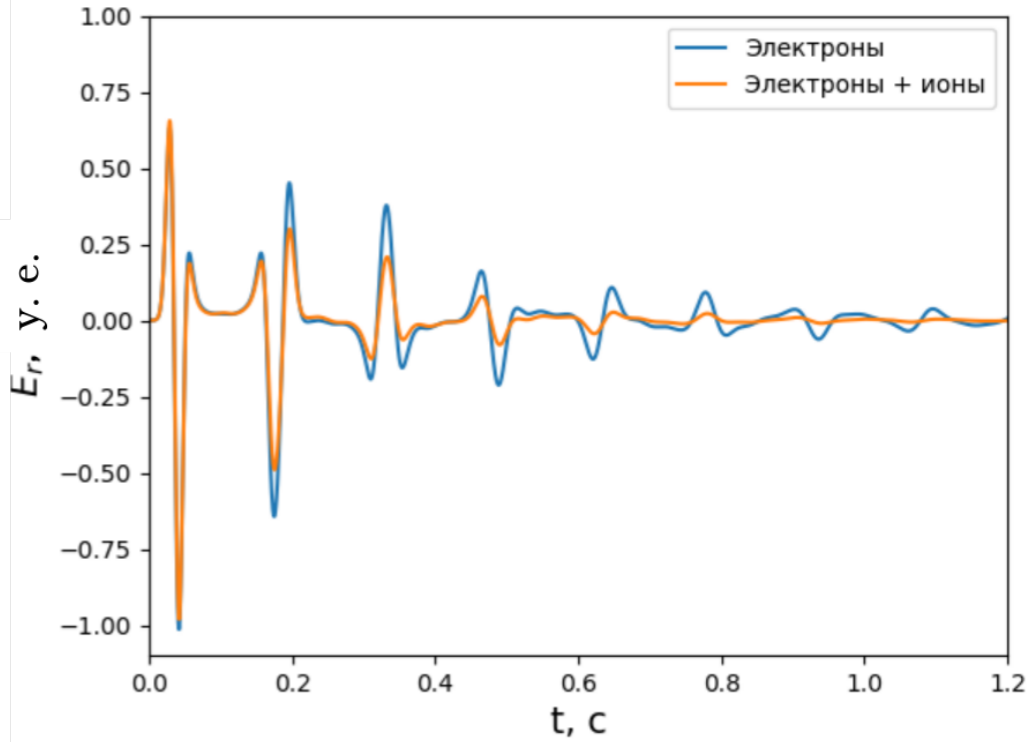


Рисунок 3.2 — Вертикальная компонента электрического поля E_r в точке приема с учетом ионной проводимости и без. В качестве источника ЭМИ — производная импульса Гаусса.

нении на большие расстояния), рассмотрим поправку в расчетные резонансные параметры, вносимую конечной проводимостью Земной поверхности. В качестве теста выполнен расчет ШР методом FDTD с эмпирической моделью ионосферы Уайта, аналогичный расчету в разделе 3.2. При этом разрешение электромагнитного поля на границе с Земной поверхностью реализовано за счет методики импедансных граничных условий SIBC (Приложение A.2). В качестве карты проводимости Земной поверхности $\sigma_e(\varphi, \theta)$ использована подробная модель из работы [122]. Пространственное разрешение модели составляет $0.25^\circ \times 0.25^\circ$, что оказывается в 4 раза меньше линейного горизонтального масштаба элементарной расчетной ячейки расчетной области FDTD (рисунок 3.3). Таким образом, переинтерполяция значений проводимости $\sigma_e(\varphi, \theta)$ на расчетную сетку приводит к уменьшению пространственного разрешения до $1^\circ \times 1^\circ$. Параметр относительной диэлектрической проницаемости ϵ задается более просто. Для воды $\epsilon = 80$, для суши $\epsilon = 15$.

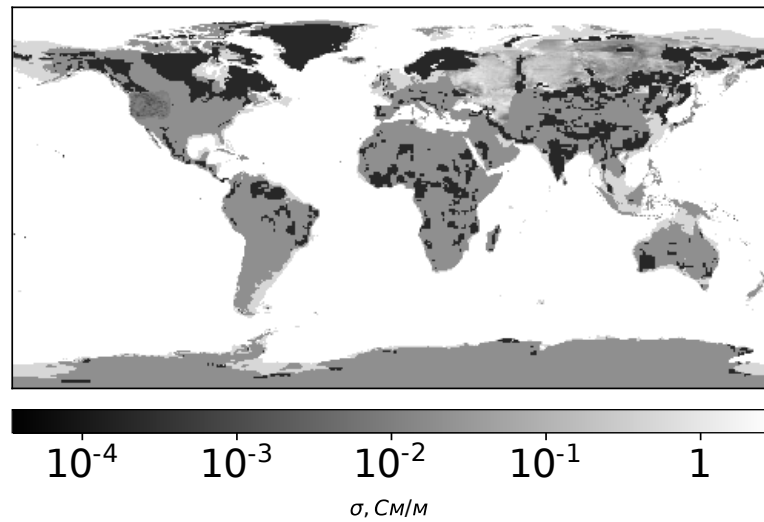


Рисунок 3.3 — Распределение проводимости Земной поверхности $\sigma_e(\varphi, \theta)$, с пространственным разрешением $1^\circ \times 1^\circ$.

В результате расчета параметров ШР оказалось, что различие первых 4-х резонансных частот в случаях с учетом конечной проводимости Земли и приближении поверхности Земли идеальным проводником оказывается сравнимым с расчетной погрешностью и является пренебрежимо малой величиной относительно погрешности экспериментальных значений. Это подтверждает справедливость приближения Земной поверхности идеальным проводником для КНЧ радиодиапазона.

3.5 Тестирование теоретических моделей ионосферы

Полученные результаты расчетов ШР с использованием эмпирических моделей говорят о том, что для корректного описания проводимости среды необходима не только корректная глобальная модель электронной концентрации нижней ионосферы, которая определяет высоты отражения КНЧ излучения в волноводе Земля-ионосфера, а также и глобальная модель основных видов ионов в области мезосферы и нижней ионосферы. Далее на основе численных расчетов ШР проведена проверка ряда глобальных теоретических моделей нижней ионосферы, описанных в разделе 1.2.

3.5.1 Тестирование глобальной модели WACCM

Модель WACCM позволяет рассчитывать концентрации электронов, положительных/отрицательных ионов в области нижней ионосферы 40–100 км, что дает возможность проводить расчеты распространения ЭМИ в приближении многокомпонентной, неоднородной, изотропной ионосферы. В соответствии с оценкой влияния параметров подстилающей поверхности на распространение КНЧ радиодиапазона (см. раздел 3.4), поверхность Земли считается идеальным проводником. В настоящем разделе представлено сравнение результатов серии численных расчетов ШР методом FDTD с учетом ионосферных параметров, рассчитанных по ионосферной модели WACCM, а также экспериментальных наблюдений ГФО Михнево. Результаты расчета ШР для 0 UT, 18.01.2018 представлены в таблице 1.

Сезонная динамика

Параметры ионосферы рассчитываются согласно модели WACCM для момента времени 0 UT для 7 произвольных дней каждого месяца 2017 г. При этом источник ЭМИ, согласно спутниковым наблюдениям глобальной молниевой активности [123], расположим на экваторе в области Южной Америки (0° с.ш., 120° з.д.). Полученные в результате серии расчетов резонансные частоты для горизонтальных компонент магнитного поля приведены в сравнении с экспериментальными наблюдениями ШР в ГФО Михнево в 2017 г (рисунки 3.4–3.6).

На рисунках 3.4–3.6 видно, что несмотря на достаточно хорошее соответствие первой резонансной частоты, вторая и третья резонансные частоты оказываются заниженными относительно экспериментальных значений для обеих компонент магнитного поля. Также можно отметить, что сезонные изменения ионосферы оказываются незначительными для КНЧ диапазона и не воспроизводят сезонную динамику резонансных параметров.

Для попытки воспроизведения наблюдаемой годовой динамики резонансных частот проведена аналогичная серия расчетов ШР по модели WACCM с

учетом сезонного широтного дрейфа источника молниевой активности по модели из работы [124]:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \left[(n - 1) \frac{\pi}{6} \right]. \quad (3.2)$$

В результате оказывается, что учет широтного дрейфа источника (3.2) также не в состоянии воспроизвести наблюдаемые в эксперименте изменения резонансных частот. В меньшей степени это связано с использованием приближенной модели динамики глобальной молниевой активности. Основным фактором является неточность в описании моделью WACCM затухания КНЧ сигнала (т. е., значений резонансной добротности Q), которая приводит к исчезновению зависимости резонансных параметров от расстояния источник–приемник. Полученный эффект продемонстрирован далее на примере аналитического решения распространения ЭМИ.

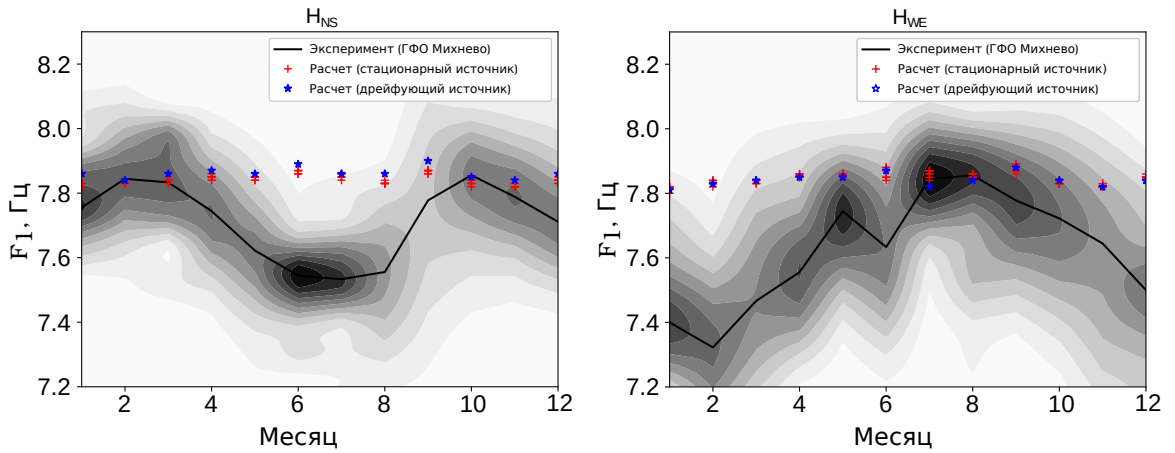


Рисунок 3.4 — Сезонная динамика первой резонансной частоты для 0 UT, 2017 г. Экспериментальные данные представляют собой динамику распределения ПВ резонансной частоты для месячных наблюдений (черная кривая — максимальное значение плотности вероятности).

Суточная динамика

Ионосферные параметры получены для 18.01.2018 с временным интервалом 3 часа, согласно модели WACCM. При расчете ШР предполагаем, что

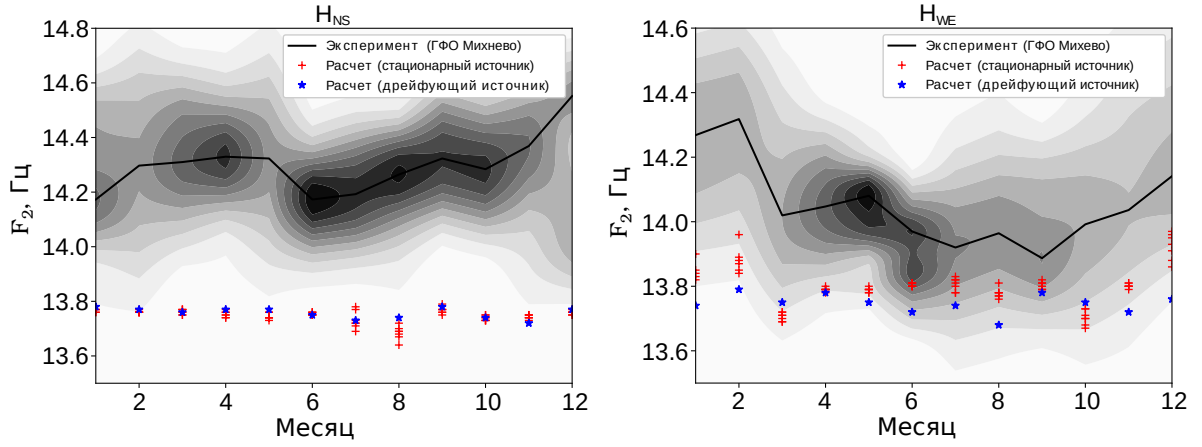


Рисунок 3.5 — Сезонная динамика второй резонансной частоты для 0 UT, 2017 г. Экспериментальные данные представляют собой динамику распределения ПВ второй резонансной частоты для месячных наблюдений (черная кривая — максимальное значение плотности вероятности).

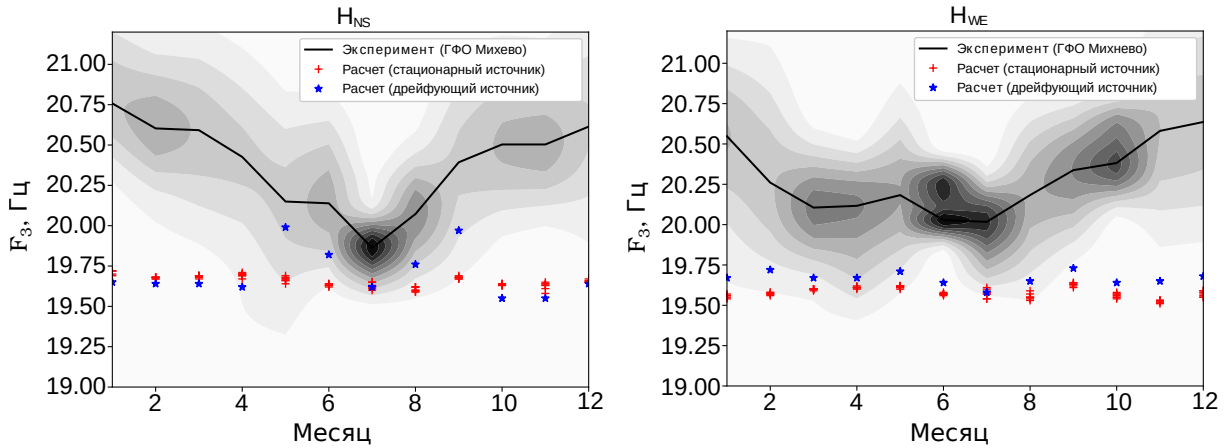


Рисунок 3.6 — Сезонная динамика третьей резонансной частоты для 0 UT, 2017 г. Экспериментальные данные представляют собой динамику распределения ПВ третьей резонансной частоты для месячных наблюдений (черная кривая — максимальное значение плотности вероятности).

приемник расположен на поверхности Земли в географических координатах, соответствующих расположению ГФО Михнево. В соответствии с результатами спутниковых наблюдений [123], увеличение глобальной молниевой активности наблюдается в экваториальной области, соответствующей локальному времени 16 LT. Таким образом, учитывая широтный дрейф источника согласно (3.2), считаем, что в январе источник в течении суток перемещается вокруг Земли вдоль экватора ($\theta = 0^\circ$ с.ш.). Значение долготы источника задается согласно

временной метке UT:

$$\varphi = \begin{cases} [(UT + 16) \cdot 15] \% 360, & [(UT + 16) \cdot 15] \% 360 < 180 \\ 360 - [(UT + 16) \cdot 15] \% 360, & [(UT + 16) \cdot 15] \% 360 > 180. \end{cases} \quad (3.3)$$

На рисунках 3.7–3.9 приведено сравнение суточной динамики расчетных резонансных частот и экспериментально наблюдаемого распределения ПВ резонансных частот для января 2018 г. Аналогично расчетам сезонной динамики ШР по ионосферной модели WACCM, представленным выше, вторая и третья резонансные частоты оказываются заниженными, а суточная динамика резонансных параметров оказывается малой, по сравнению с экспериментальными наблюдениями.

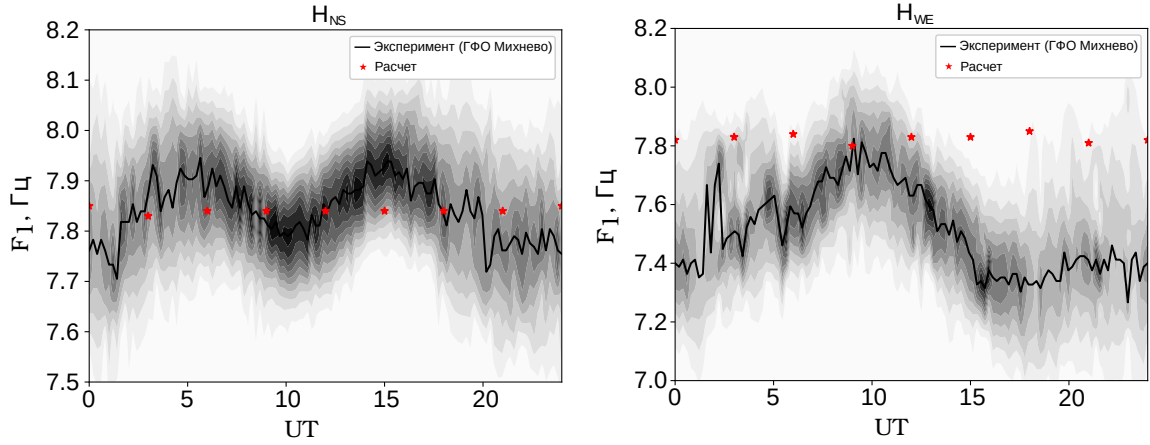


Рисунок 3.7 — Суточная динамика первой резонансной частоты.

Экспериментальные данные представляют динамику распределения ПВ первой резонансной частоты для января 2018 года. Расчетные значения получены при помощи численного расчета методом FDTD, согласно модели нижней ионосферы WACCM для 18.01.2018.

Численные расчеты ШР согласно ионосферной модели WACCM показали, что она не описывает суточные/сезонные изменения резонансных частот, даже при учете модели дрейфа глобального центра молниевой активности. Для объяснения наблюдаемых результатов рассмотрим одномерную аналитическую модель ТМ-волны в волноводе Земля-ионосфера в приближении однородной ионосферы и одиночного молниевых разряда [114; 125; 126]. Компоненты электромагнитного ТМ-поля описываются следующими выражениями:

$$E_r(\omega) = -\frac{M_c(\omega)}{4\pi\epsilon h_i R_e^2} \frac{i\nu(\nu+1)}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)P_n(\cos\theta)}{n(n+1) - \nu(\nu+1)}, \quad (3.4)$$

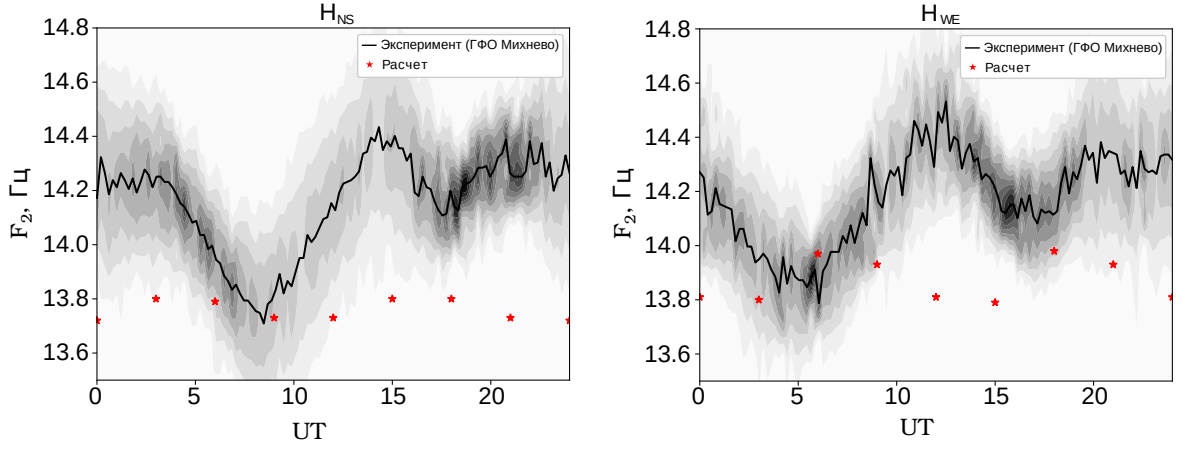


Рисунок 3.8 — Суточная динамика второй резонансной частоты. Экспериментальные данные представляют динамику распределения ПВ второй резонансной частоты для января 2018 года. Расчетные значения получены при помощи численного расчета методом FDTD, согласно модели нижней ионосферы WACCM для 18.01.2018.

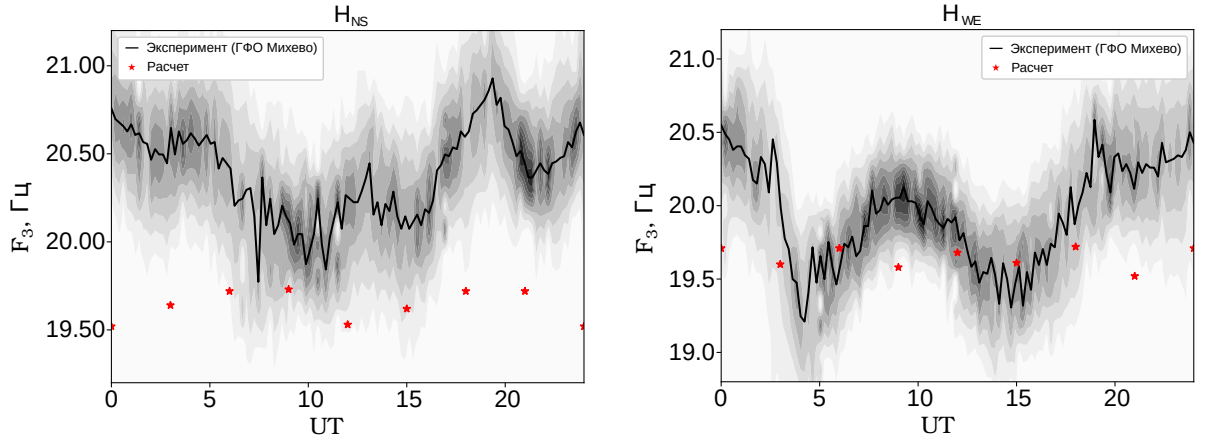


Рисунок 3.9 — Суточная динамика третьей резонансной частоты. Экспериментальные данные представляют динамику распределения ПВ третьей резонансной частоты для января 2018 года. Расчетные значения получены при помощи численного расчета методом FDTD, согласно модели нижней ионосферы WACCM для 18.01.2018.

$$H_{\varphi}(\omega) = \frac{M_c(\omega)}{4h_i R_e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)P_n^1(\cos \theta)}{n(n+1) - \nu(\nu+1)}, \quad (3.5)$$

где $M_c(\omega)$ — дипольный момент молниевых источников, θ — угловое расстояние источник–приемник, $\nu(\omega)$ — постоянная распространения волны, $P_n(\cos \theta)$ — полином Лежандра, $P_n^1(\cos \theta)$ — присоединенный полином Лежандра, h_i —

эффективная высота ионосферы, $\omega = 2\pi F$ — угловая частота. Для расчетов принимаем $h_i = 80$ км. Постоянная распространения $\mathbf{v}$ задается при помощи выражения $\mathbf{v}(\mathbf{v} + 1) = (k_0 R_e S_v)$, где в свою очередь $S_v = c/V - 5.49 i \alpha_D / f$ — комплексный показатель преломления, k_0 — волновое число в вакууме, c — скорость света в вакууме, V — фазовая скорость волны, α_D — задает степень затухания волны. Необходимые значения параметров можно вычислить при помощи эмпирических выражений из работы [27]:

$$c/V = 1.64 - 0.1759 \ln(f) + 0.01791 \ln^2(f), \quad (3.6)$$

$$\alpha_D = 0.063 f^{0.64} \quad (3.7)$$

На рисунке 3.10 изображены спектры горизонтальной компоненты магнитного поля, полученные при помощи вышеописанной аналитической модели для различных расстояний источник–приемник и разных значений степени затухания волны α_D . Хорошо видно, что при значении α_D , заданном согласно (3.7), спектр имеет значения резонансных частот и добротностей, согласующиеся с экспериментальными значениями из таблицы 1. При этом интерференционная картина сигнала, пришедшего по кратчайшему расстоянию от источника и сигнала, прошедшего по диаметрально противоположной стороне Земли (так называемого antipodal wave) формирует особенности спектра, частично изменяющие основные резонансные характеристики. Наблюдаемые паттерны зависимости резонансных параметров от расстояния источник–приемник были впервые отмечены в работах [127; 128] и позволили однозначно определять расстояние от точки регистрации ШР до источника, вызвавшего наблюдаемый КНЧ сигнал. Это оказывается критически важным при решении обратной задачи, а именно исследования отдельных мощных ЭМИ по наблюдениям одиночной станции регистрации ШР, а также определения карты глобальной молниевой активности [129] по наблюдениям нескольких станций регистрации ШР. Спектры, полученные при помощи аналитической модели, но с заниженным параметром α_D в ~ 5 раз (рисунок 3.10) демонстрируют завышенные значения резонансных добротностей. При этом можно отметить, что зависимость резонансных частот от расстояния источник–приемник становится существенно меньше. Многократная интерференция сигнала в точке приема, вызванная завышенной добротностью резонансной полости приводит к «потере» информации о расстоянии до источника излучения КНЧ сигнала. Таким образом, резонансные

частоты стремятся к значениям, соответствующим случаю равномерно распределенных по поверхности Земли источников. Аналогичный эффект получен по

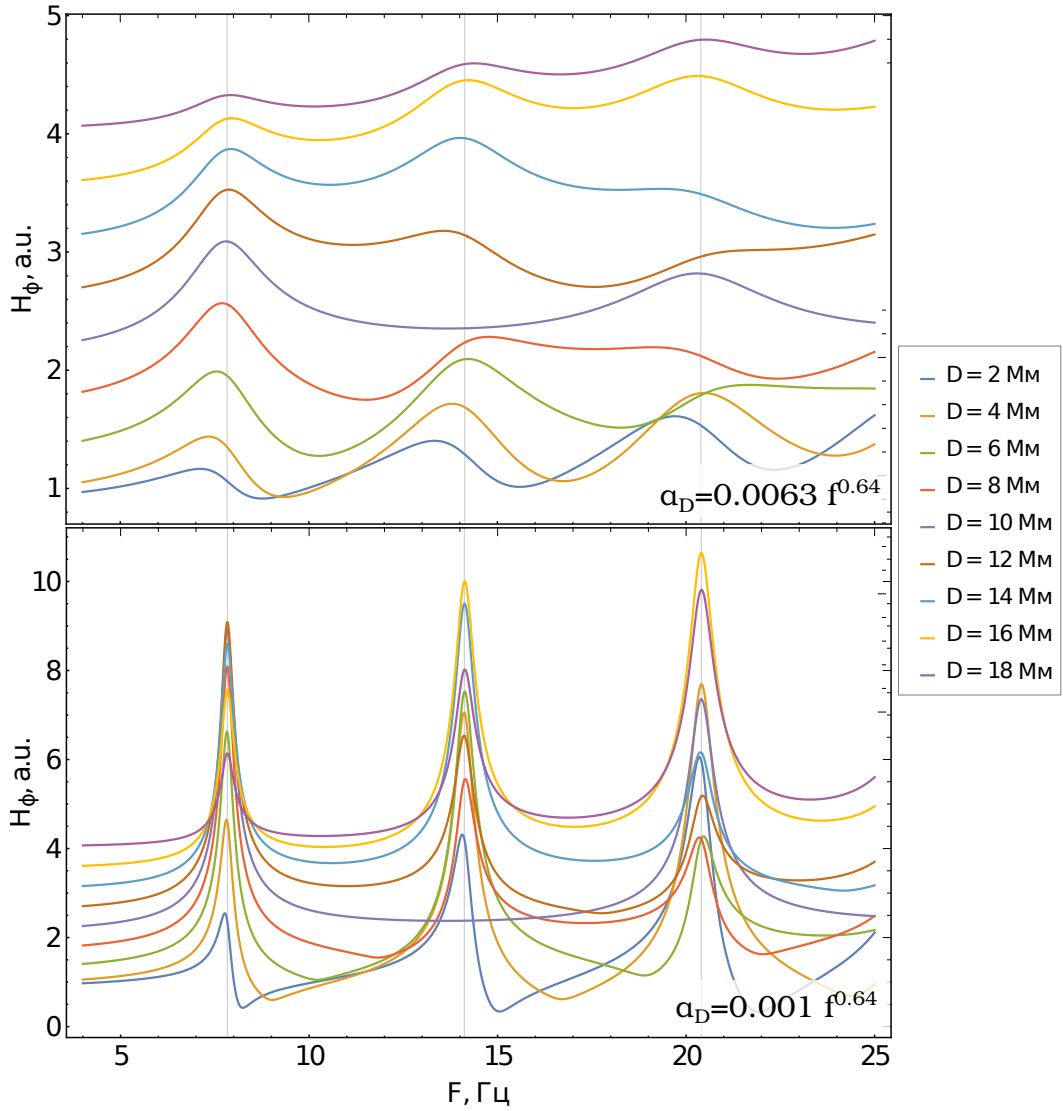


Рисунок 3.10 — Спектры горизонтальной компоненты магнитного поля, полученные согласно одномерной аналитической модели распространения ТМ-волны в приближении однородной ионосферы для различных расстояний источник–приемник и для разных значений коэффициентов затухания α_D .

результатам численных расчетов суточной/сезонной динамики ШР согласно глобальной модели ионосферы WACCM. Это говорит о том, корректность расчетных резонансных добротностей ШР для ионосферной модели оказывается необходимым условием для возможности правильного описания наблюдаемой в эксперименте суточной/сезонной динамики резонансных параметров.

Можно заключить, что несмотря на достаточно хорошее соответствие экспериментальным наблюдениям средних значений резонансных частот, по-

лученных в результате численных расчетов, модель WACCM не может быть использована для изучения динамики резонансных характеристик, вызванной дрейфом глобальной молниевой активности.

3.5.2 Тестирование плазмохимических моделей нижней ионосферы ИДГ РАН

Модель ИДГ-22К

Описание модели ИДГ-22К содержится в разделе 1.2.2. В настоящем разделе представлены численные расчеты ШР методом на основе FEM с учетом плазмохимической модели ИДГ-22К для спокойных гелиогеофизических условий, а также для рентгеновских вспышек различных классов.

Как уже было отмечено в разделе 1.2, теоретические модели ионосферы представляют интерес в первую очередь возможностью моделирования возмущенных ионосферных условий. Одним из масштабных возмущений нижней ионосферы является солнечная вспышка в рентгеновском диапазоне. Солнечные вспышки приводят к значительному увеличению концентрации электронов в нижней ионосфере, что в свою очередь меняет характеристики распространения КНЧ-ОНЧ-НЧ радиоволн. Данный эффект можно наблюдать по увеличению поглощения космического шума [130], по регистрации поля ОНЧ передатчиков [131], либо по нарушению КВ связи [132]. Определение солнечных вспышек по наблюдениям параметров ШР представляет интерес, так как, станция наблюдения КНЧ не обязательно должна находиться на освещенной стороне Земли, как в случае с радиотрассой ОНЧ диапазона.

Для распространения КНЧ радиоволны не применима концепция дневной или ночной радиотрассы. Так как длина радиоволны соизмерима с размерами волновода, можно считать, что весь волновод Земля-ионосфера представляет собой радиотрассу, не зависимо от расположения источника и приемника. Таким образом, изменение параметров нижней ионосферы в любой точке Земного шара будет изменять резонансные параметры КНЧ диапазона для всех прием-

ников одновременно. Стоит отметить проблемы, возникающие при изучении влияния солнечных вспышек на параметры ШР. В части экспериментальных наблюдений это во-первых, достаточно незначительное изменение значений резонансных параметров даже при мощных солнечных вспышках. Это создает большие трудности при попытке их вычленения на фоне соизмеримых по амплитуде короткопериодных биений резонансных параметров, связанных со стохастической природой источника КНЧ радиоволн — молниевых разрядов. Во-вторых, продолжительность солнечной вспышки может составлять от нескольких минут до нескольких часов. Как было отмечено в разделе 4.2 низкая резонансная добротность КНЧ радиодиапазона требует 10-12 минутного интервала накопления электромагнитного сигнала. Это приводит к невозможности исследования коротких солнечных вспышек.

Экспериментальное исследование влияния солнечных вспышек на параметры ШР было затронуто в ряде работ, например, на основе наблюдений ШР в обсерватории Карымшина, Камчатка (53° с.ш., 158° в.д.) [133] и обсерватории Ловозеро, Кольский п-ов (68° с.ш., 35° в.д.) [134]. Численное моделирование солнечных вспышек было выполнено в работе [135] на основе модельного профиля проводимости атмосферы Николаенко [17], однако обладает существенными недостатками. Во-первых, расчет выполнен при помощи решения телеграфных уравнений в двумерной постановке (2DTE) [136; 137] в приближении однородной дневной и ночной полусфер (не учитывая зависимость от солнечного-зенитного угла). Во-вторых, профиль проводимости при солнечных вспышках рассчитывается в приближении простого сдвига профиля при спокойных условиях и не описывает реальной зависимости проводимости ионосферы от потока солнечного рентгеновского излучения.

Механизм влияния солнечной вспышки на ионосферу является довольно сложным и разнонаправленным, поэтому в данной работе моделирование солнечной вспышки выполняется только за счет увеличения электронной концентрации освещенной части ионосферы под воздействием потока солнечного рентгеновского излучения в диапазоне 1–8 А. Результаты численных расчетов в разделе 3.3 показали, что за формирование резонансных частот отвечает электронная составляющая нижней ионосферы, таким образом, для оценки динамики резонансных параметров в данном случае расчеты ШР выполняются только с учетом электронной проводимости. Все расчеты параметров ШР, приведенные в настоящей главе выполнены при помощи численной модели

на основе метода FEM. Сперва были получены резонансные параметры для невозмущенной неоднородной ионосферы, рассчитанной по модели ИДГ-22К (см. таблицу 1). Зависимость профиля электронной концентрации от солнечного зенитного угла представлена на рисунке 1.4. Полученные в результате значения резонансных частот с хорошей точностью соответствуют экспериментально наблюдаемым, однако значения резонансных добротностей оказываются несколько завышенными, что является следствием пренебрежения ионной проводимости атмосферы. Это показывает, что плазмохимическая модель с хорошей точностью воспроизводит электронное распределение в области отражения КНЧ радиоволн. Также можно отметить, что полученное в результате расчета расщепление резонансных частот оказывается отличным от расщепления частот, полученного по модели атмосферной проводимости Николаенко [17], приближенно учитывающей неоднородность день/ночь (рисунок 3.11). Однако наблюдаемые различия в расщеплении резонансных частот оказываются сравнимыми с расчетной погрешностью, что не дает однозначно связать этот эффект с учетом реальной неоднородности день/ночь (т. е. зависимой от солнечного зенитного угла).

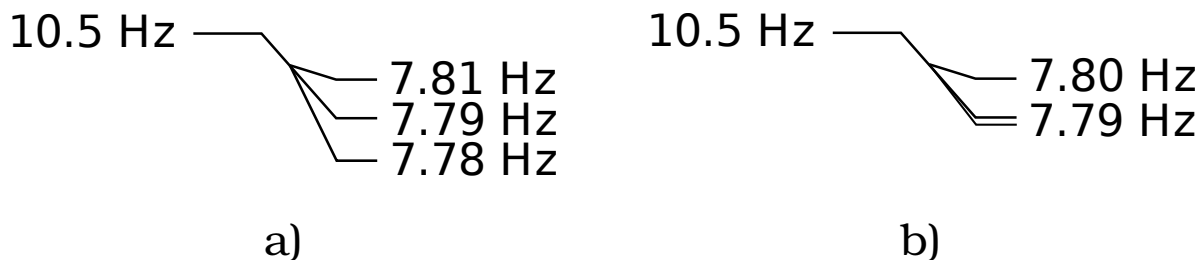


Рисунок 3.11 — Расщепление первой резонансной частоты при учете неоднородности день-ночь: а) модель атмосферной проводимости Николаенко [17], б) плазмохимическая модель нижней ионосферы ИДГ-22К (см. раздел 1.2.2).

Далее при помощи многокомпонентной плазмохимической модели ИДГ-22К выполнен расчет глобального распределения электронной концентрации в области нижней ионосферы при солнечных вспышках различных классов. При этом для расчета значений электронной концентрации в диапазоне высот 60–100 км скорость образования электрон-ионных пар пересчитывалась в соответствии с увеличением потока солнечного рентгеновского излучения (W [Вт/м²]) в диапазоне 0.5–8 А. На рисунке 3.12 представлены профили электронной концентрации, соответствующие солнечному зенитному углу $\chi = 0^\circ$,

для солнечных вспышек различных классов (различных значений потока солнечного рентгеновского излучения W).

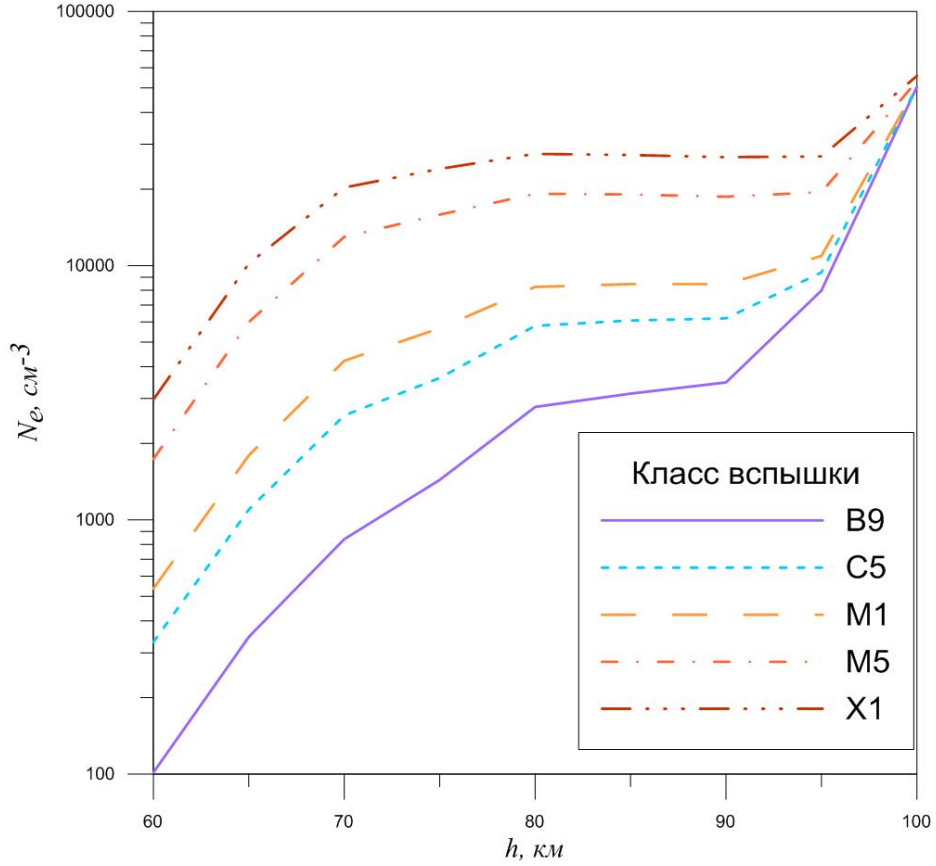


Рисунок 3.12 — Профили электронной концентрации, соответствующие солнечному зенитному углу $\chi = 0^\circ$, для различных значений потока солнечного рентгеновского излучения.

Результаты серии расчетов ШР для солнечных вспышек различных классов представлены на рисунке 3.13. Согласно экспериментальным наблюдениям [134], из-за роста электронной концентрации на высотах 60–100 км во время солнечной вспышки, высота отражения КНЧ радиоволны оказывается ниже, что приводит к росту резонансных частот. На рисунке 3.13 можно отметить, что в области наиболее часто наблюдаемых солнечных вспышек (класса X1 и ниже), увеличение резонансных частот оказывается с хорошей точностью пропорциональным логарифму значения потока солнечного рентгеновского излучения $[W/\text{м}^2]$ по данным ИСЗ GOES.

$$\Delta F_n \sim \log(W). \quad (3.8)$$

Аналогичная зависимость была получена по результатам экспериментальных наблюдений ШР в работе [133], что демонстрирует корректный отклик модели

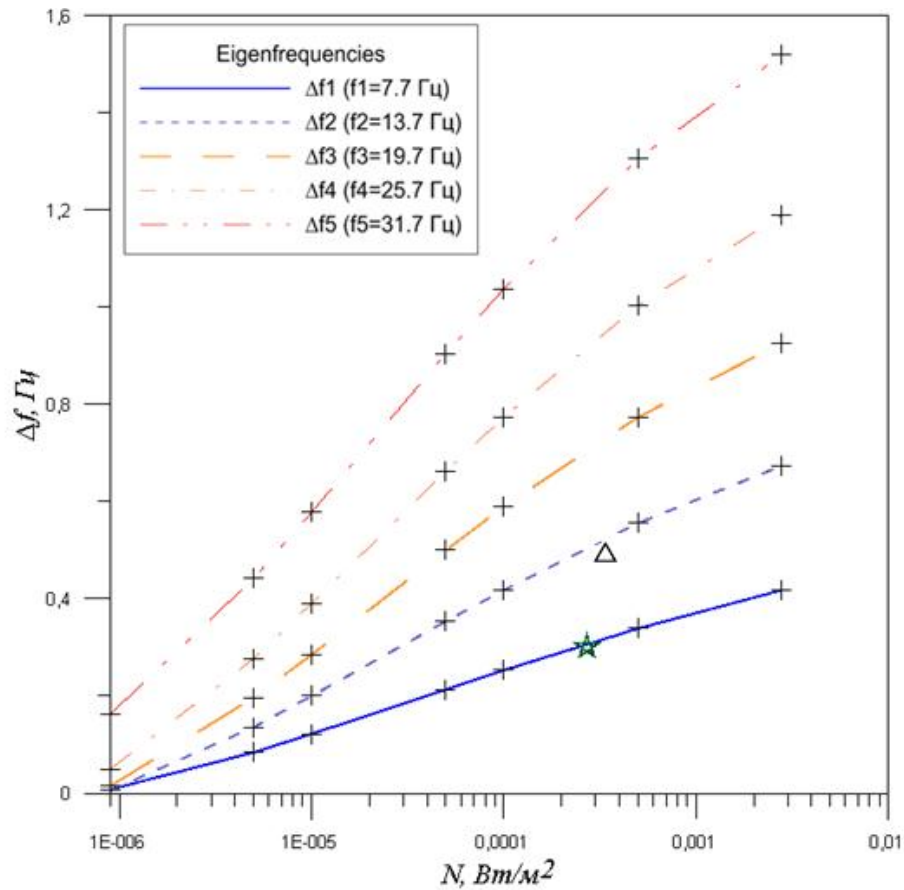


Рисунок 3.13 — Изменение собственных частот резонатора в зависимости от потока солнечного рентгеновского излучения.

нижней ионосферы ИДГ-22К на увеличение потока солнечного рентгеновского излучения. Полученные расчетные результаты ШР опубликованы в работе [61]. Позднее, в работе [120] зависимость (3.8) была проверена на экспериментальных наблюдениях ШР в обсерватории Михнево во время двух вспышек классов X9.4 (6 сентября 2017 г) X8.3 (9 сентября 2017 г). Сравнительный анализ показал, что для солнечной вспышки, произошедшей 9 сентября наблюдаемые увеличения резонансных частот соответствуют результатам численного расчета, в то время, как изменения резонансных частот для вспышки 6 сентября 2017 г оказались пренебрежимо малыми, не соответствующими предсказанным. Полученное несоответствие экспериментальных данных ШР с расчетами свидетельствует о том, что для точного воспроизведения отклика резонансных параметров на солнечную вспышку в модели нижней ионосферы необходимо рассматривать не максимальное значение потока солнечного рентгеновского излучения, но также учитывать динамику спектра ионизации солнечным рентгеном. Кроме того, необходим учет эффектов плазмохимии, связанных с

косвенным влиянием на ионосферу солнечного ветра. Например, одна и также солнечная вспышка может вызвать «опускание» нижней границы дневной ионосферы за счет увеличения потока солнечного рентгеновского излучения, и в то же время «подъем» нижней границы ночной ионосферы за счет уменьшения ионизации галактическими космическими лучами (так называемый Форбуш-эффект) [138].

Модель ИДГ-5К

Описание модели ИДГ-5К содержится в разделе 1.2.2. В данном разделе выполнено тестирование модели нижней ионосферы ИДГ-5К при помощи численного метода на основе FDTD. Результаты расчета для случая невозмущенной ионосферы (10.09.2017, 15.75 UT) представлены в таблице 1. Можно отметить, что в случае спокойных геофизических условий модель ИДГ-5К демонстрирует значительно заниженные значения резонансных частот по сравнению с экспериментальными, однако достаточно хорошо описывает резонансные добротности.

Далее представлен анализ отклика резонансных параметров на рентгеновские солнечные вспышки на основе сравнения наблюдаемых параметров ШР с результатами численных расчетов параметров ШР. Как уже было отмечено, модель ИДГ-5К требует гораздо меньших вычислительных ресурсов по сравнению с моделью ИДГ-22К, что позволяет не только оценить изменения резонансных параметров в момент максимума вспышки, а подробно рассмотреть динамику изменения параметров ШР при развитии солнечной вспышки. Ранее, модель ИДГ-5К уже была протестирована на основе моделирования распространения ОНЧ-НЧ радиоволн при рентгеновских вспышках С и М классов, показав хорошее соответствие с экспериментальными измерениями [91; 92].

Начнем с интерпретации экспериментальных наблюдений. Как уже было отмечено, количественная оценка изменения резонансных параметров во время солнечной вспышки оказывается сложной задачей. С одной стороны, необходимо выбирать достаточно продолжительные солнечные вспышки для того, чтобы их можно было различить на 12-минутных интервалах наблюдения ШР. С дру-

гой стороны, продолжительность солнечной вспышки должна быть не больше нескольких часов для того, чтобы можно было с хорошей точностью исключить влияние изменения глобальной молниевой активности на ШР. В связи с этим, изначально были отобраны солнечные вспышки в период 2016–2021 гг., класса выше $C1$. Для исследования экспериментальных данных была использована методика на основе анализа значения приведенной резонансной частоты:

$$\hat{F}_n = \sum_{i=1} \frac{\sqrt{2}F_i}{\sqrt{i(i+1)}}. \quad (3.9)$$

Методика позволяет значительно сгладить биения резонансных частот, связанные со стохастической природой молниевых разрядов и выделить изменения резонансных частот во время солнечной вспышки. Динамика значений потока солнечного рентгеновского излучения соответствует наблюдениям ИСЗ GOES в диапазонах $\lambda_A = [0.05 - 0.4]$ нм (канал XRS-A) и $\lambda_B = [0.1 - 0.8]$ нм (канал XRS-B). Наблюдения динамики ШР по данным ГФО Михнево показали, что при значениях потока $W < 10^{-6}$ Вт/м² в канале XRS-A и $W < 10^{-5}$ Вт/м² в канале XRS-B, изменения приведенной частоты ШР не наблюдается (рисунок 3.14). Таким образом, для дальнейшего анализа были отобраны солнечные вспышки, представленные в таблице 2.

Таблица 2 — Отобранные солнечные рентгеновские вспышки 2016–2020 гг.

Дата	UT	XRS-A	XRS-B
03.04.2017	14.30	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$9.0 \cdot 10^{-5}$
14.07.2017	1.00	$6 \cdot 10^{-6}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$
07.09.2017	5.00	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$
07.09.2017	6.35	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$
07.09.2017	10.20	$4.37 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
07.09.2017	14.50	$7.7 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
09.09.2017	3.05	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$
09.09.2017	4.30	$2.7 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$
09.09.2017	10.80	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$6.5 \cdot 10^{-5}$
09.09.2017	11.30	$7.8 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$
10.09.2017	15.70	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$

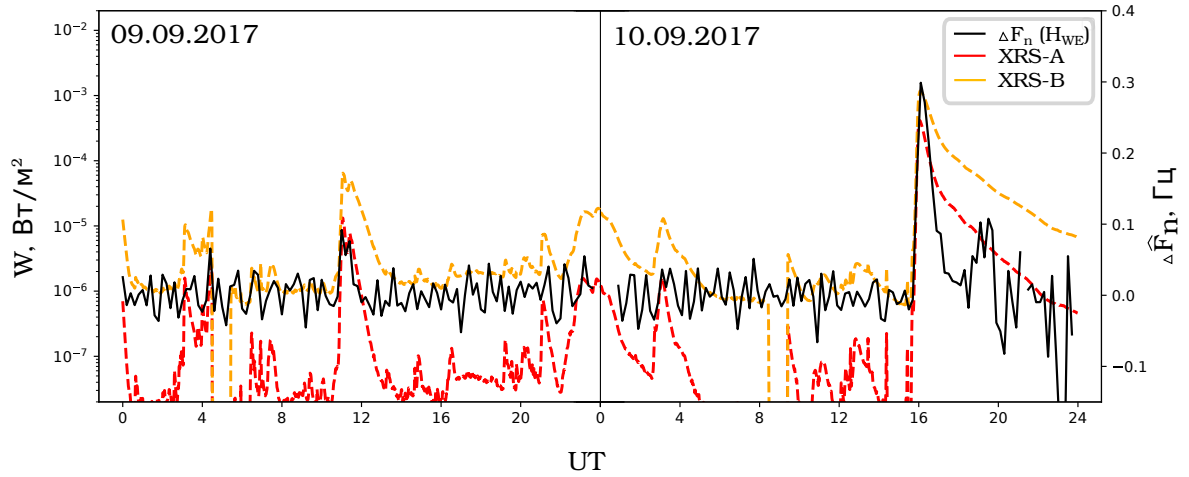


Рисунок 3.14 — Изменение приведенной резонансной частоты $\hat{F}_n$ во время солнечных вспышек. Поток солнечного рентгеновского излучения измерен на ИСЗ GOES в частотных каналах XRS-A и XRS-B.

Также, для вспышек из таблицы 2, выделенных зеленым цветом, был выполнен численный расчет ШР, согласно модели нижней ионосферы ИДГ-5К. Основные расчетные параметры соответствуют разделу 3.1. При этом движением источника за время воздействия на ионосферу солнечной вспышки считается пренебрежимо малым. Ионосфера считается в приближении неоднородной изотропной многокомпонентной (электроны + положительные ионы + отрицательные ионы) плазмы. При помощи ионосферной модели ИДГ-5К насчитаны параметры нижней ионосферы для ряда солнечных вспышек. Значения потока солнечного рентгеновского излучения соответствуют данным ИСЗ GOES. На рисунке 3.15 представлены расчетные и экспериментальные результаты изменения приведенной резонансной частоты компонент H_{WE} и H_{NS} от потока солнечного рентгеновского излучения XRS-B.

Касательно экспериментальных наблюдений, можно отметить, что изменение приведенной резонансной частоты компонент H_{WE} и H_{NS} оказывается различным. Небольшая выборка солнечных вспышек (что связано с периодом низкой солнечной активности), не позволяет построить аппроксимационную кривую зависимости изменения приведенной резонансной частоты от потока солнечного рентгеновского излучения. Таким образом, необходимы более длительные наблюдения динамики ШР, особенно в годы высокой солнечной активности. Расчетные результаты, выполненные по модели ИДГ-5К показали, что модель не описывает изменения резонансных частот во время рассмотрен-

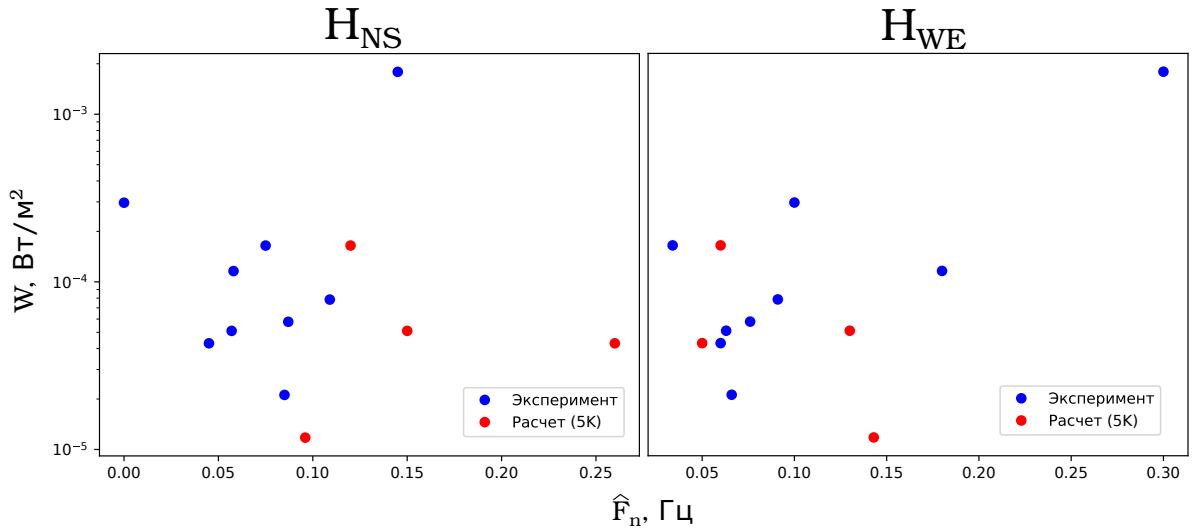


Рисунок 3.15 — Зависимость приведенной резонансной частоты $\hat{F}_n$ от потока солнечного рентгеновского излучения XRS-B.

ных вспышек. Полученная зависимость изменения приведенной резонансной частоты от потока солнечного рентгеновского излучения оказывается немонотонной, что противоречит работам [55; 133; 135]. Кроме того, для мощной вспышки класса X13, 10.09.2017, рост потока солнечного рентгеновского излучения привел к расщеплению первоначальных резонансных пиков (рисунок 3.16), что также не наблюдалось в эксперименте.

Выводы к главе 3

Численные расчеты ШР с учетом различных моделей мезосферы-нижней ионосферы позволили получить следующие результаты:

- рассмотренные глобальные эмпирические модели нижней ионосферы привели к неверным параметрам ШР даже для спокойных геофизических условий. Это говорит о том, что радиофизическая модель нижней ионосферы Уайта не применима для КНЧ диапазона, а физическая модель IRI неверно описывает электронную концентрацию нижней ионосферы;
- расчетные резонансные частоты, полученные с учетом глобальной физической модели WACCM показали хорошее согласие со средними

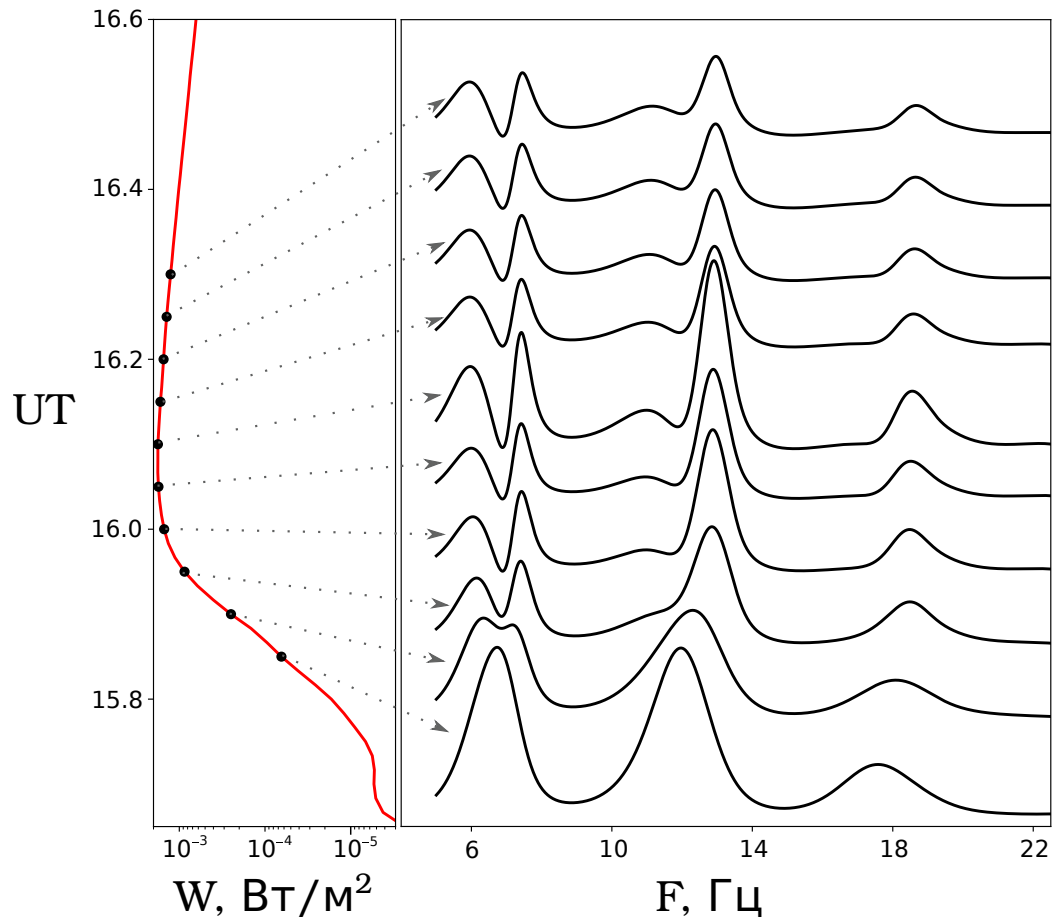


Рисунок 3.16 — Динамика расчетного КНЧ спектра, во время вспышки класса X13, согласно модели нижней ионосферы ИДГ-5К.

экспериментальными значениями. Резонансные добротности оказались завышенными, что свидетельствует о необходимости коррекции электронно-ионного состава нижней ионосферы.

- Полученная в результате серии расчетов сезонная (для 2017 года) и суточная (для 18.01.2018) динамика резонансных частот с учетом модели WACSM оказывается незначительной, по сравнению с экспериментальными наблюдениями. Учет моделей дрейфа глобальной молниевой активности в расчетах ШР также не привел к наблюдаемой в эксперименте динамике резонансных параметров. При этом показано, что неверное описание затухания КНЧ радиоволн в волноводе Земля-ионосфера приводит к невозможности моделирования особенностей КНЧ спектра, связанных с изменением расстояния источник–приемник. Это делает невозможным использование текущей версии модели WACSM

для численных расчетов, с учетом распределения глобальной молниевой активности.

- плазмохимическая модель ИДГ-22К, так же как и модель WACCM, приводит к значениям резонансных параметров близким к эксперименту. Кроме того, модель ИДГ-22К позволила рассчитать изменение резонансных частот, к которому приводит рост потока солнечного рентгеновского излучения во время солнечных вспышек различных классов. Полученная логарифмическая зависимость резонансных частот от потока солнечного рентгеновского излучения подтверждается экспериментальными наблюдениями ШР ряда обсерваторий.
- Расчеты параметров ШР по плазмохимической модели ИДГ-5К в спокойных геофизических условиях привели к заниженным значениям резонансных частот, при этом значения резонансных добротностей соответствуют эксперименту. Расчеты ШР при солнечных вспышках различных классов показали значения изменения резонансных частот, не соответствующие эксперименту. Полученная немонотонная зависимость изменения резонансной частоты от потока солнечного рентгеновского излучения и возникновение дополнительных резонансных пиков при вспышке класса X13 свидетельствуют о необходимости коррекции модели ИДГ-5К.

Глава 4. Экспериментальные наблюдения параметров Шумановских резонансов

Первые попытки экспериментально подтвердить существование резонансных частот оказались неудачными [139]. Позднее оказалось, что проблема заключалась в том, что используемая методика не подходила для выделения из фоновых шумов резонансов со столь слабой добротностью. Существование резонансов было экспериментально обнаружено в работах [7—9], в рамках которых проводился анализ спектра природных шумов в диапазоне от нескольких десятых долей Гц до десятков Гц. При этом дискретное Фурье преобразование выполнялось для 10-минутных интервалов (на тот момент методика Быстрого Фурье Преобразования (БФП) еще не была изобретена). В полученном спектре наблюдалась серия пиков на частотах 8, 14, 20, 26 Гц. Из-за низкого частотного разрешения, параметры резонансных пиков определялись по соответствующим спектру аппроксимационным кривым. Использование аппроксимации исходного спектра позволило впервые оценить добротности частотных пиков (Q_i), которые наблюдались в диапазоне значений 4–6.

Аппаратура регистрации электромагнитного фона в КНЧ диапазоне обычно состоит из двух индукционных катушек для измерения горизонтальных компонент магнитного поля и вертикальной антенны для измерения компоненты электрического поля E_z . Измерение только трех компонент электромагнитного поля из шести возможных было выбрано исходя из результатов теоретических моделей, согласно которым было показано, что в дальней области от источника горизонтальные компоненты электрического поля и вертикальная компонента магнитного поля близки к нулю.

На сегодняшний день существует большое количество обсерваторий, выполняющих мониторинг параметров ШР. Список наиболее известных обсерваторий можно найти в работе [140]. Наиболее значительные отечественные научные достижения в задаче ШР были получены на основе продолжительных наблюдений параметров ШР на территории Российской Федерации в обсерваториях:

- Лехта, Карелия (64° с.ш., 34° в.д.) [141],
- Томского Государственного Университета (56° с.ш., 85° в.д.) [33],

– Карымшина (58° с.ш., 158° в.д.) [141].

Относительно недавно в ГФО Михнево Института Динамики Геосфер РАН также организована станция мониторинга КНЧ радиоволн. Использование в настоящей работе экспериментальных данных ШР, полученных в ГФО Михнево обусловлено несколькими причинами:

- доступность продолжительного массива исходных данных регистрации магнитного поля. Это позволяет работать не только с параметрами ШР, а также с их погрешностями и общим КНЧ спектром;
- наличие информации о характеристиках приемной аппаратуры и методе обработки исходных данных;
- удачное географическое расположение обсерватории по отношению к глобальным грозovým центрам;
- незначительный объем экспериментальных данных ШР других обсерваторий в открытом доступе.

Используемые в настоящей работе исходные данные регистрации горизонтальных компонент магнитного поля в ГФО Михнево получены к.ф.-м.н., в.н.с. лаборатории «Литосферных-ионосферных связей» Института Динамики Геосфер им. академика М. А. Садовского РАН — Покладом Ю. В. На основе авторской методики расчета параметров ШР Покладом Ю. В. получены результаты, представленные в ряде работ [120; 142; 143]. Целью исследования, выполненного в настоящей работе является анализ долгопериодных вариаций ШР в ГФО Михнево на основе новой методики обработки КНЧ данных.

4.1 Параметры аппаратуры регистрации КНЧ сигнала ГФО Михнево

Среднеширотная геофизическая обсерватория Михнево Института Динамики Геосфер РАН расположена в 80 км к югу от Москвы ($54^\circ 57'$ с. ш., $37^\circ 46'$ в. д.). Удаленное расположение обсерватории от городской инфраструктуры позволяет проводить анализ фоновых КНЧ радиосигнала по данным измерения магнитного поля с низким уровнем помех. Кроме того, удачное географическое расположение обсерватории по отношению к глобальным

грозовым центрам позволяет потенциально использовать полученные экспериментальные данные ШР, как для многопозиционного мониторинга глобальной молниевой активности (используя одновременные наблюдения ШР на нескольких станциях), так и для однопозиционного, используя методику покомпонентного анализа горизонтального магнитного поля [144].

Станция измерения ШР в ГФО Михнево оборудована измерительным комплексом ADU-06, а также двумя широкополосными магнитометрами MFS-06 компании Metronix. Магнитометр MFS-06 позволяет проводить измерения магнитного поля в частотном диапазоне 10^{-4} – 10^4 Гц с высокой чувствительностью. В районе первого ШР уровень шума составляет 10 фТл/Гц^{1/2}. Магнитометры расположены горизонтально и имеют направления Север-Юг (H_{NS}) и Запад-Восток (H_{WE}). Суточная динамика резонансных параметров в основном обусловлена дрейфом глобальной грозовой активности, что приводит к изменению поляризации электромагнитного поля. Такое поведение источника вызывает усиление компоненты H_{NS} в утренние и вечерние часы UT во время грозовой активности в Американском и Азиатском регионах соответственно. Усиление компоненты H_{WE} происходит в районе 15–17 UT, во время грозовой активности в Африканском регионе.

Измерительный комплекс ADU-06 оборудован 24-битным аналогово-цифровым преобразователем, оптимизированным для низких частот: от постоянного тока до 1 кГц. Привязка ко времени UT осуществляется при помощи GPS модуля с погрешностью ± 30 нс. Магнитометр MFS-06 на выходе выдает измерения магнитного поля в Вольтах. Обычно, наблюдаемый фоновый сигнал оказывается довольно слабым, и требует предусиления, что оказывается нетривиальной задачей из-за наличия локальных молний, которые могут превышать фоновый сигнал по амплитуде на несколько порядков [145]. С одной стороны, предусиление должно быть достаточно сильным для того, чтобы максимально «растянуть» фоновый сигнал, тем самым повышая точность дискретизации. С другой стороны, необходимо по возможности избегать выхода за пределы динамического диапазона приемной аппаратуры (так называемый уровень насыщения 9.99 В), что приводит к потере информации. В разделе 4.2 описано, каким образом обрабатываются данные, содержащие подобные пропуски данных. Полученный с магнитометра сигнал дискретизируется анализатором ADU-06 с частотой 256 Гц. Временные ряды компонент магнитного поля в Вольтах сохраняются в бинарные файлы формата «.ats». Последующая работа с файла-

ми «.ats» организуется при помощи пакета «Time Series Manipulation Program (TSMP)» (Metronix[©]).

Для анализа полученных КНЧ данных более удобно оперировать частотными характеристиками сигнала, а точнее его резонансными характеристиками. Кроме того, резонансные параметры занимают незначительный объем памяти, по сравнению с данными во временной области.

4.2 Процедура обработки экспериментальных данных в ГФО Михнево

Экспериментальные спектры ШР для электрического и магнитного полей всегда имеют структурную неопределенность. Такая неоднородность кажется закономерной, если вспомнить, что природный КНЧ радиосигнал является суперпозицией КНЧ сигналов, приходящих от случайно распределенных молниевых разрядов. Географическое расположение разрядов, время прихода сигнала, а также амплитуда сигнала являются случайными величинами. Средняя частота молниевых разрядов составляет ~ 100 событий в секунду. При этом резонансные максимумы оказываются трудно различимыми. В процессе накопления данных сигнала происходит спектральное сглаживание, однако это происходит не так быстро. Этот факт непосредственно связан со случайной природой источника. Стоит отметить, что особый вклад вносят относительно редкие интенсивные импульсы от мощных молниевых разрядов, которые относятся к мощным КНЧ импульсам (Q-bursts). Такие разряды возникают с частотой ~ 1 событие в минуту [146]. Очевидно, что усреднение отдельных спектров значительно улучшает структуру ШР спектра, но не исключает структурную неопределенность полностью.

Основная проблема анализа экспериментальных данных заключается в многообразии вариантов обработки фонового электромагнитного сигнала и последующего определения параметров ШР [33; 141; 147—154], а также различной интерпретации полученных результатов. Таким образом, характеристики ШР, зарегистрированные на разных станциях сложно использовать для сравнительного анализа. При исследовании связи солнечной активности с параметрами

ШР по результатам наблюдений ряда обсерваторий в работе [155] было отмечено, что различия резонансных интенсивностей для разных станций могут быть отчасти связаны с проблемами калибровки.

В работе [156] был предложен ряд рекомендаций по унификации обработки экспериментальных данных, на базе которых в настоящем исследовании разработан программный комплекс для обработки КНЧ данных ГФО Михнево.

Алгоритм обработки фонового электромагнитного сигнала можно разбить на 3 важных шага:

- расчет КНЧ спектра,
- исключение из полученного спектра антропогенных помех,
- аппроксимация КНЧ спектра специальной функцией и определение резонансных характеристик согласно полученной аппроксимационной кривой.

Расчет энергетического спектра

Низкий уровень КНЧ сигнала, а также случайная природа молниевых разрядов приводит к необходимости накопления спектральных данных для выделения резонансных пиков. В первых удачных экспериментах, доказавших существование ШР был использован 10-минутный интервал накопления спектральных данных [7]. На сегодняшний день в расчетах КНЧ спектра принято использовать интервал длительностью 10–12 минут. Однако четкий критерий выбора оптимальной длительности временного интервала отсутствует.

Одним из требований проведения дискретного преобразования Фурье является конечность исходного сигнала. В нашем случае мы имеем дело с сигналом природного шума «бесконечной» длины, поэтому результат дискретного преобразования Фурье для такого сигнала будет зависеть от выбранной продолжительности временного ряда данных. Указанный недостаток преодолевается использованием метода модифицированных периодограмм [102]. Данный метод подразумевает разбиение рассматриваемого временного интервала на некоторое количество «окон», расчет модифицированных периодограмм для каждого окна и дальнейшее их усреднение на всем интервале. При этом предполагается

использование пересечения окон, а также применение быстрого преобразования Фурье. Преимущество такого метода заключается в том, что разброс значений интенсивности на заданной частоте при разбиении временного интервала на m окон уменьшается в m раз. При расчетах КНЧ спектра обычно используют окно продолжительностью 10–30 с, что аргументируется необходимостью наличия статистически значимого количества молниевых разрядов в рассматриваемом окне. Однако в литературе отсутствует количественный анализ, определяющий оптимальную длину окна. Подробный анализ выбора оптимальных значений временного интервала, продолжительности окна, а также оконной функции представлены далее.

Полученные КНЧ спектры переводятся в единицы $\text{пТл}^2/\text{Гц}$ при помощи калибровочной функции магнитометра MFS-06. На рисунке 4.1 хорошо видно, что используемая аппаратура позволяет различать первые 5 ШР. При этом в

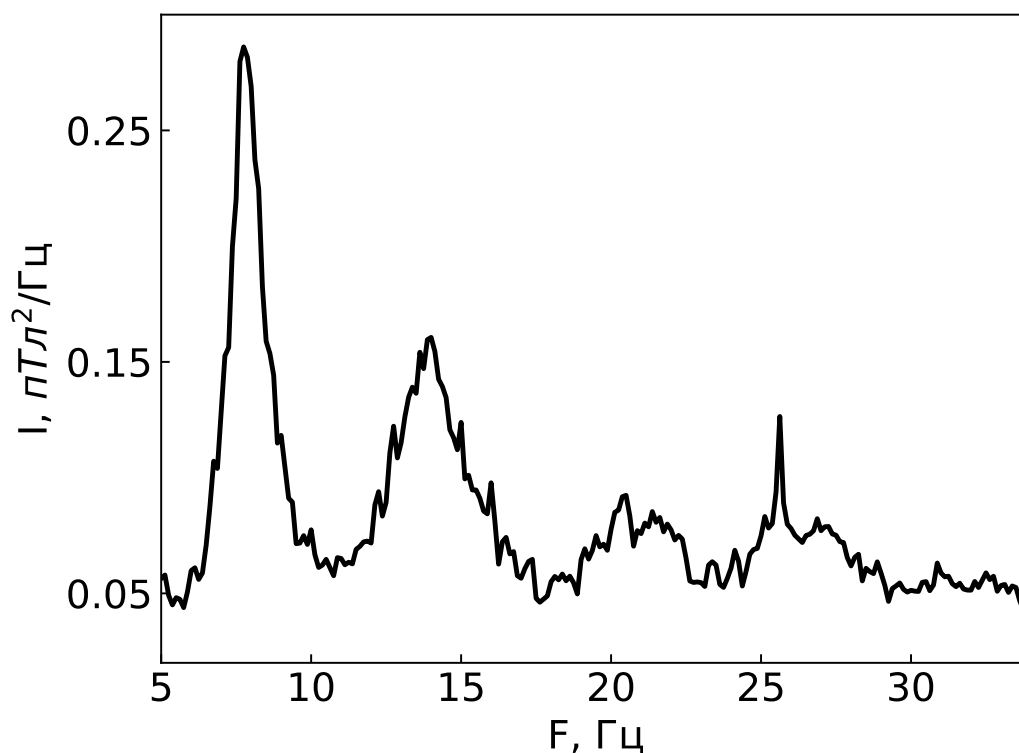


Рисунок 4.1 — Энергетический спектр компоненты H_{NS} для 5 UT, 10.01.2018.

КНЧ спектре присутствуют только два узкочастотных пика: на частоте 50 Гц и менее значимый на частоте 25.6 Гц (в области 4-ого ШР). Так как на данном этапе выполняется анализ только первых 3 резонансных пиков, это избавляет нас от необходимости выполнять процедуру исключения узкочастотных помех из рассматриваемого диапазона КНЧ спектра.

Аппроксимация энергетического КНЧ спектра

Для построения аппроксимационной кривой КНЧ спектра необходима нелинейная аппроксимация, которая минимизирует среднеквадратичную ошибку по сравнению с измеренными данными. Кроме того, аппроксимационная кривая позволяет с хорошей точностью получить значения параметров ШР. Аппроксимация спектра сводится к обычной задаче оптимизации. При этом данный этап обработки КНЧ данных является наиболее значимым, так как имеет целый набор свободных параметров, а именно:

- вид аппроксимационной функции,
- метод численной оптимизации,
- начальные резонансные параметры,
- частотный диапазон.

В работе [156] была предложена двухступенчатая процедура аппроксимации КНЧ спектра, и проведен подробный анализ параметров. При этом были определены наиболее оптимальные параметры для процедуры аппроксимации.

Стоит отметить, что, в большинстве экспериментальных работ резонансные характеристики определяются по энергетическому спектру, например [9; 157]. Однако в ряде работ [147; 158; 159], в том числе и в работе [156], аппроксимационная кривая, а также определение резонансных параметров выполняется по амплитудному спектру. Кроме того, в работах [134; 147; 156; 160] используется Лоренцева кривая с дополнительной линейной поправкой. Такая разница в подходах приводит к разным значениям резонансных добротностей (Q_i), а также интенсивностей (I_i). Путаница возникает из-за того, что обладая низкой добротностью, резонансные пики накладываются друг на друга, и аппроксимацию спектральных пиков необходимо выполнять одновременно с учетом влияния соседних пиков.

В настоящей работе применяется аппроксимация энергетических спектров ($|H_{NS}|^2$ и $|H_{WE}|^2$), а в качестве аппроксимационной функции используется сумма трех стандартных Лоренцевых кривых, аналогично работе [157]:

$$L(f) = \sum_{i=1}^3 \frac{I_i}{\left(\frac{f-F_i}{\sigma_i}\right)^2 + 1}, \quad (4.1)$$

где I_i , F_i , σ_i — пиковое значение интенсивности, резонансная частота и полуширина i -ого резонансного пика, соответственно. Значение ширины резонансного пика σ_i легко привести к более привычному параметру добротности $Q_i = \frac{F_i}{2\sigma_i}$.

Для решения задачи оптимизации существуют достаточно эффективные методы. В случае нелинейной аппроксимации данных стандартным методом считается алгоритм Левенберга–Марквардта [161]. Алгоритм позволяет оперировать среднеквадратичными ошибками полученных параметров, что дает дополнительную информации о достоверности аппроксимационной кривой. Алгоритм на языке Python реализован в библиотеке LMFIT [162].

Так как процесс оптимизации включает в себя использование нелинейных итерационных методов, это в свою очередь требует задания исходных параметров для функции (4.1). Нелинейность делает сходимость метода сильно зависимой от начальных параметров. Пусть I_{i0} , F_{i0} и σ_{i0} — исходные значения параметров аппроксимационной функции. Согласно [49] суточный ход резонансных параметров оказывается неизменным в пределах одного месяца, что определяется суточным движением глобальных грозовых центров). Таким образом, обрабатывая месячный массив данных в работе применяется двухступенчатый метод расчета параметров аппроксимационной функции, аналогично работе [156]. В качестве исходных значений принимаются параметры I_{i0} , F_{i0} и σ_{i0} из работы [163], которые примерно соответствуют средним значениям параметров ШР. Используя стандартные значения параметров на первой итерации рассчитываются резонансные характеристики ШР для каждого дня текущего месяца. Далее, рассчитываются среднемесячные резонансные характеристики для каждого 12-мин интервала в сутках. В результате получается среднемесячная суточная динамика значений I_{i0} , F_{i0} и σ_{i0} . Полученные на первой итерации среднемесячные аппроксимационные параметры (кроме значений I_{i0}) используются на второй итерации в качестве исходных для поиска аппроксимационных функций для конкретного дня месяца. Это позволяет учесть сезонные особенности резонансных параметров, а также лучше аппроксимировать сильно зашумленные спектры. Отдельно стоит отметить выбор частотного диапазона, на котором выполняется аппроксимация. Из-за формы аппроксимационной функции края выбранного спектрального диапазона могут существенно повлиять на итоговые значения резонансных параметров. Таким образом, для обеспечения хорошей сходимости аппроксимационного алгоритма важно опре-

делить оптимальный частотный диапазон. В данном случае по аналогии с работой [156] выбирается частотный диапазон: 6 Гц–24 Гц.

Стоит отметить, что даже с учетом двухступенчатого метода, алгоритму не всегда удается подобрать соответствующую кривую. В этом случае на финальной стадии обработки некорректные резонансные данные отфильтровываются.

Анализ основных параметров алгоритма для расчета энергетического спектра

Для определения оптимальных параметров расчета энергетического спектра, применительно к данным магнитного поля обсерватории Михнево, проведен анализ влияния следующих параметров: интервала усреднения спектра в диапазоне 10–12 минут, ширины окна в диапазоне 2–32 сек, а также оконной функции. При этом мерой корректности служат полученные в результате обработки параметры ШР, а также их среднеквадратичные ошибки.

Ширина окна

Анализ влияния ширины окна на рассчитанные параметры ШР выполнен для января 2019 года. Для того, чтобы исключить влияние пропусков данных, вызванных выходом за пределы динамического диапазона приемной аппаратуры (что не было сделано в работе [156]), сперва были отобраны дни не содержащие таких значений. В данном случае для расчета дискретного Фурье преобразования используется алгоритм быстрого преобразования Фурье. Для этого необходимо, чтобы оконная выборка содержала 2^n , ($n \in N$) значений. Для того, чтобы избежать необходимого дополнения окна нулями до нужного количества значений, суточные данные разбивались на окна с количеством значений равному степени 2. С учетом частоты дискретизации компонент магнитного поля для обсерватории Михнево $f_s = 256$ Гц были отобраны следующие значения

ширины окон: 2 с (2^9 значений), 4 с (2^{10} значений), 8 с (2^{11} значений) и 16 с (2^{12} значений). В качестве интервала усреднения данных был выбран 12 мин интервал, содержащий целое количество вышеупомянутых окон. Это необходимо для исключения влияния потери исходной информации из-за размера окна. Стоит отметить, что при применении метода модифицированных периодограмм используется пересечение окон, равное половине длины одного окна [102]. Это позволяет добавить к сравнительному анализу еще одно значение ширины окна — 32 с (2^{13} значений). Для всей серии расчетов использовалась оконная функция Ханна.

При помощи вышеописанной методики был проведен расчет суточной динамики резонансных параметров для отобранных дней при различной ширине окна. В результате, для всех значений ширины окна были получены одинаковые (в пределах погрешностей) параметры ШР. При этом наименьшее окно шириной 2 с дало наиболее значительные значения погрешностей при построении аппроксимационной функции, причем для большого количества временных интервалов аппроксимационная функция была не найдена. При увеличении ширины окна погрешность определения аппроксимационной функции уменьшается. На рисунке 4.2 изображена среднемесячная (Январь, 2019) погрешность определения первой резонансной частоты в зависимости от выбранной ширины окна для компоненты H_{NS} . Аналогичная зависимость наблюдается для остальных резонансных параметров. Наибольшее окно 32 с оказывается предпочтительным с точки зрения минимизации величины погрешности. Однако не стоит забывать, что при наличии пропусков данных, вызванных выходом за пределы динамического диапазона приемной аппаратуры, окно исключается целиком, что приводит к значительной потере данных при выборе самого большого окна. В связи с этим необходимо определить компромиссное значение ширины окна. На рисунке 4.2 можно отметить, что для окон длиннее 8 с значение погрешности уменьшается незначительно. Таким образом, для данных магнитного поля обсерватории Михнево окно шириной 8 с оказывается оптимальным с точки зрения компромисса между точностью и возможной потерей информации.

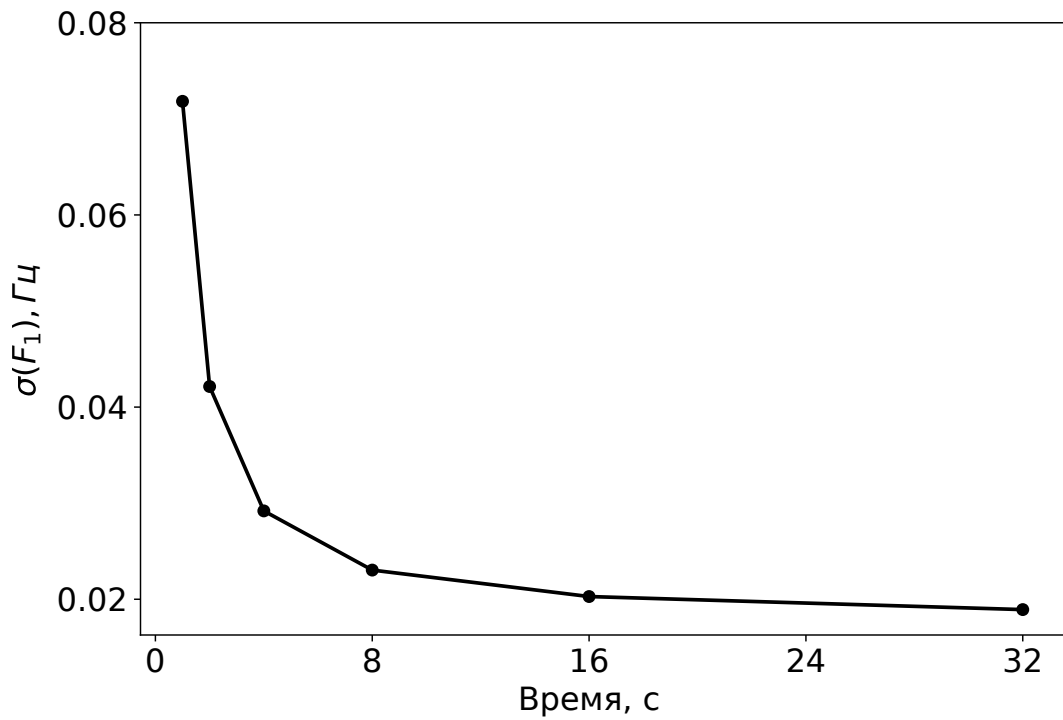


Рисунок 4.2 — Среднемесячное значение погрешности определения первой резонансной частоты для различных значений ширины окна (Январь, 2019) для компоненты H_{NS} .

Продолжительность интервала накопления данных

Еще одним важным параметром при расчете КНЧ спектра является интервал усреднения спектральных данных. Маленький интервал приведет к шумному спектру и соответственно большим погрешностям при аппроксимации. При более продолжительных временных интервалах КНЧ спектр сглаживается, однако при этом теряется разрешение динамики данных ШР во времени, что приводит к невозможности анализа кратковременных вариаций ионосферной плазмы. В качестве примера на рисунке 4.3 изображена суточная динамика частоты второго ШР 22.03.2020 для компоненты H_{NS} для двух интервалов усреднения. Можно отметить, что оба интервала дают одинаковое среднесуточное значение резонансной частоты и качественно похожую суточную динамику. Однако в отдельных точках разница полученных значений оказывается существенной. Не смотря на то, что погрешности аппроксимации оказываются немного большими для 10-минутного интервала, они не объясняют настолько сильные мелкомасштабные биения. В связи с этим, можно предполо-

жить, что наблюдаемые биения связаны со стохастической природой отдельных локальных центров молниевой активности. Таким образом, анализ резонансных параметров на коротких временных масштабах (< 10 минут) не характеризует глобальные изменения ШР. В связи с этим для обработки данных обсерватории

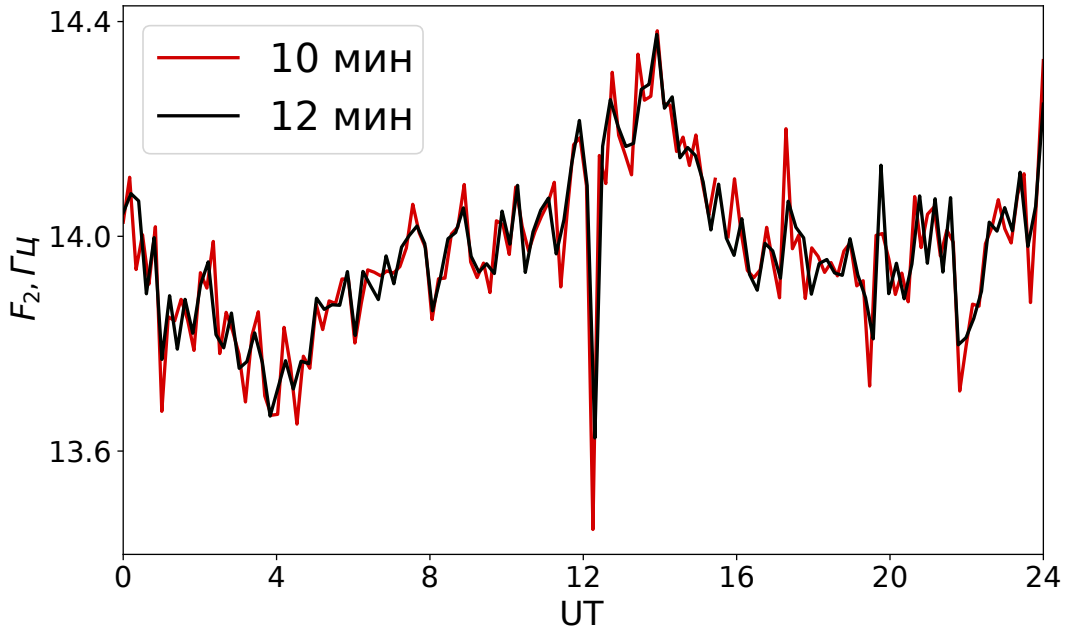


Рисунок 4.3 — Суточные вариации второй частоты ШР при разных интервалах накопления данных для магнитной компоненты H_{NS} , 22.03.2020.

Михнево (аналогично работе [15]) выбран 12-минутный интервал.

Вид оконной функции

Для проверки влияния типа оконной функции на полученные результаты были протестированы следующие наиболее используемые для спектрального анализа оконные функции: Бартлета (треугольная), Ханна, Хамминга и Блэкмэна [164]. По результатам тестовых расчетов можно отметить пренебрежимо малое влияние оконной функции на расчетные параметры ШР. При этом наименьшую погрешность при использовании пересечения окон равному половине ширины окна (в методе модифицированных периодограмм) демонстрируют функции Ханна и Хамминга. Наибольшую погрешность показывает

треугольная функция Бартлета. Для процедуры обработки данных обсерватории Михнево далее применяется оконная функция Ханна.

4.3 Анализ динамики резонансных характеристик по данным ГФО Михнево

Проведенный анализ параметров для расчета КНЧ спектра позволил выявить их оптимальные значения для обработки данных магнитного поля ГФО Михнево:

- ширина окна — 8 с,
- интервал усреднения данных КНЧ — 12 минут,
- пересечение окон, равное полуширине окна,
- оконная функция Ханна.

Описанный алгоритм обработки КНЧ спектра и расчет ШР по данным горизонтальных компонент магнитного поля ГФО Михнево реализован программно на языке Python и доступен на сайте https://github.com/NickolasRage/schumann_experiment.

При помощи разработанного кода была выполнена обработка данных магнитного поля ГФО Михнево за 2016–2020 гг, представленная далее.

4.3.1 Суточные и сезонные вариации ШР

Глобальная молниевая активность имеет тенденцию повторяться в течение суток. Оптические спутниковые наблюдения (Optical Transient Detector, Lightning Imaging Sensor) [123] показали, что пик активности глобальных грозовых центров происходит в 15–17 локального времени (Local Time — LT). Так как энергия КНЧ спектра оказывается пропорциональной уровню молниевой активности, согласно работе [165], то сравнивая временную динамику интенсивности КНЧ спектра и результаты спутниковых наблюдений, можно определить гипотетическое расположение глобальных молниевых центров.

На рисунке 4.4 изображена суточная динамика средней сезонной спектральной энергии в области первых трех ШР за 2018 год. Можно отметить, что

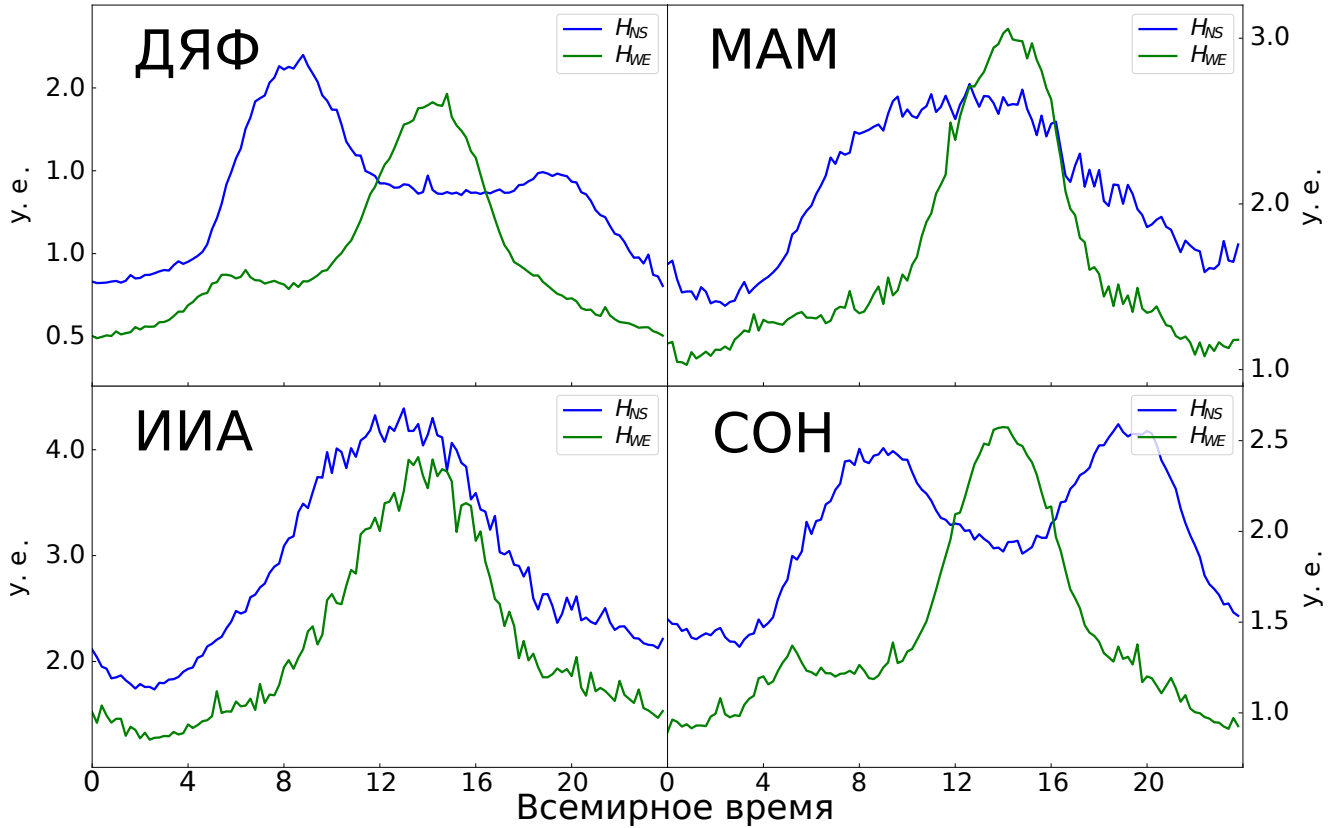


Рисунок 4.4 — Усредненная суточная динамика спектральной энергии области первых трех ШР для зимних (Декабрь, **Я**нварь, **Ф**евраль), весенних (**М**арт, **А**прель, **М**ай), летних (**И**юнь, **И**юль, **А**вгуст), осенних (**С**ентябрь, **О**ктябрь, **Н**оябрь) месяцев 2018 года.

пик молниевой активности в компоненте H_{WE} наблюдается в области 15–16 UT, что соответствует активности грозового центра в Африканском регионе. Также, в компоненте H_{WE} присутствует менее выраженный пик в районе 3–7 UT. Исходя из метки времени, а также отсутствия пика в летние периоды, по данным оптических наблюдений его можно отнести к грозовой активности в области Австралии/Юговосточной Азии.

В осенне-зимний период в северном полушарии в компоненте H_{NS} хорошо прослеживается Южно-Американский грозовой центр (16–24 UT), отсутствующий во время весенних и летних месяцев. Наблюдаемые результаты полностью соответствуют данным оптических наблюдений молниевой активности [123]. Резонансные частоты и добротности также имеют выраженную суточную и

сезонную динамику, однако их поведение оказывается более сложным и обуславливается расстоянием до соответствующих центров молниевой активности, а также их областью покрытия. Для обоснованного анализа вариаций собственных частот и добротностей необходимо привлекать численное моделирование, что является предметом будущего исследования.

4.3.2 Межгодовые вариации ШР

Межгодовая динамика среднемесячных параметров для первых двух ШР за период 2016–2020 представлена на рисунках 4.6(в)–4.6(з). Хорошо прослеживаются ежегодные качественно повторяющиеся сезонные вариации ШР, являющиеся следствием сезонного тренда интенсивности глобальной молниевой активности (рисунок 4.6(а)), полученного согласно данным системы мониторинга системы World Wide Lightning Local Network (WWLLN; wwlln.net) (выбранные области основных грозовых центров изображены на рисунке 4.5). Наибольшая интенсивность молниевой активности наблюдается в области Северной Америки, что также можно отметить по значениям интенсивности КНЧ спектра компоненты H_{NS} . Такое поведение оказывается противоречащим спутниковым наблюдениям [123], в которых наибольшей интенсивностью характеризуется Африканский регион. Годовую динамику ШР, согласующуюся с данными ГФО Михнево также можно наблюдать по данным других средне- и низкоширотным станциям наблюдения ШР, например в работах [155; 166]. Межгодовая динамика первой резонансной частоты F_1 для обеих компонент магнитного поля, а также резонансных добротностей Q_1 , Q_2 для компоненты H_{WE} коррелируют с потоком солнечного рентгеновского излучения, аналогично наблюдениям [167]. Также, корреляция с потоком солнечного рентгеновского излучения наблюдается для интенсивностей ШР (I_1 , I_2 , I_3), согласуясь с наблюдениями [155; 167]. Динамика потока солнечного рентгеновского излучения на рисунке 4.6(б) соответствует данным ИСЗ GOES. Межгодовая динамика остальных параметров ШР за период 2016–2020 гг является неочевидной и требует более длительных наблюдений.

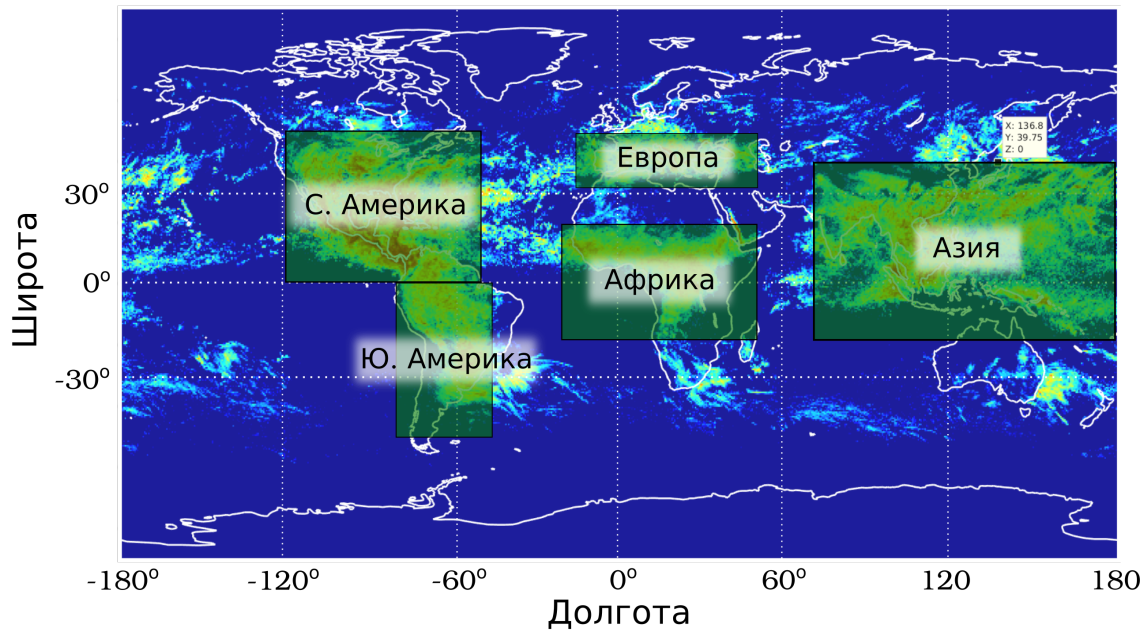


Рисунок 4.5 — Распределение среднемесячной интенсивности молниевых разрядов по данным системы мониторинга WWLLN (Сентябрь 2014 г.). Квадратами выделены основные центры глобальной молниевой активности.

На рисунках 4.7 и 4.8 изображена суточная динамика двух первых резонансных частот компоненты H_{NS} для Января 2016–2020 гг. Хорошо заметна ежегодная качественная повторяемость суточной динамики, однако разброс значений для отдельных дней существенно различается для каждого года. Также можно отметить систематический сдвиг первой резонансной частоты для различных годов. Аналогичное поведение ШР было продемонстрировано в работе [168]. Для объяснения эффекта предложено две гипотезы, а именно: меридиональное смещение глобальных грозовых центров [169] и глобальное изменение высоты ионосферы [170]. При глобальном изменении высоты нижней ионосферы стоит ожидать единообразный одновременный сдвиг всех резонансных частот. На рисунке 4.8 видно, что вторая резонансная частота варьируется из года в год более сложным образом. Однако учитывая связь 11-летнего цикла солнечной активности с межгодовыми вариациями параметров ШР, показанную в работе [167], а также пока небольшой объем данных наблюдения ШР в ГФО Михнево можно заключить, что более вероятной причиной наблюдаемого смещения первой резонансной частоты является именно изменение состояния нижней ионосферы. Для более детального сравнения данных ШР в ГФО Михнево с долгопериодной солнечной активностью необходимы: мониторинг ШР

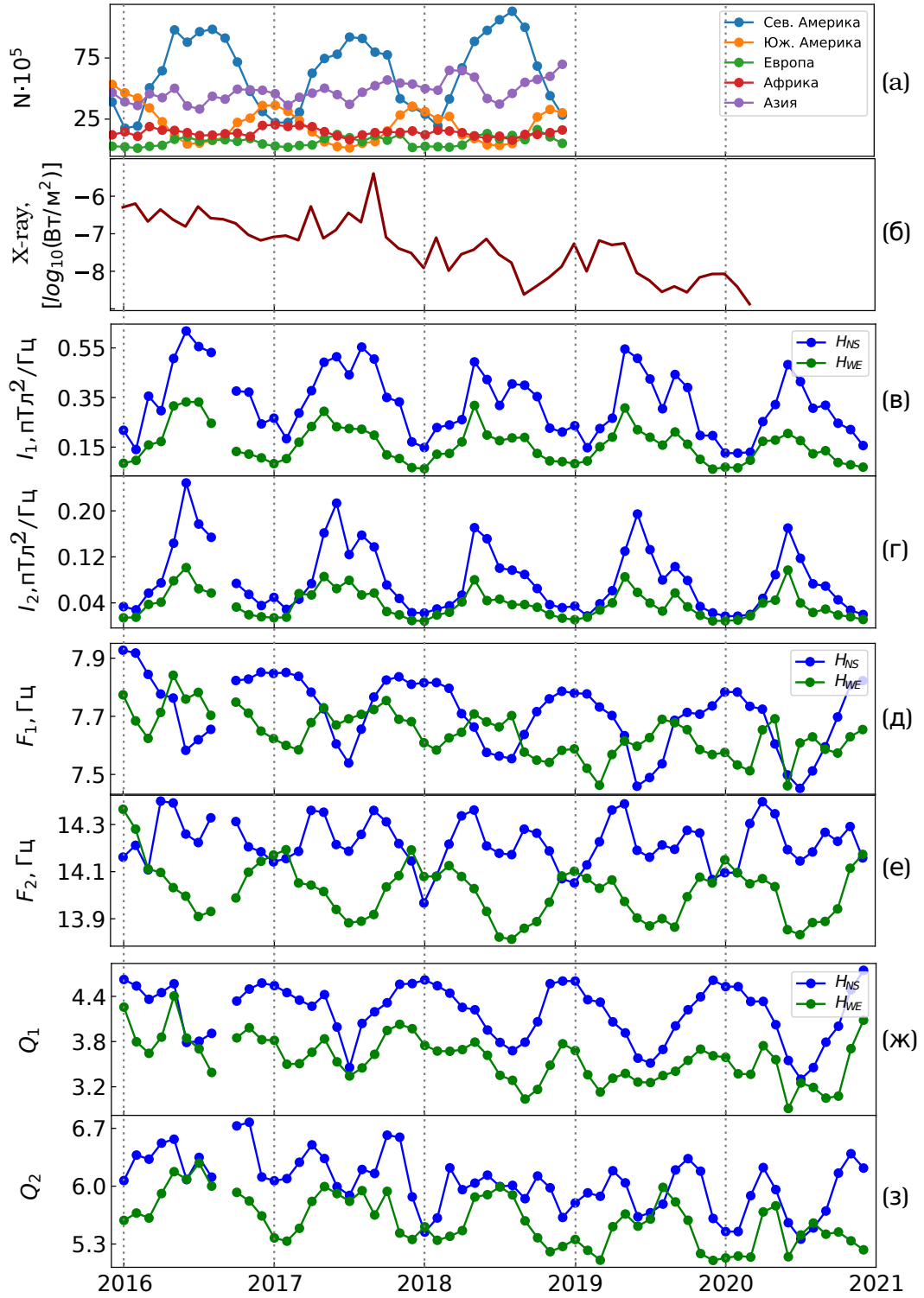


Рисунок 4.6 — Динамика параметров первых двух ШР в 2016–2020 гг согласно регистрации горизонтальных компонент магнитного поля в ГФО Михнево. (а)

Среднемесячные значения интенсивности молниевых разрядов в областях основных грозовых центров; (б) Среднемесячные значения потока солнечного рентгеновского излучения по данным ИСЗ GOES; Среднемесячные значения резонансных интенсивностей (в, г), частот (д, е) и добротностей (ж, з).

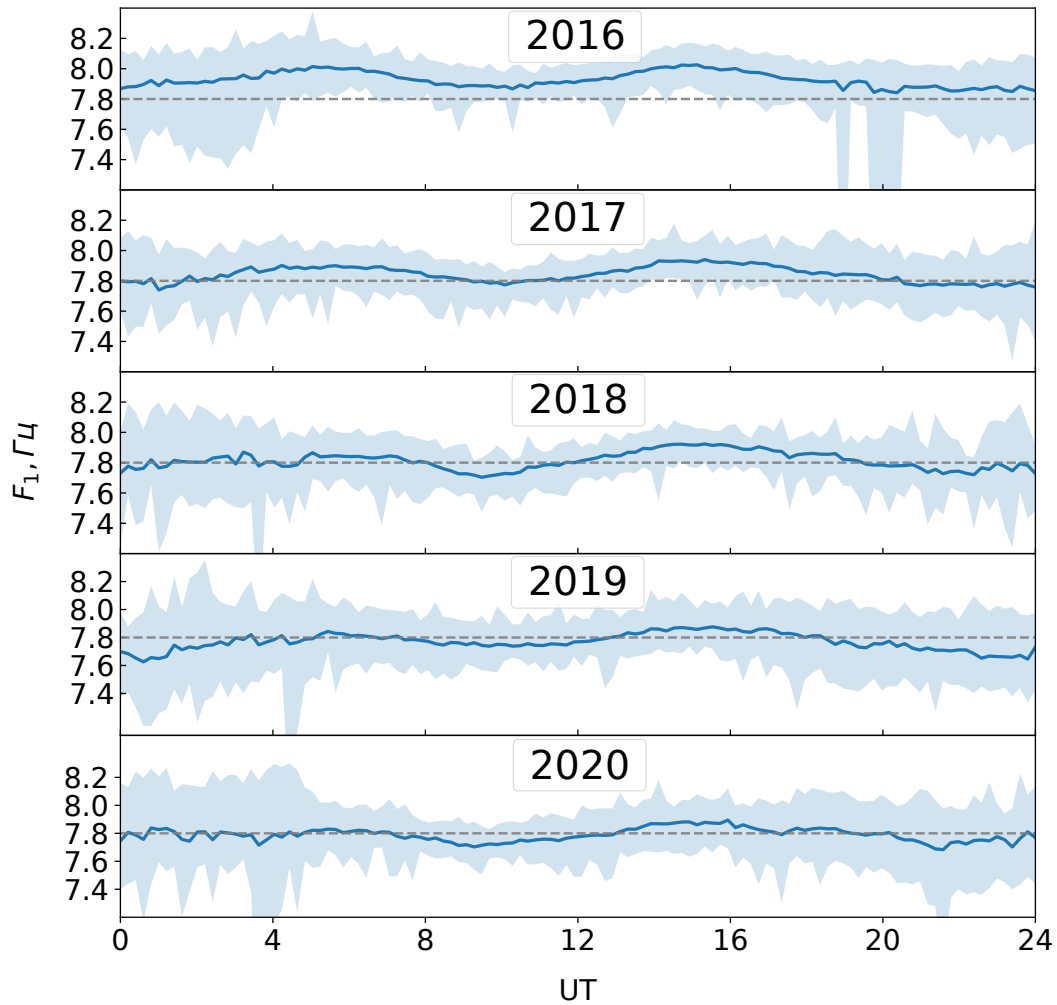


Рисунок 4.7 — Усредненная суточная динамика первой резонансной частоты для января 2016–2020 гг для компоненты H_{NS} .

продолжительностью не менее одного 11-летнего солнечного цикла, а также привлечение численных расчетов с учетом неоднородности день-ночь.

4.3.3 Спектральный анализ долгопериодных колебаний параметров ШР

Крупномасштабные планетарные волны представляют собой осцилляции метеорологических параметров с периодами 2–30 дней, возникающие в средней атмосфере. Такие волны можно классифицировать на вынужденные и свободные. В случае вынужденных колебаний планетарные волны возникают за

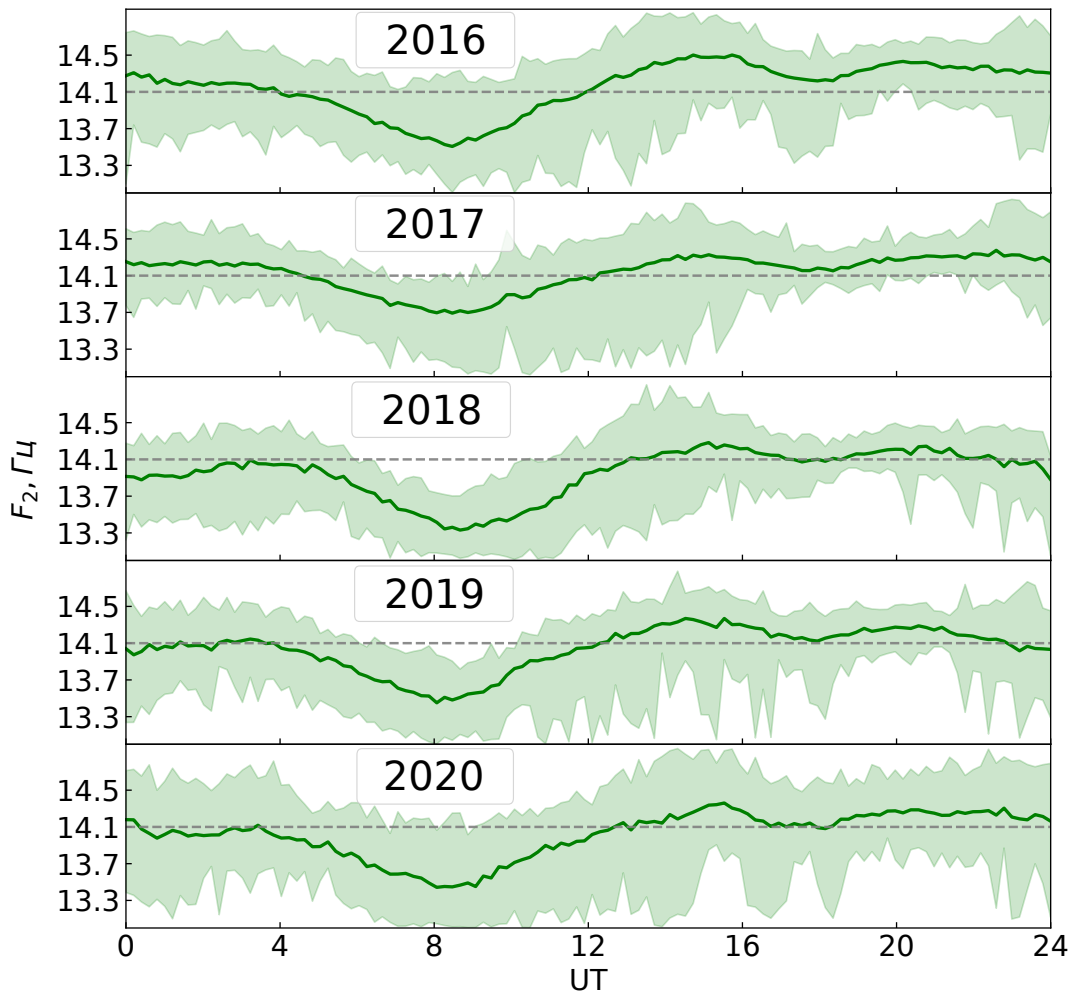


Рисунок 4.8 — Усредненная суточная динамика второй резонансной частоты для января 2016–2020 гг для компоненты H_{NS} .

счет обтекания рельефа Земли и температурного градиента [171], в то время, как свободные колебания обуславливаются резонансным откликом на атмосферные возмущения. Планетарные волны могут быть, как стационарными по отношению к Земной поверхности, так и распространяющимися в зональном направлении на запад или восток. Наиболее существенными являются квази-стационарные волны Россби [171], распространяющиеся из тропосферы в вышележащие атмосферные слои, характеризующиеся максимумом активности в зимние месяцы. Вне экваториальной области бегущие планетарные волны имеют периоды 2, 5, 10 и 16 дней. Экваториальные бегущие волны также разделяются на волны Кельвина и распространяющиеся в западном направлении гравитационные волны Россби [172]. Подробное описание планетарных волн в ионосферной плазме представлено в монографии [173].

Результаты изучения крупномасштабных планетарных волн различного типа представлены в большом количестве экспериментальных наблюдений параметров средней атмосферы по данным спутниковых и наземных измерений [172; 174—179]. При определенных условиях амплитуда планетарной волны экспоненциально растет с падением плотности и достигая мезосферы и нижней термосферы приводит к значительным температурным флуктуациям этой атмосферной области. В работе [180] было отмечено, что планетарные волны вызывают возмущения концентрации частиц атмосферы, тем самым модифицируя электрофизические характеристики нижней ионосферы за счет изменения баланса ионизационных процессов, а также значения частоты столкновения электронов с нейтральными частицами. Таким образом, в качестве одного из способов мониторинга планетарных волн может выступать наблюдение за характеристиками распространения электромагнитных волн ОНЧ радиодиапазона. Изначально в работе [181] анализ характеристик распространения ОНЧ радиоволн был использован для детектирования лунных приливов. По аналогии, в работах [182; 183] при помощи автокорреляционного анализа характеристик распространения ОНЧ радиоволн было обнаружено присутствие бегущих планетарных волн в области нижней ионосферы. При этом было отмечено, что мониторинг ОНЧ оказывается полезным инструментом для изучения стратосферно-ионосферного взаимодействия, и проникновения планетарных волн в область ионосферы.

В работе [184] рассматривались характеристики распространения ОНЧ радиоволн продолжительностью 1.5 года, подкрепленные моделированием распространения радиоволн при помощи программного пакета LWPC. Полученные результаты позволили получить сигнатуры планетарных волн, соответствующие спутниковым наблюдениям. При этом было получено, что осцилляции с квази 16-дневным периодом оказались наиболее значительными, особенно в зимний период. Аналогичные выводы были получены в работах [185; 186]. В работе [87] был выполнен спектральный анализ амплитуд зарегистрированных в ГФО Михнево сигналов от различных станций ОНЧ радиоизлучения. Авторы отмечают наличие в полученных периодограммах влияния планетарных волн с периодами 1.5-3 дней, 5-8 дней, 8-11 дней, соответствующие бегущим волнам Россби.

Однако как уже было отмечено в настоящей работе, оперирование данными характеристик распространения ОНЧ радиоволн для изучения харак-

теристик атмосферы имеет ряд недостатков, основным из которых является ограниченный набор существующих радиотрасс. В изотропном приближении высота отражения определяется из обращения в нуль вещественной части показателя преломления:

$$\mu = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_e^2}}, \quad (4.2)$$

где ω_p — плазменная частота, ω — круговая частота радиоволны, ν_e — эффективная частота столкновения электронов с нейтралами. При помощи стандартной модели нижней ионосферы Уайта (см. раздел 1.1.1) можно оценить высоту отражения радиочастот 7 Гц и 20 кГц для типичных ночных и дневных условиях (рисунок 4.9). Можно отметить, что высота отражения

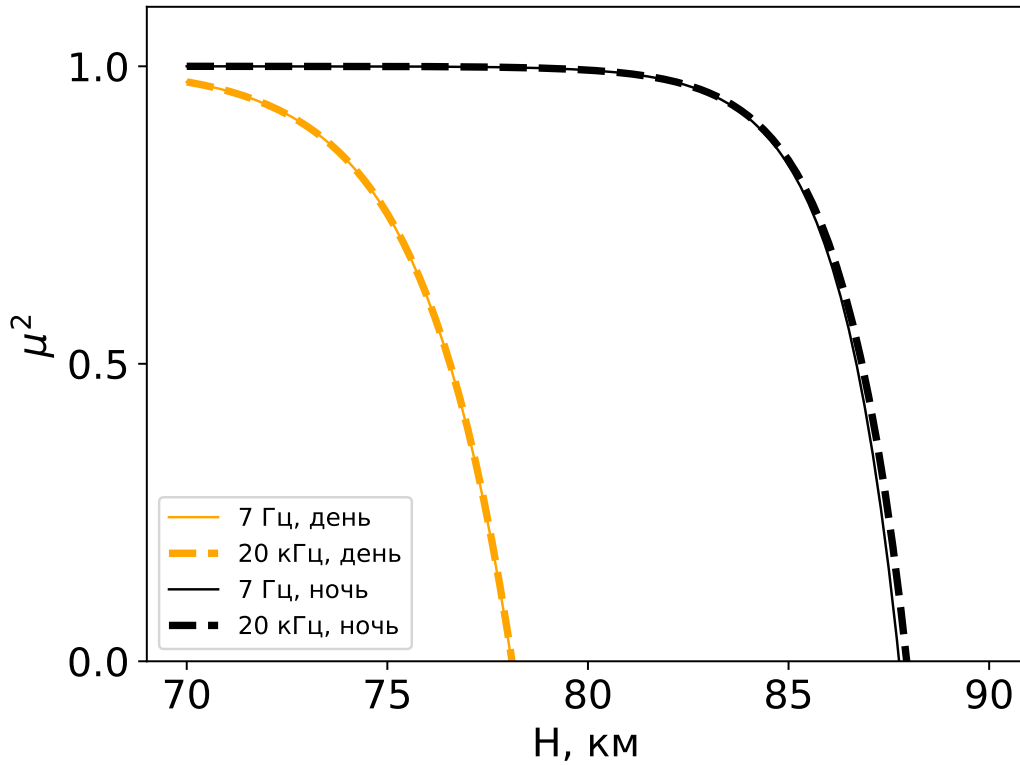


Рисунок 4.9 — Профиль квадрата показателя преломления радиоволн для стандартной дневной и ночной ионосферы Уайта.

для КНЧ–ОНЧ радиоволн для одних и тех же параметров нижней ионосферы оказывается практически одинаковой, что также подтверждается тестовыми численными расчетами методом FDTD (см. раздел 2.2). Таким образом, КНЧ радиодиапазон может быть использован для детектирования планетарных волн аналогично ОНЧ радиочастотам. Основным преимуществом использования

КНЧ диапазона является учет нижней ионосферы целиком, вне зависимости от расположения приемника. Кроме того, как было отмечено в работе [187], а также получено в результате численных расчетов в разделе 3.3, ионная проводимость играет значительную роль в ослаблении КНЧ радиоволны. Можно предположить, что планетарные волны, распространяющиеся в нижней части ионосферной D-области будут наблюдаться по данным амплитуд и добротностей ШР, а волны, проникающие в верхнюю часть D-области ионосферы будут идентифицироваться по данным резонансных частот.

Для оценки влияния планетарных волн на параметры распространения КНЧ–ОНЧ радиодиапазона были рассмотрены несколько трасс распространения ОНЧ радиоволн с приемным пунктом в ГФО Михнево и источниками излучения:

- α_N (11.9 кГц, Новосибирск, Россия [55° с.ш., 84° в.д.]),
- α_K (11.9 кГц, Краснодар, Россия [45° с.ш., 38° в.д.]),
- NAA (24 кГц; Катлер, США [44° с.ш., 67° з.д.]),
- NWC (19.8 кГц; Норт-Уэст-Кейп, Австралия, [21° ю.ш., 114° в.д.]),
- VTX (16.3 кГц, Индия, [8° с.ш., 77° в.д.]),
- GQD (22.1 кГц; Скелтон, Великобритания [54° с.ш., 2° в.д.]),

а также динамика параметров ШР за 2018–2020 гг. Рассматриваемые временные ряды данных горизонтальных компонент магнитного поля имеют значительные пропуски, что накладывает существенные ограничения на использование преобразования Фурье. Это приводит к необходимости использования иного подхода для спектрального анализа данных с неравномерной выборкой. В настоящей работе, аналогично работе [87] используется метода Ломба [188].

Некоторые из полученных периодограмм представлены на рисунках 4.10 и 4.11. Горизонтальными пунктирными линиями обозначены: серым — нормальные моды Россби (5, 10, 16 дней), оранжевым — 7-дневный период.

Начнем с интерпретации результатов периодограмм, полученных согласно наблюдениям ШР.

На рисунке 4.10 приведены периодограммы интенсивности I и собственных частот F для первого ШР. Для компонент H_{NS} и H_{WE} периодограммы интенсивности I оказываются одинаковыми, что исключает наличие волновых процессов, обусловленных молниевой активностью. Таким образом, наблюдаемые на периодограммах волны отражают динамику происходящую в областях мезосферы и нижней ионосферы. В свою очередь периодограммы резонансных

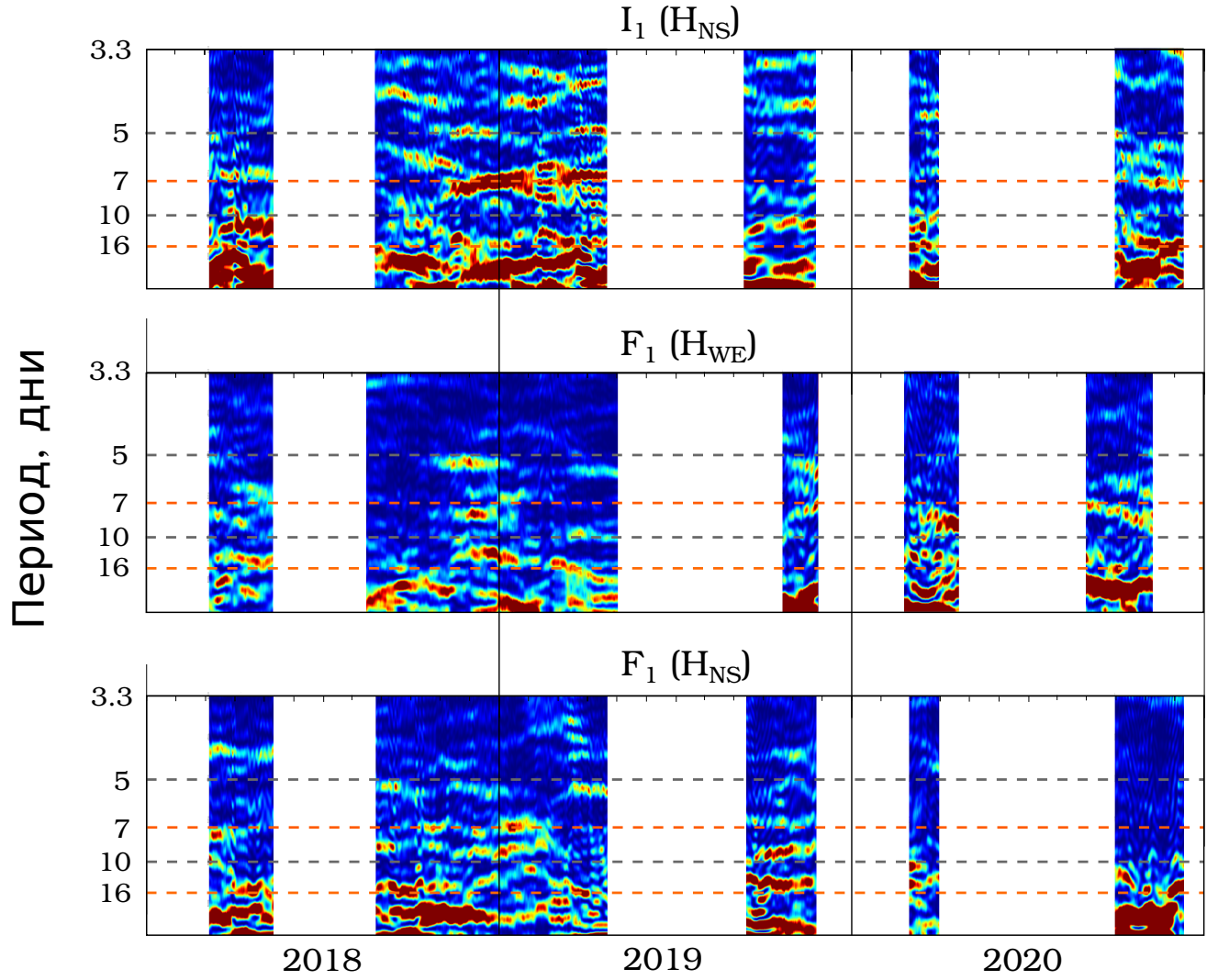


Рисунок 4.10 — Периодограммы характеристик первого ШР по наблюдениям ГФО Михнево.

частот F для компонент H_{WE} и H_{NS} оказываются различными, что указывает на влияние разных планетарных волн на каждую из компонент. В целом, на всех представленных периодограммах на рисунке 4.10 хорошо прослеживаются максимумы в диапазоне периодов 5–7 дней, что может соответствовать, как модифицированной в мезосфере нормальной 5-дневной моде Россби, или 6-дневной волне W1 или Кельвина, согласно работе [172]. Также можно наблюдать локальные максимумы в районе периодов 10, 16 и 20 дней, соответствующие нормальным модам волн Россби.

Для сравнения на рисунке 4.11 представлены периодограммы для некоторых ОНЧ радиотрасс. Отметим, что периодограммы, полученные для источников $Alpha_N$ и $Alpha_K$ оказываются качественно схожими (приведена

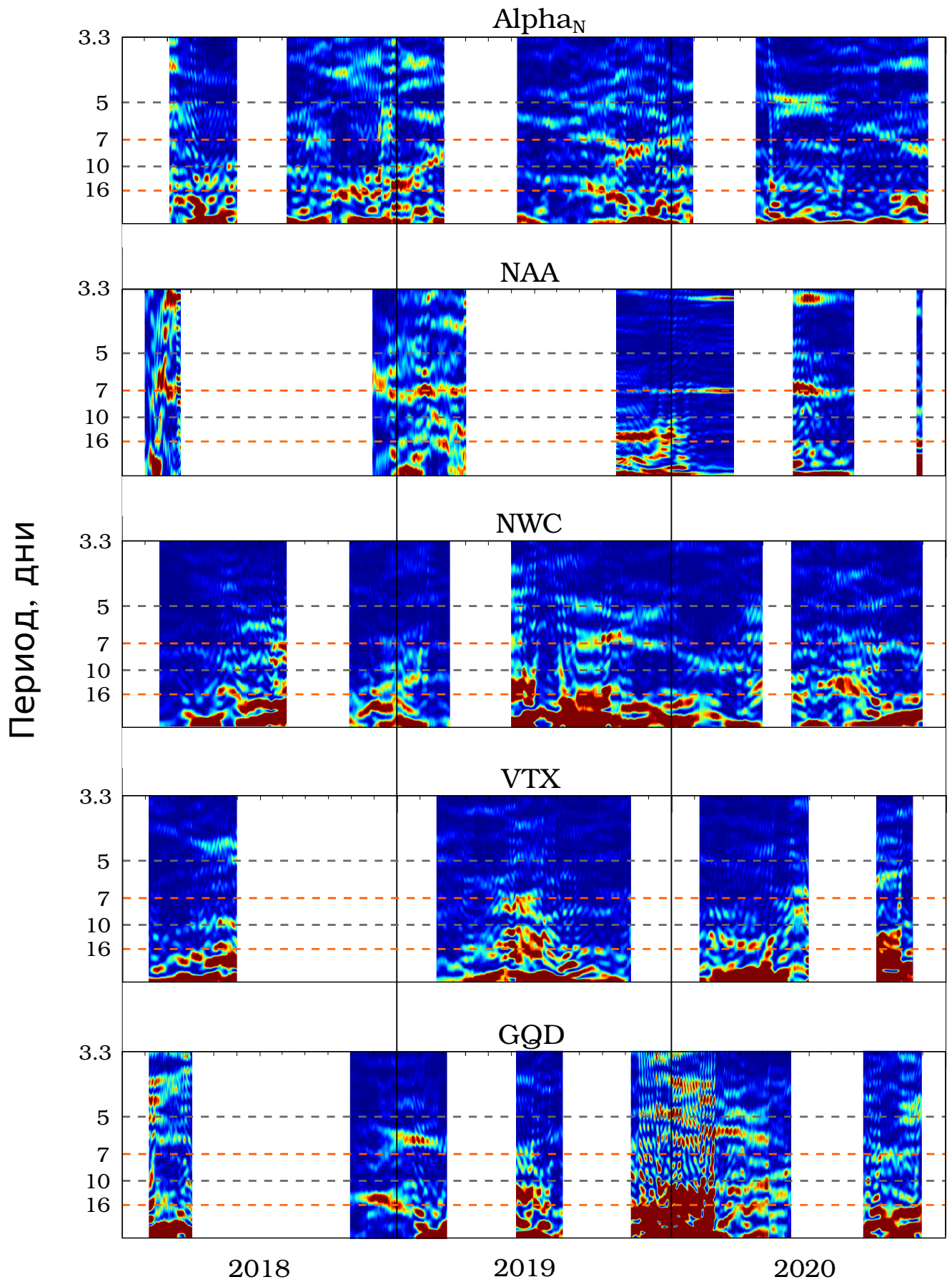


Рисунок 4.11 — Периодограммы амплитуд ОНЧ радиоволн, зарегистрированных в ГФО Михнево, для ряда источников.

периодограмма только для источника $Alpha_N$). Хотя для всех ОНЧ радиотрасс присутствуют максимумы амплитуды для периодов 5–7 дней, 10 и 16 дней, наиболее четкие максимумы 7 и 16 дней наблюдаются в периодограмме источника НАА. Кроме того, во всех периодограммах амплитуд ОНЧ и параметров ШР на рисунках 4.10 и 4.11 можно отметить схожее наличие нескольких близких максимумов с периодами 3–5 дня. При чем сигнатуры планетарных волн, полученные по данным ОНЧ радиотрасс в 2018–2020 гг в целом подтверждают результаты работы [87].

Таким образом, планетарные волны, способные модифицировать область нижней ионосферы, вносят ощутимый вклад в долгопериодную динамику параметров ШР. Причем, периодограммы, построенные согласно пиковым интенсивностям ШР и резонансным частотам имеют качественно различный характер, что может оказаться маркером совокупного воздействия на ряд параметров нижней ионосферы (концентрации заряженных/нейтральных компонент), отвечающих за электрофизические характеристики среды.

4.4 Методика статистического анализа ШР

Стандартным подходом при изучении динамики экспериментальных данных ШР (аналогично разделу 4.3) является анализ усредненных резонансных характеристик, например [155; 167]. Однако в разделе 4.3 был продемонстрирован значительный разброс резонансных параметров относительно среднего значения, который в общем случае не всегда соответствует нормальному распределению. Подобное поведение обуславливается случайной природой молниевых разрядов (рисунок 4.3). Значения максимального отклонения относительно среднего (рисунки 4.4, 4.7, 4.8) не отражают реальную информацию о характере распределения отдельных значений. Это приводит к необходимости использования статистического подхода при изучении динамики ШР.

В настоящей работе в качестве статистического подхода к анализу динамики ШР предлагается использование методики ядерной оценки плотности вероятности (Kernel density estimation), которая представляет непараметрический расчет плотности вероятности соответствующих резонансных параметров.

Такой подход, как правило, применяется для оценки вероятности в случаях, когда необходимо избежать предположений касательно характера распределения случайной величины. Для анализа ШР он применяется впервые.

Расчет плотности вероятности (ПВ) выполняется следующим образом. Сперва находятся максимальное и минимальное значения соответствующего резонансного параметра для рассматриваемой выборки. Значения для резонансных частот по данным ГФО Михнево 2016–2020 представлены в таблице 3. Для Таблица 3 — Вариации резонансных частот ШР по данным ГФО Михнево 2016–2020.

Номер резонансной частоты	Мин. значение, Гц	Макс. значение, Гц
1	7.0	8.5
2	13.0	15.5
3	18.0	23.0
4	24.5	28.5

интервалов из таблицы 3 генерируется равномерная сетка, например, для резонансных частот с шириной 10^{-2} Гц. Затем для определенной ширины частот вычисляется распределение плотности вероятности для каждого резонансного параметра. Хорошо известно, что расчет функции распределения плотности вероятности для временного ряда данных является обратной задачей, которая сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма I рода:

$$\int \Theta(t - \tau)p(\tau)d\tau = V(t), \quad (4.3)$$

где $p(\tau)$ — функция распределения плотности вероятности, $V(t)$ — исходный временной ряд, $\Theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Существует большое количество примеров программной реализации, позволяющих выполнять расчет ядерной оценки ПВ, например, на языке MATLAB при помощи программной функции *ksdensity*, или при помощи библиотек языка Python: *scikit-learn* или *scipy.stats*.

Стоит отметить, что ширина полосы частот существенно влияет на характер итогового распределения ПВ: большое значение приводит к чрезмерному сглаживанию распределения, маленькое значение приводит к появлению большого количества локальных биений. Одним из способов определения оптимального значения ширины полосы частот является минимизация значения

среднего значения интегральной квадратичной ошибки. Библиотека `scikit-learn` содержит реализацию определения оптимального значения ширины полосы частот. Кроме того, использование библиотеки языка Python позволяет интегрировать расчет ядерной оценки ПВ в уже существующий комплекс для расчета параметров ШР (см. раздел 4.2). В качестве ядра используется функция Епанечникова (параболическая).

Для примера рассмотрим суточную динамику ПВ для зимних дней 2017 г (рисунки 4.12–4.14), демонстрирующую наглядность используемого подхода, по сравнению с обычным усреднением. Вероятностный подход имеет ряд преимуществ:

- позволяет получить наглядную оценку дисперсии рассматриваемой величины;
- при анализе долгопериодных вариаций резонансных параметров, детерминированная в течении суток динамика молниевой активности приводит к распределению резонансных параметров, отличному от нормального, что хорошо прослеживается при визуализации распределения ПВ.
- редкие сильные отклонения резонансных параметров, связанные с влиянием мощных локальных молниевых источников оказывают незначительное влияние на распределение ПВ. Это приводит к отличию максимального значения ПВ от среднего значения (рисунки 4.12–4.14).

При помощи вероятностного подхода выполнен анализ долгопериодных вариаций ПВ резонансных параметров, рассчитанных по данным ШР в ГФО Михнево 2016–2020. На рисунках 4.15–4.18 представлены результаты для первых двух ШР для 2017–2018 гг. Очевидным фактом является ежегодная повторяемость динамики резонансных параметров, что согласуется с результатами, полученными в разделе 4.3.2 и является отражением годовой динамики глобальной молниевой активности. В то же время наблюдаются и отличия, которые могут иметь, как случайный, так и систематический характер, отражая динамику молниевой активности на более длительном промежутке времени. Точнее это можно будет определить на основе более продолжительных наблюдений ШР.

Также стоит отметить, что, не смотря на то, что амплитуды первого ШР по данным компонент H_{NS} и H_{WE} схожи, имея максимум в летние месяцы северного полушария, можно отметить, что распределение ПВ амплитуды первого

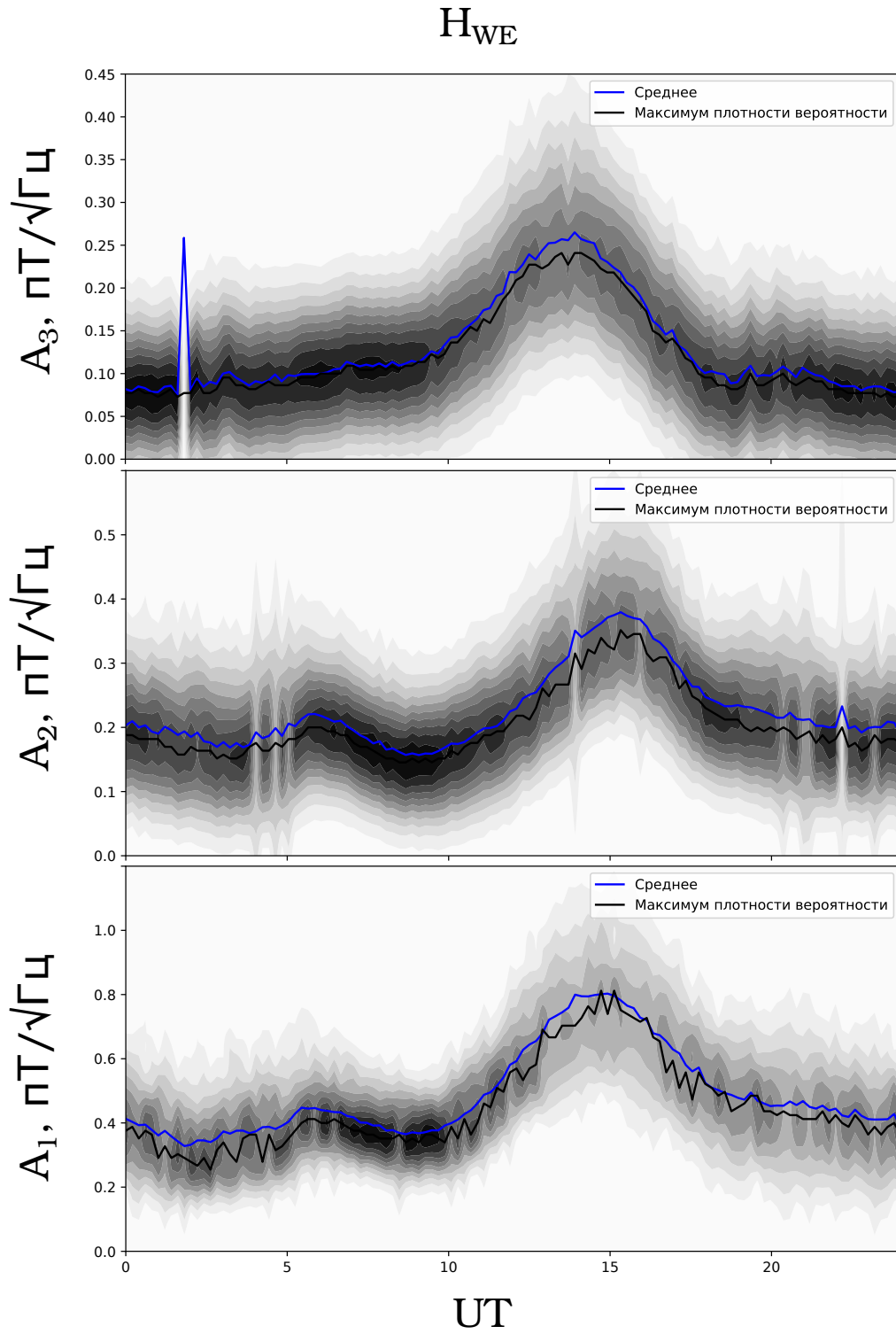


Рисунок 4.12 — Суточная динамика распределения плотности вероятности амплитуд ШР, рассчитанных по данным зимних дней 2017 г для компоненты

H_{WE} .

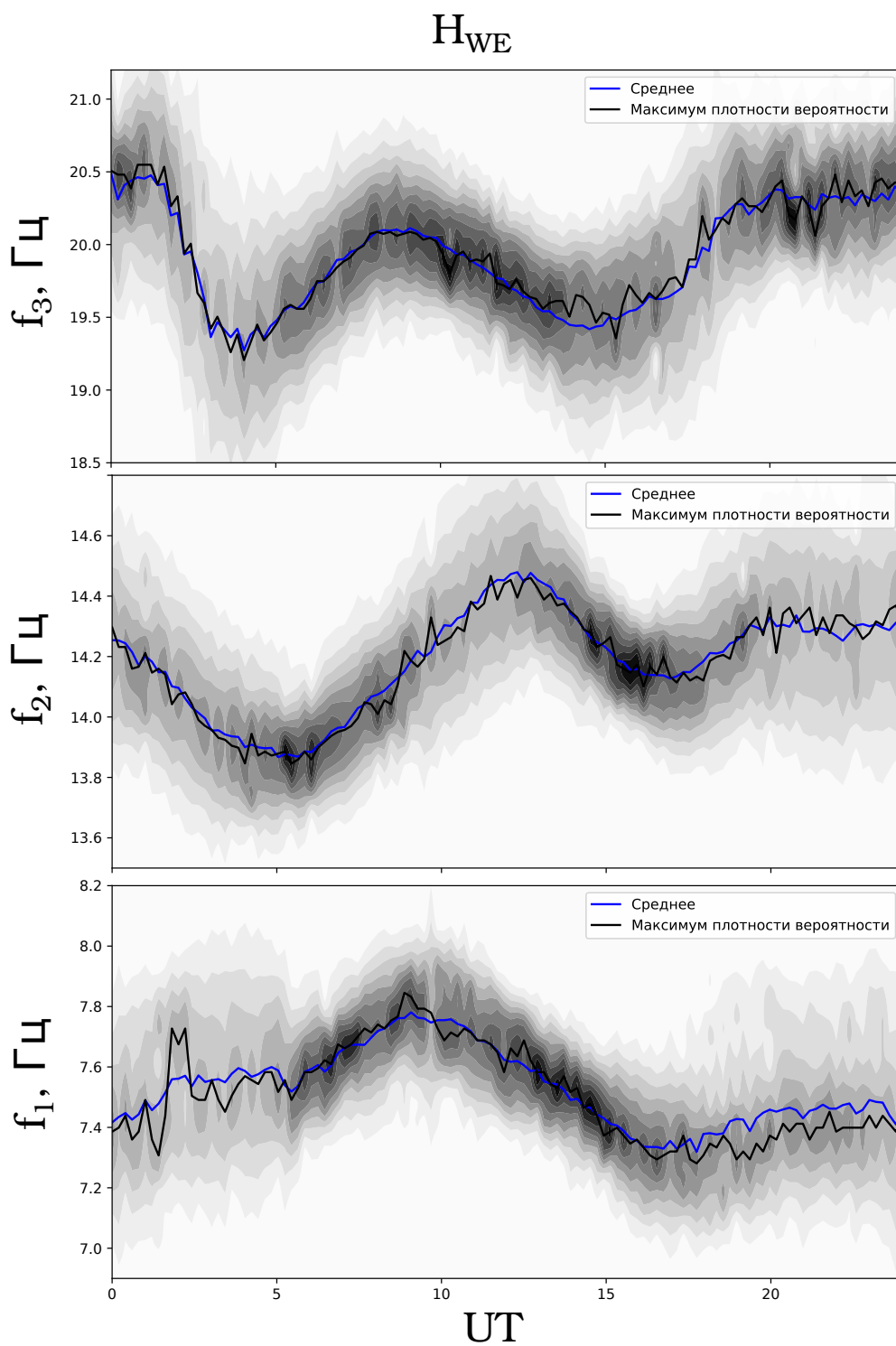


Рисунок 4.13 — Суточная динамика распределения плотности вероятности резонансных частот, рассчитанных по данным зимних дней 2017 г для компоненты H_{WE} .

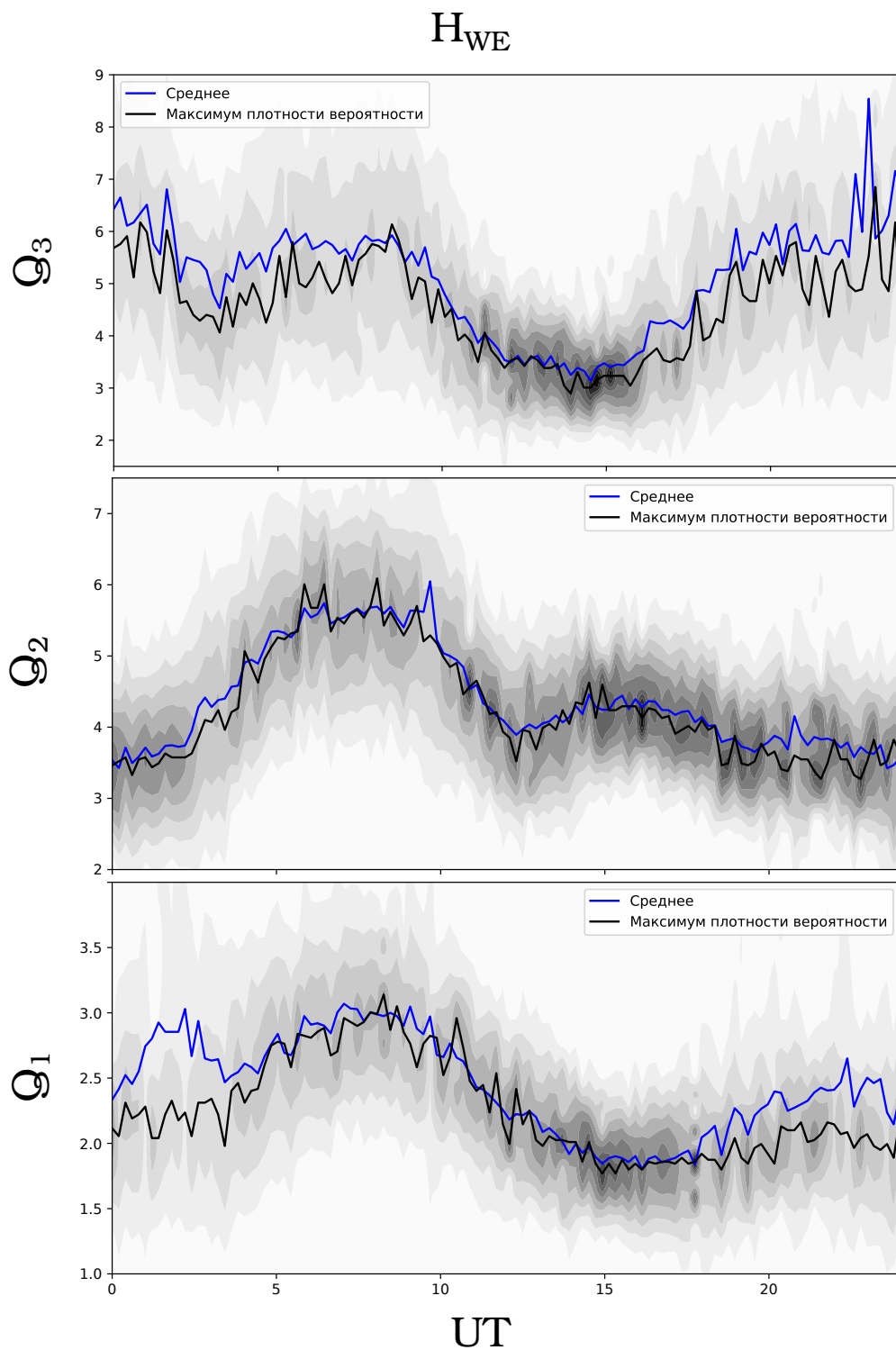


Рисунок 4.14 — Суточная динамика распределения плотности вероятности резонансных добротностей, рассчитанных по данным зимних дней 2017 г для компоненты H_{WE} .

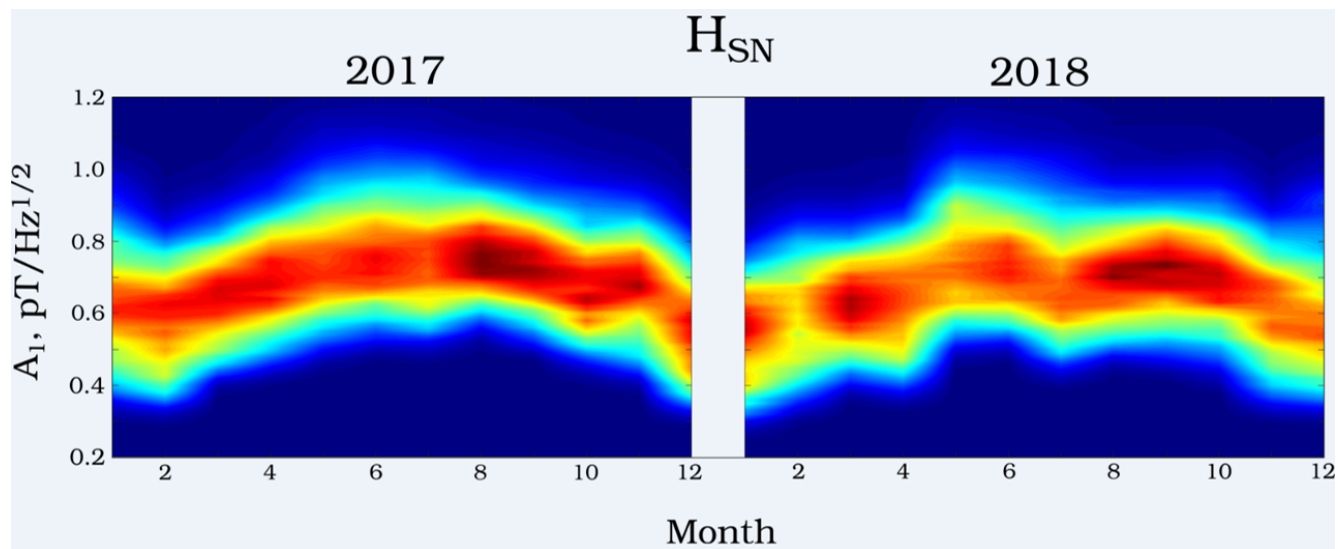


Рисунок 4.15 — Динамика распределения плотности вероятности амплитуды первого ШР по данным компоненты H_{NS} для 2017–2018 гг.

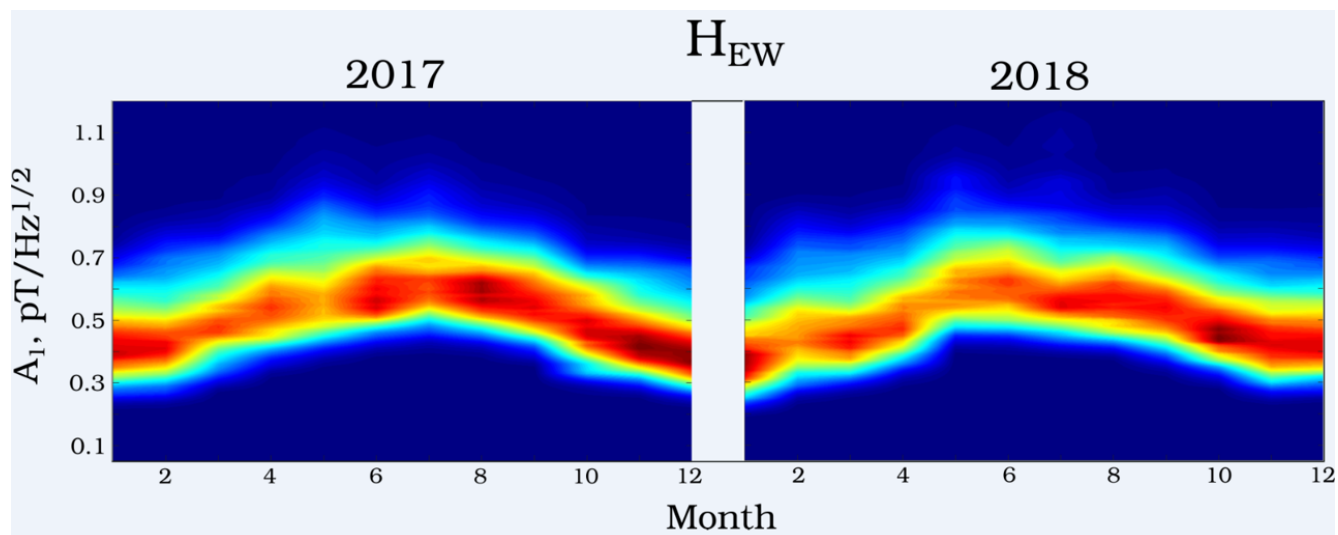


Рисунок 4.16 — Динамика распределения плотности вероятности амплитуды первого ШР по данным компоненты H_{WE} для 2017–2018 гг.

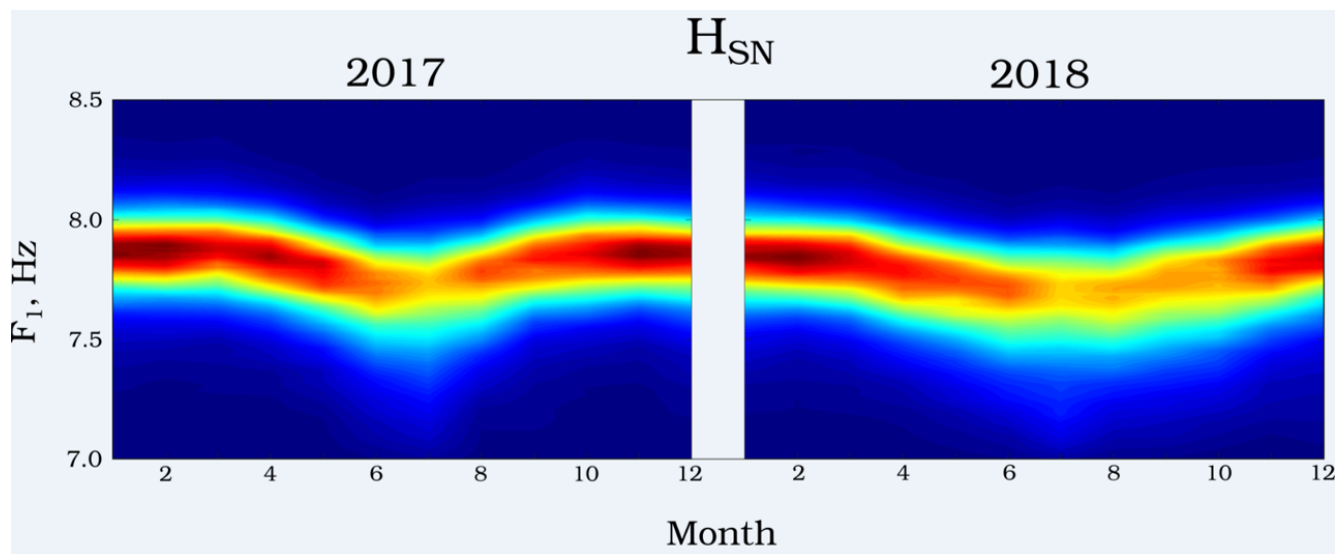


Рисунок 4.17 — Динамика распределения плотности вероятности первой резонансной частоты по данным компоненты H_{NS} для 2017–2018 гг.

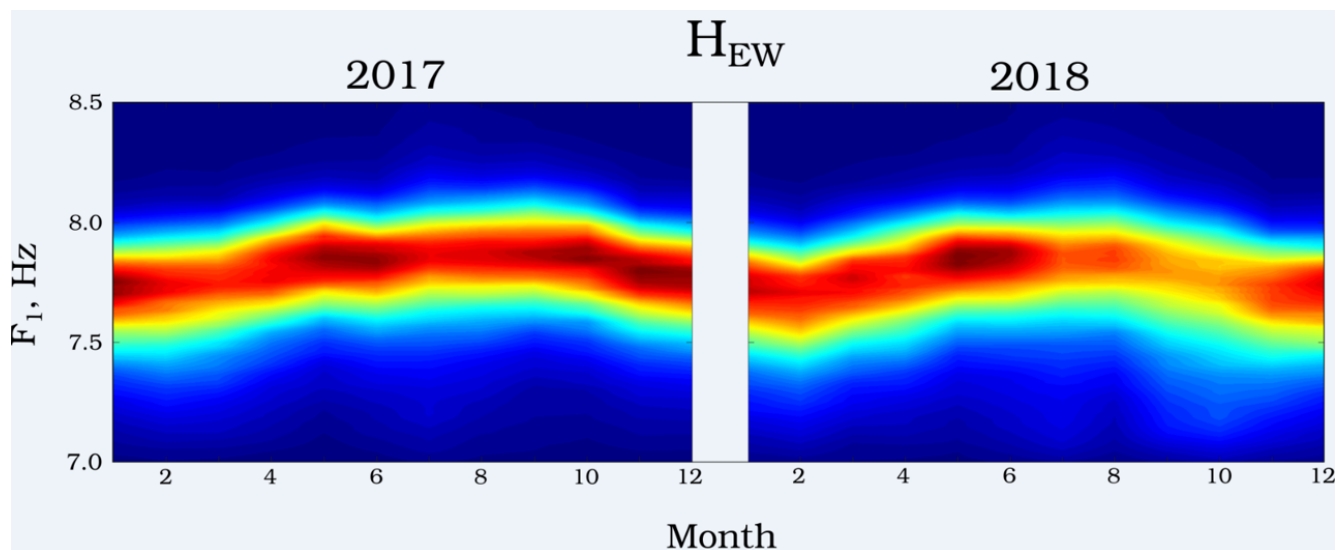


Рисунок 4.18 — Динамика распределения плотности вероятности первой резонансной частоты по данным компоненты H_{WE} для 2017–2018 гг.

ШР для компоненты H_{NS} имеет значительно большую дисперсию, что скорее всего связано с дрейфом глобальной молниевой активности. Это указывает на то, что характеристика плотности вероятности может оказаться удобным инструментом для изучения глобальной молниевой активности.

Выводы к главе 4

Основываясь на предложенной в работе [156] унифицированной методике для обработки КНЧ данных, проведен более точный анализ ее параметров. В методике были выявлены основные недостатки, относящиеся в первую очередь к процедуре расчета КНЧ спектров. Определены оптимальные значения для расчета КНЧ спектра и определения параметров ШР для компонент магнитного поля, наблюдаемых в ГФО Михнево, ИДГ РАН. В результате разработан программный комплекс для определения и обработки характеристик КНЧ спектра по наблюдениям горизонтальных компонент магнитного поля в ГФО Михнево, доступный по адресу <https://doi.org/10.5281/zenodo.6378370>. Данный комплекс был использован в настоящей работе для расчета и анализа ШР в ГФО Михнево за 2016–2020 гг [60]. При этом было получено, что суточная, сезонная и межгодовая динамика наблюдаемых резонансных параметров согласуется с наблюдениями ШР на других Европейских станциях, а также спутниковыми оптическими наблюдениями глобальной молниевой активности. Спектральный анализ динамики резонансных параметров выявил влияние планетарных волн на ШР. Это открывает возможность использования наблюдений ШР для анализа планетарных волн, по аналогии с использованием трасс ОНЧ радиодиапазона. В результате анализа ШР на различных временных масштабах можно заключить, что ШР хорошо отражают процессы, происходящие в областях мезосферы и нижней ионосферы и являются многообещающим инструментом для мониторинга их глобальных характеристик.

Также показана необходимость отказа от оперирования усредненными значениями характеристик ШР и перехода к вероятностной оценки параметров. Учитывая стохастическую природу молниевых разрядов, а также большой разброс отдельных значений, предложен вероятностный подход для анализа

ШР, основанный на расчете плотности распределения вероятности. Такой метод имеет ряд преимуществ, и оказывается более информативным по сравнению с оперированием средними значениями. Результаты применения вероятностного подхода к данным ШР ГФО Михнево за 2016–2020 гг представлены в работе [56].

Заключение

Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем:

1. Разработаны и верифицированы две модели для численного расчета ШР: на основе метода FEM и метода FDTD. Модель на основе FEM позволяет вычислять характеристики резонатора Земля-ионосфера без учета влияния характеристик глобальной молниевой активности, а также позволяет исследовать эффект расщепления резонансных частот, предсказанный аналитической моделью. Расчетный модуль на основе FDTD позволяет явно рассчитывать распространение произвольных ЭМ импульсов, моделировать влияние глобальной молниевой активности на параметры ШР, а также включать сложные неоднородные многокомпонентные модели мезосферы и нижней ионосферы. Данный модуль может быть использован для других задач взаимодействия электромагнитных волн с ионосферной плазмой, например, расчета нелинейных эффектов воздействия мощного ЭМ излучения на ионосферу, включая оптические явления.
2. Продолжительные экспериментальные наблюдения ШР совместно с численными расчетами позволяют использовать феномен ШР для тестирования сложных теоретических моделей нижней ионосферы. Проведенные расчеты показали, что современные эмпирические и теоретические модели нижней ионосферы не способны воспроизвести наблюдаемые вариации параметров ШР и требуют дальнейшего совершенствования. Также было получено, что корректное описание влияния глобальной молниевой активности на параметры ШР в численных расчетах возможно только при наличии модели средней атмосферы, правильно описывающей электронно-ионную проводимость КНЧ радиоволн.
3. Теоретическая модель нижней ионосферы ИДГ-22К позволила численно получить логарифмическую зависимость изменения резонансных частот от значения потока солнечного рентгена при вспышках различных классов.
4. Главное отличие моделей ИДГ-22К и ИДГ-5К — это явный учет динамики концентрации малых нейтральных компонент, которая в ИДГ-5К отсутствует. Данный результат можно считать аргументом против использо-

вания малокомпонентных ионизационно-рекомбинационных моделей нижней ионосферы. С другой стороны, многокомпонентная динамическая модель WACCM тоже не показала себя хорошо с точки зрения суточной и сезонной динамики. Однако в ней отсутствует ионизация рентгеновским и жестким ультрафиолетовым излучением Солнца, использованная в ИДГ-22К. Следовательно, гипотетически перспективным направлением развития модели нижней ионосферы является учет ионизации жестким излучением, включая, возможно, гамма-излучение во время мощных вспышек в динамическую модель с учетом малых компонент.

5. Выполнена оптимизация методики расчета КНЧ спектра и параметров ШР для ГФО Михнево. На основе полученного метода проведен анализ ШР в ГФО Михнево для 2016–2020 гг, позволивший выявить суточные, сезонные и межгодовые вариации резонансных параметров, согласующиеся с наблюдениями других обсерваторий и спутниковыми данными глобальной молниевой активности. Корреляция с 11-летним солнечным циклом наблюдается только для некоторых параметров ШР, однако учитывая малость рассматриваемого временного интервала (меньше половины одного солнечного цикла), на данный момент нельзя сделать однозначные выводы. На основе спектрального анализа параметров ШР было выявлено влияние планетарных волн в мезосфере и нижней ионосфере на параметры ШР. Этот факт делает возможным использование ШР для мониторинга активности планетарных волн в мезосфере и нижней ионосфере аналогично наблюдениям параметров ОНЧ радиотрасс. Показано, что общепринятое усреднение ШР на больших временных масштабах оказывается нерепрезентативным из-за случайной природы распределения отдельных значений, которое в общем случае не всегда соответствует нормальному распределению. Предложена методика статистического анализа ШР на основе непараметрического расчета плотности вероятности резонансных параметров, а также показано, что максимум плотности вероятности отличается от среднего арифметического значения отдельных значений, особенно при существенном разбросе данных или наличии редких сильных выбросов резонансных параметров, связанных с влиянием мощных локальных молниевых источников. Полученная вероятностная методика использовалась для сравнительного анализа экспериментальных данных ШР и численных расчетов.

Список сокращений и условных обозначений

КНЧ	крайне низкие радиочастоты. Диапазон 3–30 Гц
СНЧ	сверх низкие частоты. Диапазон 30–300 Гц
ОНЧ	очень низкие радиочастоты. Диапазон 3–30 кГц
НЧ	низкие радиочастоты. Диапазон 30–300 кГц
ВЧ	высокие радиочастоты. Диапазон 3–30 МГц
УТ	всемирное время («время Зулу» с англ. «Zulu time»)
ЭМИ	электромагнитный импульс
FDTD	численный метод конечных разностей во временной области
FEM	численный метод конечных элементов
ДУ	дифференциальное уравнение
ПВ	плотность вероятности

Благодарности

В заключении хотелось бы выразить огромную благодарность моему научному руководителю к.т.н., заведующему лабораторией Электродинамические процессы в геофизике ИДГ РАН А. Н. Ляхову за активное участие как непосредственно в научных исследованиях, так и за критически значимые советы и замечания при написании настоящей работы. Также хотелось бы выразить признательность д.ф.-м.н. С. И. Козлову за помощь в работе над текстом диссертации, а также Ю. И. Зецеру, Т. В. Лосевой и всем сотрудникам ИДГ РАН, принимавшим участие в обсуждениях результатов работы. Автор благодарит к.ф.-м.н. Ю. В. Поклада за предоставленные экспериментальные измерения. Отдельную благодарность за моральную поддержку автор выражает своей терпеливой жене.

Список литературы

1. *FitzGerald G. F.* On the period of vibration of electrical disturbances upon the Earth. — Rep. Meet. Br. Assoc. Adv. Sci, 63, 682.
2. *Tesla N.* Art of transmitting electrical energy through the natural mediums. — 1905. — Patent 787.412, U.S. Patent and Trademark Off., Washington, D. C.
3. *Schumann W. O.* Über die strahlungslosen Eigenschwingungen einer leitenden Kugel, die von einer Luftschicht und einer Ionosphärenhülle umgeben ist // Zeitschrift Naturforschung Teil A. — 1952. — Vol. 7, no. 2. — P. 149—154.
4. *Schumann W. O.* Über die Dämpfung der elektromagnetischen Eigenschwingungen des Systems Erde - Luft - Ionosphäre // Zeitschrift Naturforschung Teil A. — 1952. — Vol. 7. — P. 250—252.
5. *Schumann W. O.* Über die Ausbreitung sehr langer elektrischer Wellen um die Erde und die Signale des Blitzes // Il Nuovo Cimento. — 1952. — Vol. 9, no. 12. — P. 1116—1138.
6. *Volland H.* Atmospheric Electrodynamics. — Springer, Berlin, 1984. — 208 p.
7. *Balser M., Wagner C. A.* Observations of Earth-ionosphere cavity resonances // Nature. — 1960. — Vol. 188, no. 4751. — P. 638—641.
8. *Balser M., Wagner C. A.* On Frequency Variations of the Earth-Ionosphere Cavity Modes // Journal of Geophysical Research. — 1962. — Vol. 67, no. 10. — P. 4081—4083.
9. *Balser M., Wagner C. A.* Diurnal Power Variations of the Earth-Ionosphere Cavity Modes and Their Relationship to World-Wide Thunderstorm Activity // Journal of Geophysical Research. — 1962. — Vol. 67, no. 2. — P. 619—625.
10. *Jones D. L.* The calculation of the Q factors and frequencies of Earth-ionosphere cavity resonances for a two-layer ionosphere model // Journal of Geophysical Research. — 1964. — Vol. 69, no. 19. — P. 4037—4046.

11. *Jones D. L.* Schumann resonances and E.L.F. propagation for inhomogeneous, isotropic ionosphere profiles // *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*. — 1967. — Vol. 29, no. 9. — P. 1037—1044.
12. *Yamashita M.* Propagation of ELF radio waves to great distances below the anisotropic ionosphere // *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*. — 1967. — Vol. 29, no. 8. — P. 937—948.
13. *Yamashita M.* The propagation characteristics of ELF radio waves to great distances below the horizontally stratified ionosphere // *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*. — 1968. — Vol. 30, no. 12. — P. 1943—1953.
14. *Greifinger C., Greifinger P.* Approximate method for determining ELF eigenvalues in the Earth-ionosphere waveguide // *Radio Science*. — 1978. — Vol. 13, no. 5. — P. 831—837.
15. *Mushtak V. C., Williams E. R.* ELF propagation parameters for uniform models of the Earth-ionosphere waveguide // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 2002. — Vol. 64, no. 18. — P. 1989—2001.
16. *Pechony O., Price C.* Schumann resonance parameters calculated with a partially uniform knee model on Earth, Venus, Mars, and Titan // *Radio Science*. — 2004. — Vol. 39, no. 5. — RS5007.
17. *Nickolaenko A. P., Galuk Y. P., Hayakawa M.* Vertical profile of atmospheric conductivity that matches Schumann resonance observations // *Springer-Plus*. — 2016. — Vol. 5.
18. Full 3-D TLM simulations of the Earth-ionosphere cavity: Effect of conductivity on the Schumann resonances / S. Toledo-Redondo [et al.] // *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*. — 2016. — Vol. 121, no. 6. — P. 5579—5593.
19. *Yang H., Pasko V. P.* Three-dimensional finite difference time domain modeling of the Earth-ionosphere cavity resonances // *Geophysical Research Letters*. — 2005. — Vol. 32, no. 3. — P. L03114.
20. *Williams E. R.* The Schumann resonance: A global tropical thermometer // *Science*. — 1992. — Vol. 256, no. 5060. — P. 1184—1187.
21. *Williams E. R.* Global Circuit Response to Seasonal Variations in Global Surface Air Temperature // *Monthly Weather Review*. — 1994. — Vol. 122, no. 8. — P. 1917—1929.

22. *Shvets A. V., Hayakawa M.* Global lightning activity on the basis of inversions of natural ELF electromagnetic data observed at multiple stations around the world // *Surveys in Geophysics*. — 2011. — Vol. 32. — P. 705—732.
23. Extremely low frequency electromagnetic field measurements at the Hylaty station and methodology of signal analysis / A. Kulak [et al.] // *Radio Science*. — 2014.
24. Application of the Schumann resonance spectral decomposition in characterizing the main African thunderstorm center / M. Dyrda [et al.] // *Journal of Geophysical Research (Atmospheres)*. — 2014. — Vol. 119, no. 23. — P. 13338—13349.
25. *Kemp D. T., Jones D. L.* A new technique for the analysis of transient ELF electromagnetic disturbances within the Earth-ionosphere cavity // *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*. — 1971. — Vol. 33, no. 4. — P. 567—572.
26. *Greenberg E., Price C.* A global lightning location algorithm based on the electromagnetic signature in the Schumann resonance band // *Journal of Geophysical Research (Atmospheres)*. — 2004. — Vol. 109, no. D21. — P. D21111.
27. *Ishaq M., Jones D. L.* Method of obtaining radiowave propagation parameters for the Earth-ionosphere duct at E.L.F. // *Electronics Letters*. — 1977. — Vol. 13. — P. 254.
28. A comparison of different source location methods for ELF transients by using the parent lightning discharges with known positions / T. Nakamura [et al.] // *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*. — 2010. — Vol. 115, no. 1. — A00E39.
29. *Williams E. R.* Lightning and climate: A review // *Atmospheric Research*. — 2005. — Vol. 76, no. 1. — P. 272—287.
30. ULF/ELF emissions observed in Japan, possibly associated with the Chi-Chi earthquake in Taiwan / K. Ohta [et al.] // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. — 2001. — Vol. 1. — P. 37—42.
31. Scattering of ELF radio waves by a localized non-uniformity in the lower ionosphere / Y. P. Galuk [et al.] // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 2019. — Vol. 194. — P. 105093.

32. Manifestations of Nearby Moderate Earthquakes in Schumann Resonance Spectra / M. Hayakawa [et al.] // International Journal of Electronics and Applied Research. — 2020. — Vol. 7. — P. 1—28.
33. The Schumann resonances. I. Monitoring of the ELF electromagnetic noise background / A. Kolesnik [et al.] // Russian Physics Journal - RUSS PHYS J. — 2003. — Vol. 46. — P. 181—185.
34. Schuman Resonances. 2. Seasonal and Diurnal Variations of Resonant Frequencies / A. G. Kolesnik [et al.] // Russian Physics Journal. — 2003. — Vol. 46. — P. 1174—1179.
35. Колесник С. А., Колмаков А. А., Цюпа И. Ю. Результаты исследований Шумановских резонансов по данным магнитных измерений в Томске за период с 2013 года // Распространение радиоволн, Казань. — 2019.
36. Pechony O., Price C. Schumann resonances: Interpretation of local diurnal intensity modulations // Radio Science. — 2006. — Vol. 41, no. 2. — RS2S05.
37. Pechony O., Price C., Nickolaenko A. P. Relative importance of the day-night asymmetry in Schumann resonance amplitude records // Radio Science. — 2007. — Vol. 42, no. 2. — RS2S06.
38. Satori G., Mushtak V., Williams E. Schumann resonance signatures of global lightning activity // Lightning: Principles, Instruments and Applications: Review of Modern Lightning Research. — 2009. — P. 347—386.
39. Effects of energetic solar emissions on the Earth-ionosphere cavity of Schumann resonances / G. Satori [et al.] // Surveys in Geophysics. — 2016. — Vol. 37, no. 4. — P. 757—789.
40. 11-year solar cycle in Schumann resonance data as observed in Antarctica / A. P. Nickolaenko [et al.] // Sun and Geosphere. — 2015. — Vol. 10. — P. 39—49.
41. Ondrášková A., Ševčík S., Kostecký P. Decrease of Schumann resonance frequencies and changes in the effective lightning areas toward the solar cycle minimum of 2008-2009 // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2011. — Vol. 73, no. 4. — P. 534—543.

42. *Деревянных А. А., Колесник А. Г., Колесник С. А.* Проявление солнечных вспышек в параметрах Шумановского резонатора // *Астрофизика и физика Солнца*, БШФФ-2007. — С. 203—205.
43. X-rays and solar proton event induced changes in the first mode Schumann resonance frequency observed at a low latitude station Agra, India / B. Singh [et al.] // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 2014. — Vol. 113. — P. 1—9.
44. Novel analysis of a sudden ionospheric disturbance using Schumann resonance measurements / M. Dyrda [et al.] // *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*. — 2015. — Vol. 120, no. 3. — P. 2255—2262.
45. The effect of a gamma ray flare on Schumann resonances / A. Nickolaenko [et al.] // *Annales Geophysicae*. — 2012. — Vol. 30. — P. 1321—1329.
46. *Surkov V. V.* Observation of global electromagnetic resonances by low-orbiting satellites // *Journal of physics: Conference series*. — 2016. — Vol. 63, no. 10. — P. 1043—1047.
47. *Price C., Mushtak V.* The impact of the August 27, 1998, γ -ray burst on the Schumann resonances // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 2001. — Vol. 63, no. 10. — P. 1043—1047.
48. *Козлов С. И.* Аэрoномия искусственно возмущенных атмосферы и ионосферы Земли. — Москва : Торус пресс, 2021. — 268 с.
49. *Nickolaenko A. P., Hayakawa M.* Schumann resonance for Tyros: Essentials of global electromagnetic resonance in the Earth-ionosphere cavity. — Springer, Tokyo, 2014. — 348 p.
50. Universal and local time variations deduced from simultaneous Schumann resonance records at three widely separated observatories / A. P. Nickolaenko [et al.] // *Radio Science*. — 2011. — Vol. 46, no. 5.
51. *Besser B. P.* Synopsis of the historical development of Schumann resonances // *Radio Science*. — 2007. — Vol. 42, no. 2.
52. *Bliokh P., Nickolaenko A., Fillipov I.* Schumann resonances in the Earth-ionosphere cavity. — Peter Peregrinus, 1980. — 166 p.

53. *Nickolaenko A. P., Hayakawa M.* Resonances in the Earth-ionosphere cavity. — Springer Netherlands, 2002. — 380 p. — (Modern Approaches in Geophysics).
54. *Price C.* ELF electromagnetic waves from lightning: The Schumann resonances // *Atmosphere*. — 2016. — Vol. 7, no. 9. — P. 116.
55. *Goncharov E. S., Lyakhov A. N., Loseva T. V.* 3D-FEM simulation model of the Earth-ionosphere cavity // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. — 2019. — Vol. 33, no. 6. — P. 734—742.
56. *Goncharov E. S., Lyakhov A. N., Losseva T. V.* Seasonal Schumann Resonance variations according to magnetic field measurements at Mikhnevo observatory // 27th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics, Atmospheric Physics. Vol. 11916 / ed. by G. G. Matvienko, O. A. Romanovskii. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2021. — P. 1672—1678.
57. Frontiers in the D-region physics / A. N. Lyakhov [et al.] // 25th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics. Vol. 11208 / ed. by O. A. Romanovskii, G. G. Matvienko. — SPIE, 2019. — P. 1875—1879.
58. *Lyakhov A. N., Goncharov E. S., Losseva T. V.* FDTD, FDFD, and mode sum methods for VLF-LF propagation in the lower ionosphere // 26th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics, Atmospheric Physics. Vol. 11560 / ed. by G. G. Matvienko, O. A. Romanovskii. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2020. — P. 1885—1889.
59. *Lyakhov A. N., Goncharov E. S., Losseva T. V.* The numerical simulation of ELF-LF propagation in the Earth-ionosphere waveguide under WACCM-X results // 27th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics, Atmospheric Physics. Vol. 11916 / ed. by G. G. Matvienko, O. A. Romanovskii. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2021. — P. 1665—1671.
60. *Goncharov E. S., Lyakhov A. N., Losseva T. V.* Long-term Schumann resonance dynamics based on horizontal magnetic field data at Mikhnevo observatory during 2016–2020 // *Radio Science*. — 2022. — Vol. 57, no. 5.

61. *Гончаров Е. С., Ляхов А. Н., Лосева Т. В.* Влияние солнечных вспышек на частоты Шумановского резонанса // Гелиогеофизические исследования в Арктике. Сборник трудов конференции (Полярный геофизический институт). — Кольский научный центр Российской академии наук (Апатиты), 2016. — С. 15—18.
62. *Гончаров Е. С., Ляхов А. Н., Лосева Т. В.* О возможности верификации моделей нижней ионосферы по наблюдениям Шумановских резонансов // Динамические процессы в геосферах. — 2017. — № 9. — С. 124—130.
63. Анализ прикладных моделей ионосферы для расчета распространения радиоволн и возможность их использования в интересах радиолокационных систем. I Классификация прикладных моделей и основные требования, предъявляемые к ним в интересах радиолокационных средств / О. Ю. Аксенов [и др.] // Солнечно-земная физика. — 2020. — Т. 6, № 1. — С. 86—96.
64. *Marshall R. A., Wallace T., Turbe M.* Finite-difference modeling of very-low-frequency propagation in the Earth-ionosphere waveguide // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2017. — Vol. 65, no. 12. — P. 7185—7197.
65. *Wait J. P., Spies P. K.* Characteristics of the Earth-ionosphere waveguide for VLF radio waves : tech. rep. / Central Radio Propagation Laboratory National Bureau of Standards. — Boulder, Colorado, 1964. — No. 300.
66. *Ferguson J. A.* Ionospheric profiles for predicting nighttime VLF/LF propagation. Determination of an effective (exponential) model for use in design and deployment of resources for communication and navigation : tech. rep. — 1980.
67. *Mechtley E., Bilitza D.* Models of D-region electron concentration : tech. rep. — 1974. — IPW—WB1.
68. *Danilov A. D., Rodevich A. Y., Smirnova N. V.* Problems with incorporating a new D-region model into the IRI // Advances in Space Research. — 1995. — Vol. 15, no. 2. — P. 165—168.
69. *Friedrich M.* FIRI: A semiempirical model of the lower ionosphere // Journal of Geophysical Research. — 2001. — Vol. 106. — P. 21409—21418.

70. *Chau J., Woodman R.* D and E region incoherent scatter radar density measurements over Jicamarca // *Journal of Geophysical Research*. — 2005. — Vol. 110.
71. *Friedrich M., Pock C., Torkar K.* FIRM-2018, an updated empirical model of the lower ionosphere // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2018. — Vol. 123.
72. *Torkar K. M., Friedrich M.* Tests of an ion-chemical model of the D- and lower E-region // *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*. — 1983. — Vol. 45, no. 6. — P. 369—385.
73. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: Statistical comparisons and scientific issues / J. M. Picone [et al.] // *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*. — 2002. — Vol. 107, A12. — P. 1468.
74. *Siskind D. E., Barth C. A., Russell J. M.* A climatology of nitric oxide in the mesosphere and thermosphere // *Advances in Space Research*. — 1998. — Vol. 21. — P. 1353—1362.
75. Implications of odd oxygen observations by the TIMED/SABER instrument for lower D region ionospheric modeling / D. Siskind [et al.] // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 2015. — Vol. 30.
76. Diurnal variation of ozone depletion during the October/November 2003 solar proton events / P. Verronen [et al.] // *J. Geophys. Res.* — 2005. — Vol. 110.
77. Production of odd hydrogen in the mesosphere during the January 2005 solar proton event / P. Verronen [et al.] // *Geophysical Research Letters*. — 2006. — Vol. 33.
78. Sunset transition of negative charge in the D-region ionosphere during high-ionization conditions / P. Verronen [et al.] // *Annales Geophysicae*. — 2006. — Vol. 24.
79. About the increase of HNO₃ in the stratopause region during the Halloween 2003 solar proton event / P. Verronen [et al.] // *Geophysical Research Letters*. — 2008. — Vol. 35.
80. Nitric acid enhancements in the mesosphere during the January 2005 and December 2006 solar proton events / P. Verronen [et al.] // *Journal of Geophysical Research*. — 2011. — Vol. 116.

81. Contribution of proton and electron precipitation to the observed electron concentration in October/November 2003 and September 2005 / P. Verronen [et al.] // *Annales Geophysicae*. — 2015. — Vol. 33. — P. 381—394.
82. WACCM-D: Whole Atmosphere Community Climate model with D-region ion chemistry / P. Verronen [et al.] // *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. — 2016. — Vol. 8.
83. Анализ прикладных моделей ионосферы для расчета распространения радиоволн и возможность их использования в интересах радиолокационных систем. II Отечественные модели / В. В. Алпатов [и др.] // *Солнечно-земная физика*. — 2020. — Т. 6, № 3. — С. 73—81.
84. *Стрелков А. С.* Вторичное электрообразование в Е- и D-слоях ионосферы в процессе ионизации жестким ультрафиолетовым и рентгеновским излучением Солнца // *Динамические процессы в геосферах*. — 2012. — № 3. — С. 130—140.
85. *Корсунская Ю. А., Стрелков А. С.* Характеристики фотодиссоционных реакций в Е- и D-слоях ионосферы Земли // *Динамические процессы в геосферах*. — 2013. — № 4. — С. 234—244.
86. *Корсунская Ю. А.* Влияние жесткого рентгеновского излучения Солнца на ионосферу Земли и другие процессы в геосферах // *Динамические процессы в геосферах*. — 2015. — № 7. — С. 122—133.
87. Влияние метеорологических процессов на нижнюю ионосферу в условиях минимума солнечной активности по экспериментальным данным о распространении СДВ–ДВ в средних широтах / А. А. Егошин [и др.] // *Физика Земли*. — 2012. — № 3. — С. 101—112.
88. *Козлов С. И., Ляхов А. Н., Беккер С. З.* Основные принципы построения вероятностно-статистических моделей ионосферы для решения задач распространения радиоволн // *Геомагнетизм и аэрономия*. — 2014. — Т. 54, № 6. — С. 767—779.
89. *Smith W. S., Bull J., Wilcox T.* ROSCOE manual Volume 14A-1 Ambient Atmosphere (Major and Minor Neutral Species and Ionosphere) : tech. rep. / Defense Nuclear Agency. — 1979. — DNA 3964F-14A—1.

90. *Корсунская Ю. А.* Эвристическая модель для восстановления рентгеновской части солнечного спектра по спутниковым данным в интересах геофизических приложений // Солнечно-земная физика. — 2019. — Т. 5, № 3. — С. 89—101.
91. *Bekker S. Z., Ryakhovsky I. A.* Methodology of the lower ionosphere models verification based on VLF radio wave propagation during x-ray flares // 26th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics, Atmospheric Physics. Vol. 11560 / ed. by G. G. Matvienko, O. A. Romanovskii. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2020. — P. 1688—1691.
92. *Bekker S. Z., Ryakhovsky I. A., Korsunskaya J. A.* Modeling of the lower ionosphere during solar X-ray flares of different classes // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2021. — Vol. 126, no. 2. — e2020JA028767.
93. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1966. — 463 с.
94. *Беккер С. З., Козлов С. И., Ляхов А. Н.* Вопросы моделирования ионосферы для расчета распространения радиоволн при решении прикладных задач // Вопросы оборонной техники. — 2013. — Т. 16, № 3/4. — С. 85—88.
95. *Беккер С. З.* Анализ результатов расчетов концентрации электронов по детерминированно-вероятностной модели среднеширотной невозмущенной D-области ионосферы // Солнечно-земная физика. — 2018. — Т. 4, № 3. — С. 84—94.
96. A study of the propagation of electromagnetic waves in Titan's atmosphere with the TLM numerical method / J. Morente [et al.] // Icarus. — 2003. — Vol. 162. — P. 374—384.
97. *Otsuyama T., Sakuma D., Hayakawa M.* FDTD analysis of ELF wave propagation and Schumann resonances for a subionospheric waveguide model // Radio Science. — 2003. — Vol. 38, no. 6.
98. *Clemmow P. C., Dougherty J. P.* Electrodynamics of particles and plasmas. — CRC Press, 1969. — 484 p.
99. 3-D FDTD Modeling of Long-Distance VLF Propagation in the Earth-Ionosphere Waveguide / S. Burns [et al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2021. — Vol. 69, no. 11. — P. 7743—7752.

100. *Xia H., Wang Y., Cao Q.* Grid-cell combination in 3D-FDTD modeling of ELF propagation of the earth // 2010 International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology. — 2010. — P. 782—785.
101. *Yu Y., Niu J., Simpson J. J.* A 3-D Global Earth-Ionosphere FDTD Model Including an Anisotropic Magnetized Plasma Ionosphere // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2012. — Vol. 60, no. 7. — P. 3246—3256.
102. *Welch P.* The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. — 1967. — Vol. 15, no. 2. — P. 70—73.
103. *Inan U. S., Marshall R. A.* Numerical Electromagnetics: The FDTD method. — Cambridge University Press, 2011. — 390 p.
104. *Yee K.* Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1966. — Vol. 14. — P. 302—307.
105. *Marchenko V., Kulak A., Mlynarczyk J.* FDTD analysis of ELF radio wave propagation in the spherical Earth-ionosphere waveguide and its validation based on analytical solutions // Annales Geophysicae Discussions. — 2021. — Vol. 2021. — P. 1—18.
106. *Cummer S. A.* Modeling electromagnetic propagation in the Earth-ionosphere waveguide // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2000. — Vol. 48, no. 9. — P. 1420—1429.
107. *Hu W., Cummer S. A.* An FDTD Model for Low and High Altitude Lightning-Generated EM Fields // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 2006. — Vol. 54. — P. 1513—1522.
108. A FDTD scheme for the computation of VLF-LF propagation in the anisotropic Earth-ionosphere waveguide / M. Thevenot [et al.] // Annales Des Télécommunications. — 1999. — Vol. 54. — P. 297—310.
109. *Bérenger J.-P.* An implicit FDTD scheme for the propagation of VLF-LF radio waves in the Earth-ionosphere waveguide // Comptes rendus — Physique. — 2014. — Vol. 15. — P. 393—402.

110. *Cummer S. A.* An analysis of new and existing FDTD methods for isotropic cold plasma and a method for improving their accuracy // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1997. — Vol. 45, no. 3. — P. 392—400.
111. *Lee J. H., Kalluri D. K.* Three-dimensional FDTD simulation of electromagnetic wave transformation in a dynamic inhomogeneous magnetized plasma // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1999. — Vol. 47, no. 7. — P. 1146—1151.
112. *Buneman O.* Computer space plasma physics: simulation techniques and software //. — Terra Scientific Publishing Co., 1993. — Chap. 3: TRISTAN: The 3D electromagnetic particle code. P. 67—84.
113. *Bérenger J.-P.* FDTD propagation of VLF-LF waves in the presence of ions in the Earth-ionosphere waveguide // Annals of Telecommunications. — 2020. — Vol. 75.
114. *Wait J. R.* Electromagnetic waves in stratified media. — New York : Elsevier, 1962. — 372 p.
115. *Bérenger J.-P.* FDTD computation of VLF-LF propagation in the Earth-ionosphere waveguide // Annales Des Télécommunications. — 2002. — Vol. 57. — P. 1059—1090.
116. *Bérenger J.-P.* Reduction of the angular dispersion of the fdtd method in the Earth-ionosphere waveguide // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2003. — Vol. 17. — P. 1225—1235.
117. *Bérenger J.-P.* Long range propagation of lightning pulses using the FDTD method // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. — 2005. — Vol. 47, no. 4. — P. 1008—1011.
118. *Taflove A.* Computational electrodynamics the Finite Difference Time Domain method. — Artech House, 1995. — 599 p.
119. *Holland R., W. W. J.* Total-field versus scattered-field finite-difference codes: A comparative assessment // IEEE Transactions on Nuclear Science. — 1983. — Vol. 30. — P. 4583—4588.
120. Анализ влияния солнечных рентгеновских вспышек на параметры Шумановского резонатора / Ю. В. Поклад [и др.] // Динамические процессы в геосферах (Институт динамики геосфер им. акад. М.А. Садовского РАН). — 2017. — № 9. — С. 130—136.

121. *Stauning P.* High-latitude D- and E-region investigations using imaging riometer observations // *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*. — 1996. — Vol. 58, no. 6. — P. 765—783.
122. *Alekseev D., Kuvshinov A., Palshin N.* Compilation of 3D global conductivity model of the Earth for space weather applications // *Earth, Planets and Space*. — 2015. — Vol. 67.
123. Seasonal variations in the lightning diurnal cycle global electric circuit / R. Blakeslee [et al.] // *Atmospheric Research*. — 2013. — Vol. 135/136.
124. Results of Comparing Schumann-Resonance Observations with the Model of a Single Global Thunderstorm Center / E. Yatsevich [et al.] // *Radiophysics and Quantum Electronics*. — 2005. — Vol. 48. — P. 254—267.
125. *Galejs J.* Terrestrial propagation of long electromagnetic waves. — New York : Pergamon Press, 1972. — 362 p.
126. *Гюннинен Э. М., Галюк Ю. П.* Поле вертикального электрического диполя над сферической землей с неоднородной по высоте ионосферой // *Проблемы дифракции и распространения радиоволн*. — 1972. — № 11. — С. 109—120.
127. *Jones D. L.* The apparent resonance frequencies of the Earth-ionosphere cavity when excited by a single dipole source // *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity*. — 1969. — Vol. 21, no. 3. — P. 679—684.
128. *Jones D. L.* Numerical computations of terrestrial ELF electromagnetic wave fields in the frequency domain // *Radio Science*. — 1970. — Vol. 5, no. 5. — P. 803—809.
129. Reconstruction of the global lightning distribution from ELF electromagnetic background signals / A. V. Shvets [et al.] // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 2009. — Vol. 71, no. 12. — P. 1405—1412.
130. *Brodrick D., Tingay S. J., Wieringa M. H.* X-ray magnitude of the 4 November 2003 solar flare inferred from the ionospheric attenuation of the galactic radio background // *Journal of Geophysical Research*. — 2005. — Vol. 110.
131. *Thomson N., Rodger C., Dowden R.* Ionosphere gives size of greatest solar flare // *Geophysical Research Letters*. — 2004. — Vol. 31, no. 6. — P. L06803.

132. Statistical analysis of short-wave fadeout for extreme space weather event estimation / C. Tao [et al.] // *Earth, Planets and Space*. — 2020. — Vol. 72. — P. 1—16.
133. *Shvets A. V., Nickolaenko A. P., Chebrov V. N.* Effect of Solar Flares on the Schumann-Resonance Frequencies // *Radiophysics and Quantum Electronics*. — 2017. — Vol. 60, no. 3. — P. 186—199.
134. Schumann resonance frequency increase during solar X-ray bursts / V. C. Roldugin [et al.] // *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*. — 2004. — Vol. 109, A1. — A01216.
135. Modifications of middle atmosphere conductivity during sudden ionospheric disturbances deduced from changes of Schumann resonance peak frequencies / I. G. Kudintseva [et al.] // *Radio Science*. — 2018. — Vol. 53, no. 5. — P. 670—682.
136. *Galuk Y., Nickolaenko A., Hayakawa M.* Comparison of exact and approximate solutions of the Schumann resonance problem for the knee conductivity profile // *Radiofizika i elektronika*. — 2015. — Vol. 20. — P. 40—47.
137. *Galuk Y. P., Nickolaenko A. P., Hayakawa M.* Displacement of antipodal maximum of vertical electric field in Earth-ionosphere cavity with the day-night non-uniformity // *Radio-Physics and Electronics*. — 2017. — Vol. 8, no. 22. — P. 29—40.
138. *Данилов А. Д.* Популярная аэрономия. — Гидрометеиздат, 1989. — 230 с.
139. *Schumann W. O., König H.* Über die beobachtung von "atmospherics" bei geringsten frequenzen // *Naturwissenschaften*. — 1954. — Vol. 41. — P. 183—184.
140. Applied Engineering Using Schumann Resonance for Earthquakes Monitoring / J. A. Gazquez [et al.] // *Applied Sciences*. — 2017. — Vol. 7, no. 11.
141. Schumann resonances observed using Poynting vector spectra / G. G. Belyaev [и др.] // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 1999. — T. 61, № 10. — С. 751—763.

142. *Poklad Y. V., Ermak V. M., Ryakhovskiy I. A.* Influence of local time and power of solar x-ray flashes of M and X classes on the variation of frequency of first mode of Schumann resonance // 24th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics. Vol. 10833 / ed. by G. G. Matvienko, O. A. Romanovskii. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2018. — P. 2091—2094.
143. Variation of frequency of first mode of Schumann resonance under solar x-ray flashes and its relation with helio-geophysical conditions / Y. V. Poklad [et al.] // 25th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics. Vol. 11208. — SPIE, 2019. — P. 1910—1913.
144. *Shvets A. V.* A technique for reconstruction of global lightning distance profile from background Schumann resonance signal // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2001. — Vol. 63, no. 10. — P. 1061—1074.
145. Observations of natural ELF and VLF electromagnetic noises by using ball antennas / T. Ogawa [et al.] // Journal of geomagnetism and geoelectricity. — 1966. — Vol. 18, no. 4. — P. 443—454.
146. *Jones D. L., Kemp D. T.* The nature and average magnitude of the sources of transient excitation of Schumann resonances // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. — 1971. — Vol. 33, no. 4. — P. 557—566.
147. Decrease of the first Schumann resonance frequency during solar proton events / V. C. Roldugin [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2001. — Vol. 106, A9. — P. 18555—18562.
148. *Polk C., Fitchen F.* Schumann resonances of the Earth-ionosphere cavity — extremely low frequency reception at Kingston, R.I. // J Res NBS. — 1962. — Vol. 66D, no. 3. — P. 313—318.
149. *Füllekrug M.* Schumann resonances in magnetic field components // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. — 1995. — Vol. 57, no. 5. — P. 479—484. — URSI XXIVth General Assembly.
150. Long-term observations of Schumann resonances at Modra observatory / A. Ondrášková [et al.] // Radio Science. — 2007. — Vol. 42, no. 2. — P. 1—12.

151. Influence of solar terminator passages on Schumann resonance parameters / A. Melnikov [et al.] // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2004. — Vol. 66, no. 13. — P. 1187—1194. — SPECIAL - Space Processes and Electrical Changes in Atmospheric Layers.
152. Analysis of the Rhode Island Schumann resonance daily-average data / R. Boldi [et al.] // XV International Conference on Atmospheric Electricity. — 2014. — P. 1—36.
153. *Kolesnik S. A., Kolmakov A. A.* Polarization characteristics of Schumann resonances in Tomsk // 23rd International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics. Vol. 10466 / ed. by G. G. Matvienko, O. A. Romanovskii. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2017. — P. 1219—1223.
154. Comparisons of long term Schumann resonance records in Europe and North America / G. Satori [et al.] // Proceedings of 11th international conference on atmospheric electricity, Guntersville, Alabama. — P. 705—708.
155. Solar cycle-modulated deformation of the Earth-ionosphere cavity / T. Bozoki [et al.] // Frontiers in Earth Science. — 2021. — Vol. 9. — P. 735.
156. On the need of a unified methodology for processing Schumann resonance measurements / J. Rodriguez-Camacho [et al.] // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. — 2018. — Vol. 123, no. 23. — P. 13, 277—13, 290.
157. *Sentman D. D.* Magnetic elliptical polarization of Schumann resonances // Radio Science. — 1987. — Vol. 22, no. 04. — P. 595—606.
158. *Price C., Melnikov A.* Diurnal, seasonal and inter-annual variations in the Schumann resonance parameters // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2004. — Vol. 66. — P. 1179—1185.
159. *Sekiguchi M., Hobara Y., Hayakawa M.* Diurnal and seasonal variations in the Schumann resonance parameters at Moshiri, Japan // J. Atmos. Electr. — 2008. — Vol. 28. — P. 1—10.
160. *Roldugin V. C., Vasiljev A. N., Ostapenko A. A.* Comparison of the Schumann resonance parameters in horizontal magnetic and electric fields according to observations on the Kola Peninsula // Radio Science. — 2006. — Vol. 41, no. 2.

161. Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing / W. H. Press [et al.]. — 3rd ed. — USA : Cambridge University Press, 2007. — 1256 p.
162. LMFIT: Non-linear least-square minimization and curve-fitting for Python / M. Newville [et al.]. — 2014.
163. Study of Schumann resonances based on magnetotelluric records from the western Mediterranean and Antarctica / S. Toledo-Redondo [et al.] // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. — 2010. — Vol. 115, no. D22.
164. *Oppenheim A. V., Schaffer R. W., Buck J. R.* Discrete-time signal processing (2nd Ed.) — USA : Prentice-Hall, Inc., 1999. — 1144 p.
165. *Boldi R., Williams E., Guha A.* Determination of the global-average charge moment of a lightning flash using Schumann resonances and the LIS/OTD lightning data // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. — 2017. — Vol. 123.
166. *Musur M. A., Beggan C. D.* Seasonal and solar cycle variation of Schumann resonance intensity and frequency at Eskdalemuir observatory, UK // Sun and Geosphere. — 2019. — Vol. 14. — P. 81—86.
167. *Sátori G., Williams E., Mushtak V.* Response of the Earth ionosphere cavity resonator to the 11-year solar cycle in X-radiation // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2005. — Vol. 67, no. 6. — P. 553—562.
168. *Sátori G., Zieger B.* El Nino related meridional oscillation of global lightning activity // Geophysical Research Letter. — 1999. — No. 26. — P. 1365—1368.
169. *Sátori G., Zieger B.* Spectral characteristics of Schumann resonances observed in central Europe // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. — 1996. — Vol. 101, no. D23. — P. 29663—29669.
170. Parameters of global thunderstorm activity deduced from the long-term Schumann resonance records / A. P. Nickolaenko [et al.] // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 1998. — Vol. 60, no. 3. — P. 387—399.
171. *Salby M. L.* Survey of planetary-scale traveling waves: the state of theory and observations // Reviews of Geophysics. — 1984. — Vol. 22. — P. 209—236.

172. *Pancheva D., Mukhtarov P., Siskind D. E.* The quasi-6-day waves in NOGAP-S-ALPHA forecast model and their climatology in MLS/Aura measurements (2005-2014) // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2018. — Vol. 181. — P. 19—37.
173. *Шалымов С. Л.* Атмосферные волны в плазме ионосферы (с геофизическими примерами). — Москва : ИФЗ РАН, 2018. — 390 с.
174. *Grise K. M., Thompson D. W. J.* Equatorial planetary waves and their signature in atmospheric variability // Journal of the Atmospheric Sciences. — Boston MA, USA, 2012. — Vol. 69, no. 3. — P. 857—874.
175. Variability of the quasi-2-day wave observed in the MLT region during the PSMOS campaign of June–August 1999 / D. Pancheva [et al.] // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2004. — Vol. 66, no. 6. — P. 539—565. — Dynamics and Chemistry of the MLT Region - PSMOS 2002 International Symposium.
176. A case study of mesospheric planetary waves observed over a three-radar network using empirical mode decomposition / P. Kishore [et al.] // Annales Geophysicae. — 2018. — Vol. 36, no. 3. — P. 925—936.
177. Observations of 7-day planetary waves with MLT radars and the UARS-HRDI instrument / R. R. Clark [et al.] // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2002. — Vol. 64, no. 8. — P. 1217—1228. — PSMOS 2000 Workshop - Planetary Scale Mesopause Observing System.
178. Radar observations of a 3-day Kelvin wave in the equatorial mesosphere / D. M. Riggin [et al.] // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. — 1997. — Vol. 102, no. D22. — P. 26141—26157.
179. Investigation of dominant traveling 10-day wave components using long-term MERRA-2 database / C. Huang [et al.] // Earth, Planets and Space. — 2021. — Vol. 73. — P. 1—12.
180. *Smith A. K.* Physics and chemistry of the mesopause region // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2004. — Vol. 66, no. 10. — P. 839—857.

181. *Brady A. H., Crombie D. D.* Studying the lunar tidal variations in the D region of the ionosphere by means of very-low-frequency phase observations // *Journal of Geophysical Research* (1896-1977). — 1963. — Vol. 68, no. 19. — P. 5437—5442.
182. The correlation of VLF propagation variations with atmospheric planetary-scale waves / D. J. Cavalieri [et al.] // *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*. — 1974. — Vol. 36, no. 4. — P. 561—574.
183. *Cavalier D. J., Deland R. J.* Traveling planetary scale waves in the ionosphere // *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*. — 1975. — Vol. 37, no. 2. — P. 297—309.
184. *Schmitter E. D.* Remote sensing planetary waves in the midlatitude mesosphere using low frequency transmitter signals // *Annales Geophysicae*. — 2011. — Vol. 29, no. 7. — P. 1287—1293.
185. *Schmitter E. D.* Data analysis of low frequency transmitter signals received at a midlatitude site with regard to planetary wave activity // *Advances in Radio Science*. — 2012. — Vol. 10. — P. 279—284.
186. *Pal S., Chakraborty S., Chakrabarti S. K.* On the use of very low frequency transmitter data for remote sensing of atmospheric gravity and planetary waves // *Advances in Space Research*. — 2015. — Vol. 55, no. 4. — P. 1190—1198.
187. *Cole R. K.* The Schumann resonances // *Radio Science*. — 1965. — Vol. 69D, no. 10. — P. 1345—1349.
188. *Lomb N. R.* Least-squares frequency analysis of unequally spaced data // *Astrophysics and Space Science*. — 1976. — Vol. 39, no. 2. — P. 447—462.
189. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. — 400 с.
190. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. — М : Наука, 1971. — 553 с.
191. *Moore G. E.* Cramming more components onto integrated circuits, Reprinted from *Electronics*, volume 38, number 8, April 19, 1965, pp.114 ff. // *IEEE Solid-State Circuits Society Newsletter*. — 2006. — Vol. 11, no. 3. — P. 33—35.

192. *Hameed M. F. O., Obayya S.* Computational photonic sensors. — Cham, Switzerland : Springer, 2019. — 452 p.
193. *Семенов Н. А.* Техническая электродинамика. — Москва : Связь, 1973. — 480 с.
194. *Леонтович М. А.* О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Исследования по распространению радиоволн. — Москва, 1948. — С. 5—12.
195. *Hoppe D. J., Ragmat-Samii Y.* Impedance boundary conditions in electromagnetics. — CRC Press, 1995. — 262 p.
196. *Senior T. B. A., Volakis J. L.* Derivation and application of a class of generalized boundary conditions (electromagnetic scattering) // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1989. — Vol. 37, no. 12. — P. 1566—1572.
197. *Maloney J. G., Smith G. S.* The use of surface impedance concepts in the finite-difference time-domain method // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1992. — Vol. 40, no. 1. — P. 38—48.
198. *Oh K. S., Schutt-Aine J. E.* An efficient implementation of surface impedance boundary conditions for the finite-difference time-domain method // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1995. — Vol. 43, no. 7. — P. 660—666.
199. Efficient low order approximation for surface impedance boundary conditions in finite-difference time-domain method / V. De Santis [et al.] // IEEE Transactions on Magnetics. — 2012. — Vol. 48, no. 2. — P. 271—274.
200. *Bérenger J.-P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 114. — P. 185—200.
201. *Chew W. C., Weedon W. H.* A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates // Microwave and Optical Technology Letters. — 1994. — Vol. 7, no. 13. — P. 599—604.
202. *Teixeira F. L., Chew W. C.* PML-FDTD in cylindrical and spherical grids // IEEE Microwave and Guided Wave Letters. — 1997. — Vol. 7, no. 9. — P. 285—287.

203. *Kelley D. F., Luebbers R. J.* Piecewise linear recursive convolution for dispersive media using FDTD // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1996. — Vol. 44, no. 6. — P. 792—797.
204. Perfectly matched layer and piecewise-linear recursive convolution for the FDTD solution of the 3D dispersive half-space problem / F. L. Teixeira [et al.] // IEEE Transactions on Magnetics. — 1998. — Vol. 34, no. 5. — P. 2747—2750.
205. *Teixeira F. L., Chew W. C.* Finite-difference computation of transient electromagnetic waves for cylindrical geometries in complex media // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. — 2000. — Vol. 38, no. 4. — P. 1530—1543.
206. *Bittencourt J. A.* Fundamentals of plasma physics. — Springer, New York, 2004. — 679 p.
207. *Marshall R. A.* Very low frequency radio signatures of transient luminous events above thunderstorms : PhD thesis / Marshall Robert Andrew. — Stanford University, California, 2009. — 169 p.
208. *Huang S. J., Li F.* FDTD implementation for magnetoplasma medium using exponential time differencing // IEEE Microwave and Wireless Components Letters. — 2005. — Vol. 15, no. 3. — P. 183—185.
209. *Knapp W., Schwartz K.* Aids for the study of electromagnetic blackout : tech. rep. / General Electric Company. — 1975.
210. *Cox S. M., Matthews P. C.* Exponential Time Differencing for Stiff Systems // J. Comput. Phys. — USA, 2002. — Vol. 176, no. 2. — P. 430—455.

Список рисунков

1.1	Суточная динамика параметра β для точки с координатами 55° с. ш., 37° в. д. для 11 января, в соответствии с (1.3). Сплошная линия — спокойные условия, пунктирная линия — высокая геомагнитная активность.	18
1.2	Распределение электронной концентрации на высоте 85 км, рассчитанное по модели IRI-2016 для 1 января, 0 UT.	20
1.3	Распределение электронной концентрации на высотах 60 и 85 км, рассчитанные по модели WACCM для 5 января 2017 г, 0 UT.	23
1.4	Профили электронной концентрации для различных солнечных зенитных углов, рассчитанные по плазмохимической модели ИДГ-22К при спокойных геофизических условиях.	24
2.1	Схема расчетной сетки волновода Земля-ионосфера.	29
2.2	Схема волновода для двумерного расчета распространения ОНЧ радиоволн методом FDTD.	36
2.3	Вертикальная компонента электрического поля E_r вдоль радиотрассы протяженностью 2000 км для различных частот, рассчитанная по методу конечных разностей FDTD (с различными методами решения ДУ для тока проводимости) и методу нормальных волн (программный пакет LWPC). Ионосфера — стандартная дневная ($\beta = 0.3$, $h_p = 72$ км).	37
2.4	Вертикальная компонента электрического поля E_r вдоль радиотрассы протяженностью 2000 км для частоты 20 кГц, рассчитанная по методу конечных разностей FDTD и методу нормальных волн (программный пакет LWPC) с параметрами подстилающей поверхности $\epsilon = 10$ и различными значениями проводимости σ_e . Ионосфера — стандартная дневная ($\beta = 0.3$, $h_p = 72$ км).	39
2.5	Пространственное расположение компонент электромагнитного поля на расчетной сетке.	40

2.6	Зависимость значения первых трех резонансных частот F_i от длительности расчетного сигнала. Расчет выполнен для ионосферной модели WACCM для 05.09.2017, 0 UT.	41
2.7	Зависимость значения добротности первой резонансной частоты Q_1 от длительности расчетного сигнала. Расчет выполнен для ионосферной модели WACCM для 05.09.2017, 0 UT. Пунктиром обозначена аппроксимационная кривая.	42
2.8	Отношение добротности собственной частоты $Q_i(t)$, рассчитанной для сигнала длительностью t к ее истинному значению Q_{i0} для первых трех резонансных частот. Расчет выполнен для ионосферной модели WACCM для 05.09.2017, 0 UT.	43
3.1	Расчетные КНЧ спектры для эмпирических моделей ионосферы. . .	48
3.2	Вертикальная компонента электрического поля E_r в точке приема с учетом ионной проводимости и без. В качестве источника ЭМИ — производная импульса Гаусса.	51
3.3	Распределение проводимости Земной поверхности $\sigma_e(\varphi, \theta)$, с пространственным разрешением $1^\circ \times 1^\circ$	52
3.4	Сезонная динамика первой резонансной частоты для 0 UT, 2017 г. Экспериментальные данные представляют собой динамику распределения ПВ резонансной частоты для месячных наблюдений (черная кривая — максимальное значение плотности вероятности). .	54
3.5	Сезонная динамика второй резонансной частоты для 0 UT, 2017 г. Экспериментальные данные представляют собой динамику распределения ПВ второй резонансной частоты для месячных наблюдений (черная кривая — максимальное значение плотности вероятности).	55
3.6	Сезонная динамика третьей резонансной частоты для 0 UT, 2017 г. Экспериментальные данные представляют собой динамику распределения ПВ третьей резонансной частоты для месячных наблюдений (черная кривая — максимальное значение плотности вероятности).	55

3.7	Суточная динамика первой резонансной частоты. Экспериментальные данные представляют динамику распределения ПВ первой резонансной частоты для января 2018 года. Расчетные значения получены при помощи численного расчета методом FDTD, согласно модели нижней ионосферы WACCM для 18.01.2018.	56
3.8	Суточная динамика второй резонансной частоты. Экспериментальные данные представляют динамику распределения ПВ второй резонансной частоты для января 2018 года. Расчетные значения получены при помощи численного расчета методом FDTD, согласно модели нижней ионосферы WACCM для 18.01.2018.	57
3.9	Суточная динамика третьей резонансной частоты. Экспериментальные данные представляют динамику распределения ПВ третьей резонансной частоты для января 2018 года. Расчетные значения получены при помощи численного расчета методом FDTD, согласно модели нижней ионосферы WACCM для 18.01.2018.	57
3.10	Спектры горизонтальной компоненты магнитного поля, полученные согласно одномерной аналитической модели распространения ТМ-волны в приближении однородной ионосферы для различных расстояний источник–приемник и для разных значений коэффициентов затухания α_D .	59
3.11	Расщепление первой резонансной частоты при учете неоднородности день-ночь: а) модель атмосферной проводимости Николаенко [17], б) плазмохимическая модель нижней ионосферы ИДГ-22К (см. раздел 1.2.2).	62
3.12	Профили электронной концентрации, соответствующие солнечному зенитному углу $\chi = 0^\circ$, для различных значений потока солнечного рентгеновского излучения.	63
3.13	Изменение собственных частот резонатора в зависимости от потока солнечного рентгеновского излучения.	64
3.14	Изменение приведенной резонансной частоты $\hat{F}_n$ во время солнечных вспышек. Поток солнечного рентгеновского излучения измерен на ИСЗ GOES в частотных каналах XRS-A и XRS-B.	67
3.15	Зависимость приведенной резонансной частоты $\hat{F}_n$ от потока солнечного рентгеновского излучения XRS-B.	68

3.16	Динамика расчетного КНЧ спектра, во время вспышки класса X13, согласно модели нижней ионосферы ИДГ-5К.	69
4.1	Энергетический спектр компоненты H_{NS} для 5 UT, 10.01.2018. . . .	76
4.2	Среднемесячное значение погрешности определения первой резонансной частоты для различных значений ширины окна (Январь, 2019) для компоненты H_{NS}	81
4.3	Суточные вариации второй частоты ШР при разных интервалах накопления данных для магнитной компоненты H_{NS} , 22.03.2020. . .	82
4.4	Усредненная суточная динамика спектральной энергии области первых трех ШР для зимних (Декабрь, Январь, Февраль), весенних (Март, Апрель, Май), летних (Июнь, Июль, Август), осенних (Сентябрь, Октябрь, Ноябрь) месяцев 2018 года.	84
4.5	Распределение среднемесячной интенсивности молниевых разрядов по данным системы мониторинга WWLLN (Сентябрь 2014 г.). Квадратами выделены основные центры глобальной молниевой активности.	86
4.6	Динамика параметров первых двух ШР в 2016–2020 гг согласно регистрации горизонтальных компонент магнитного поля в ГФО Михнево. (а) Среднемесячные значения интенсивности молниевых разрядов в областях основных грозовых центров; (б) Среднемесячные значения потока солнечного рентгеновского излучения по данным ИСЗ GOES; Среднемесячные значения резонансных интенсивностей (в, г), частот (д, е) и добротностей (ж, з).	87
4.7	Усредненная суточная динамика первой резонансной частоты для января 2016–2020 гг для компоненты H_{NS}	88
4.8	Усредненная суточная динамика второй резонансной частоты для января 2016–2020 гг для компоненты H_{NS}	89
4.9	Профиль квадрата показателя преломления радиоволн для стандартной дневной и ночной ионосферы Уайта.	91
4.10	Периодограммы характеристик первого ШР по наблюдениям ГФО Михнево.	93
4.11	Периодограммы амплитуд ОНЧ радиоволн, зарегистрированных в ГФО Михнево, для ряда источников.	94

4.12	Суточная динамика распределения плотности вероятности амплитуд ШР, рассчитанных по данным зимних дней 2017 г для компоненты H_{WE}	98
4.13	Суточная динамика распределения плотности вероятности резонансных частот, рассчитанных по данным зимних дней 2017 г для компоненты H_{WE}	99
4.14	Суточная динамика распределения плотности вероятности резонансных добротностей, рассчитанных по данным зимних дней 2017 г для компоненты H_{WE}	100
4.15	Динамика распределения плотности вероятности амплитуды первого ШР по данным компоненты H_{NS} для 2017–2018 гг.	101
4.16	Динамика распределения плотности вероятности амплитуды первого ШР по данным компоненты H_{WE} для 2017–2018 гг.	101
4.17	Динамика распределения плотности вероятности первой резонансной частоты по данным компоненты H_{NS} для 2017–2018 гг.	102
4.18	Динамика распределения плотности вероятности первой резонансной частоты по данным компоненты H_{WE} для 2017–2018 гг.	102
A.1	Иллюстрация расположения электромагнитного поля в ячейке сферической геометрии.	141
A.2	Конфигурация полей в ячейке, примыкающей к точке сингулярности.	143
A.3	Конфигурация сетки FDTD в области точки сингулярности, для иллюстрации уравнения интегрального уравнения Ампера [192].	144
A.4	Иллюстрация реализации периодических граничных условий вдоль направления φ для сферической системы координат.	145

Список таблиц

1	Расчетные значения ШР согласно различным моделям нижней ионосферы	49
2	Отобранные солнечные рентгеновские вспышки 2016–2020 гг.	66
3	Вариации резонансных частот ШР по данным ГФО Михнево 2016–2020.	96
4	Коэффициенты рациональных функций, аппроксимирующих функцию (А.30), описывающую поверхностный импеданс.	151

Приложение А

Метод конечных разностей во временной области (Finite Difference Time Domain)

Введение

FDTD является популярным методом численного решения задач электромагнетизма, доказавшим свою универсальность и надежность, оставаясь, вместе с тем, относительно простым для практической реализации [118]. В основе метода лежит пространственная дискретизация уравнений Максвелла по конечно-разностной схеме [189; 190]. Пространству модели сопоставляется сетка из конечного числа регулярно расположенных узлов, в каждом узле задается значение одной из компонент электрического или магнитного поля. Частные производные в уравнениях Максвелла заменяется отношением разности между значениями компонент поля в смежных узлах к расстоянию между этими узлами (по пространству и времени). Отличительной чертой, позволившей FDTD выделиться в отдельный метод, стало особое расположение компонент поля по узлам сетки. Предложенное в оригинальной работе Йи [104], оно естественным образом позволяет получать численные уравнения Максвелла для очень широкого спектра задач.

Обозначим основные сильные и слабые стороны метода. К сильным сторонам относится:

- Возможность естественным образом описывать в модели взаимодействие электромагнитного поля со «сложными» материалами: анизотропными, нелинейными, дисперсными. Существуют варианты алгоритма, позволяющие моделировать проводники и активные среды (усиливающие проходящую через них волну);
- Возможность задавать произвольный источник, как в пространстве, так и во времени, что позволяет в том числе моделировать импульсные широкополосные источники;

- Использование уравнений Максвелла в явном виде, не привлекая приемы линейной алгебры.

Слабые стороны метода в основном определяет дискретизация пространства равномерной сеткой:

- Ступенчатая аппроксимация изогнутых поверхностей. Прямоугольная структура сетки предполагает, что границы структур в области расчета совпадают с границами узловых структур. Это становится неудобным для изогнутых поверхностей. Для борьбы со ступенчатой аппроксимацией используется целый набор модификации метода FDTD [118], изменяющих либо начальное задание параметров модели, либо уже сами итерационные уравнения;
- Вычислительная трудоемкость метода, которая становится особо критичной для объектов, включающих в себя особенности на разных пространственных масштабах. Для того, чтобы правильно учесть вклад «мелких» особенностей, шаг дискретизации должен быть значительно меньше их характерного масштаба. Так как метод изначально предполагает равномерное разбиение расчетной области, общее число узлов сетки разбиения становится очень большим.

Для борьбы с большой вычислительной трудоемкостью есть два подхода. Первый подход заключается в совершенствовании используемого алгоритма дискретизации уравнений Максвелла [118]. Подобные приемы позволяют в несколько раз сократить время вычислений при сохранении сходимости и достоверности метода.

Второй подход предполагает реализацию базовых алгоритмов метода FDTD с возможностью параллельных вычислений. В этом случае для ускорения и масштабирования вычислений экономически целесообразными могут оказаться инвестиции в увеличение вычислительной мощности аппаратной базы, а не в совершенствование вычислительного алгоритма, согласно закону Мура [191]. Учитывая текущее состояние метода FDTD, возможность увеличения эффективности последовательного алгоритма в два раза каждые полтора года представляется крайне маловероятной. Таким образом, современная и универсальная реализация метода FDTD должна, при относительной простоте алгоритмов, применяемых для расчетов, максимально эффективно использовать ресурсы для параллельных вычислений.

Задача волноводного распространения электромагнитных сигналов произвольной формы на большие расстояния в сильно неоднородной и анизотропной среде с дисперсией приводит к необходимости реализации параллельного алгоритма FDTD, обладающего высокими эффективностью. Так как в расчетная область подразумевает наличие Земной поверхности, наиболее оптимальным оказывается решение уравнений Максвелла в сферической системе координат (СК) для избежания влияния ступенчатой аппроксимации на границе раздела Земля-атмосфера.

В разделе А.1 1 представлены уравнения Максвелла и их дискретизация.

В разделе А.2 описаны основные типы границ расчетной области, а также их реализация в методе FDTD.

В разделе А.3 приведено описание дополнительного уравнения для расчета тока проводимости заряженных частиц среды, а также представлены методы решения дополнительного ДУ для случая однокомпонентной (электроны)/многокомпонентной (электроны + положительные/отрицательные ионы) ионосферной плазмы.

А.1 Формулировка метода FDTD для решения уравнений Максвелла

Электродинамическая система описывается уравнениями Максвелла:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_s + \vec{J}_c, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

а также двумя материальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где $\vec{J}_s$ и $\vec{J}_c$ — плотности тока источника и проводимости среды, соответственно.

А.1.1 Дискретизация основных уравнений

В сферической СК уравнения Максвелла по компонентам выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial D_\varphi}{\partial t} &= -J_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \\
 \frac{\partial D_r}{\partial t} &= -J_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (H_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right] \\
 \frac{\partial D_\theta}{\partial t} &= -J_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi) \right] \\
 -\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \\
 -\frac{\partial B_r}{\partial t} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right] \\
 -\frac{\partial B_\theta}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} \right].
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Система уравнений (А.3) содержит только первые производные по пространству и времени. Численную аппроксимацию для первой производной можно записать в виде:

$$\frac{\partial u^n(i\Delta a)}{\partial a} = \frac{(u^n((i+0,5)\Delta a) - u^n((i-0,5)\Delta a))}{\Delta a} + O[(\Delta a)^2], \tag{A.4}$$

где a в для данного выражения обозначает одну из координат φ, r, θ или t . Выражение позволяет получить приближенное значение производной точности второго порядка.

Используемый метод дискретизации основывается на базе стандартного алгоритма Йи [104]. Компоненты магнитного поля $\vec{H}$ рассчитываются в полуполузлах сетки $n + 1/2$ по времени, а компоненты электрического поля $\vec{E}$ рассчитываются со сдвигом в полшага — в целых узлах сетки n по времени. Пространственное расположение полей в ячейке расчетной сетки изображено на рисунке А.1.

Систему уравнений (А.3) в сферической СК можно дискретизовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{D_\varphi^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) - D_\varphi^n(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = & -J_\varphi(i + \frac{1}{2}, j, k) \\ & + \frac{1}{r(j)} \left[\frac{r(j + \frac{1}{2}) H_\theta^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - r(j - \frac{1}{2}) H_\theta^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta r} \right. \\ & \left. - \frac{H_r^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_r^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta \theta} \right]. \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D_r^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) - D_r^n(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = & -J_r(i, j + \frac{1}{2}, k) \\ & + \frac{1}{r(j + \frac{1}{2}) \sin \theta(k)} \left[\frac{\sin \theta(k + \frac{1}{2}) H_\varphi^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \sin \theta(k - \frac{1}{2}) H_\varphi^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta \theta} \right. \\ & \left. - \frac{H_\theta^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_\theta^{n+1/2}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta \varphi} \right], \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D_\theta^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) - D_\theta^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = & -J_\theta(i, j, k + \frac{1}{2}) \\ & + \frac{1}{r(j)} \left[\frac{1}{\sin \theta(k + \frac{1}{2})} \frac{H_r^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_r^{n+1/2}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta \varphi} \right. \\ & \left. - \frac{r(j + \frac{1}{2}) H_\varphi^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - r(j - \frac{1}{2}) H_\varphi^{n+1/2}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta r} \right], \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{B_\varphi^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - B_\varphi^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = & \\ & - \frac{1}{r(j + \frac{1}{2})} \left[\frac{r(j + 1) E_\theta^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - r(j) E_\theta^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta r} \right. \\ & \left. - \frac{E_r^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_r^n(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta \theta} \right], \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{B_r^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - B_r^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \\
& - \frac{1}{r(j) \sin \theta(k+\frac{1}{2})} \left[\frac{\sin \theta(k+1) E_\varphi^n(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - \sin \theta(k) E_\varphi^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta \theta} \right. \\
& \quad \left. - \frac{E_\theta^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_\theta^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta \varphi} \right], \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{B_\theta^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - B_\theta^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \\
& - \frac{1}{r(j+\frac{1}{2})} \left[\frac{E_r^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_r^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta \varphi \sin(\theta(k))} \right. \\
& \quad \left. - \frac{r(j+1) E_\varphi^n(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - r(j) E_\varphi^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta r} \right]. \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

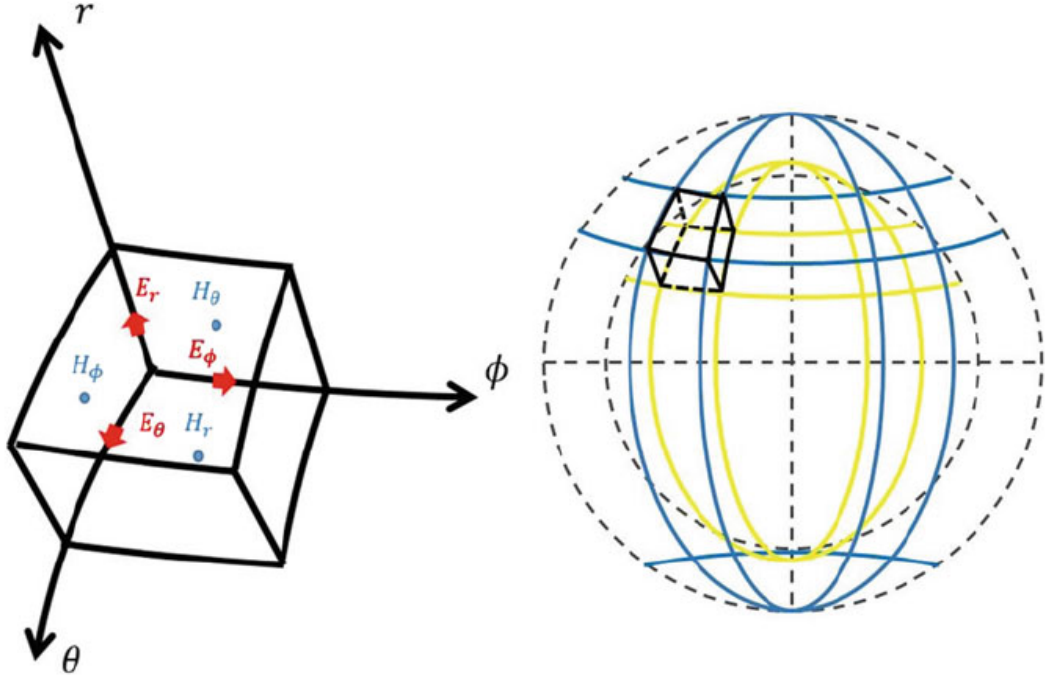


Рисунок А.1 — Иллюстрация расположения электромагнитного поля в ячейке сферической геометрии.

А.2 Формулировка граничных условий

Для эффективного решения различных задач электродинамики необходимо разрешать поля для следующих типов граничных условий:

- идеальный электрический проводник;
- периодические граничные условия (для случая замкнутой расчетной области);
- импедансные граничные условия (учет конечной проводимости границы расчетной области);
- поглощающие граничные условия;
- решение в точке сингулярности (для сферической СК при $\theta = 0^\circ$ и 180°).

Идеальный электрический проводник

Граничное условие Perfect Electric Conductor (PEC) задается за счет зануления нормальной компоненты электрического поля и тангенциальных компонент магнитного поля на границе расчетной области:

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= 0 \\ H_{\parallel} &= 0. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Разрешение поля в точке сингулярности

Особое решение уравнений Максвелла в сферической СК необходимо при $\theta = 0^\circ$ и 180° . Исходя из схемы ячейки, примыкающей к точке сингулярности, согласно рисунку А.2 считаем, что в узлах при $\theta = 0^\circ$ и 180° компоненты E_φ и H_θ равны нулю. Компоненты E_θ , H_r и H_φ вычисляются по обычным уравнениям из раздела А.1.1, а для расчета компоненты E_r необходимо воспользоваться

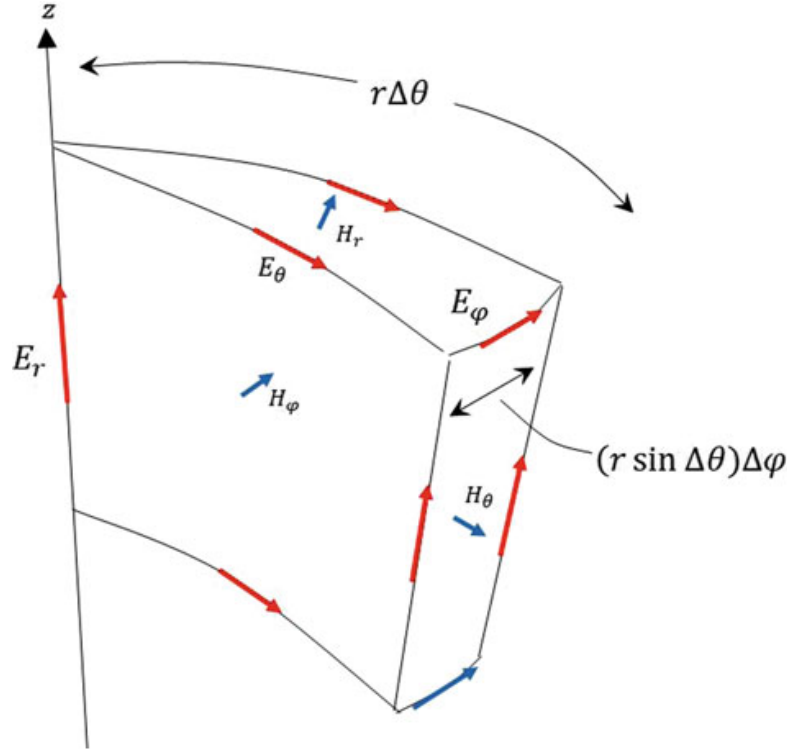


Рисунок А.2 — Конфигурация полей в ячейке, примыкающей к точке сингулярности.

уравнением Максвелла (Ампера) в интегральной формулировке. рисунок А.3 иллюстрирует ячейки сетки в области точки сингулярности.

Рассмотрим точку сингулярности при $\theta = 0^\circ$. Используя закон Ампера: $\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s} = \oint \vec{H} d\vec{l}$, левую часть можно записать в виде:

$$\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s} = \frac{\partial D_r|_{i,0,k}}{\partial t} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\Delta\theta/2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi r^2 (1 - \cos \frac{\Delta\theta}{2}) \frac{\partial D_r|_{i,0,k}}{\partial t}, \quad (\text{A.12})$$

а правую часть в виде:

$$\int \vec{H} d\vec{l} = \oint_{\varphi=0}^{2\pi} H_\varphi r \sin \theta d\varphi = r \Delta\varphi \sin \frac{\Delta\theta}{2} \sum_{i=0}^{N_\varphi-1} H_\varphi|_{i,1/2,k}. \quad (\text{A.13})$$

Таким образом уравнение для D_r в точке сингулярности:

$$\frac{D_r|_{i,0,k}^{n+1} - D_r|_{i,0,k}^n}{\partial t} = \frac{\Delta\varphi \sin \Delta\theta/2}{2\pi r (1 - \cos \Delta\theta/2)} \sum_{i=0}^{N_\varphi-1} H_\varphi|_{i,1/2,k}^{n+1/2}. \quad (\text{A.14})$$

В силу симметрии выражение для $\theta = 180^\circ$:

$$\frac{D_r|_{i,0,k}^{n+1} - D_r|_{i,0,k}^n}{\partial t} = \frac{\Delta\varphi \sin \Delta\theta/2}{2\pi r (1 - \cos \Delta\theta/2)} \sum_{i=0}^{N_\varphi-1} H_\varphi|_{i,N_\varphi-1/2,k}^{n+1/2}. \quad (\text{A.15})$$

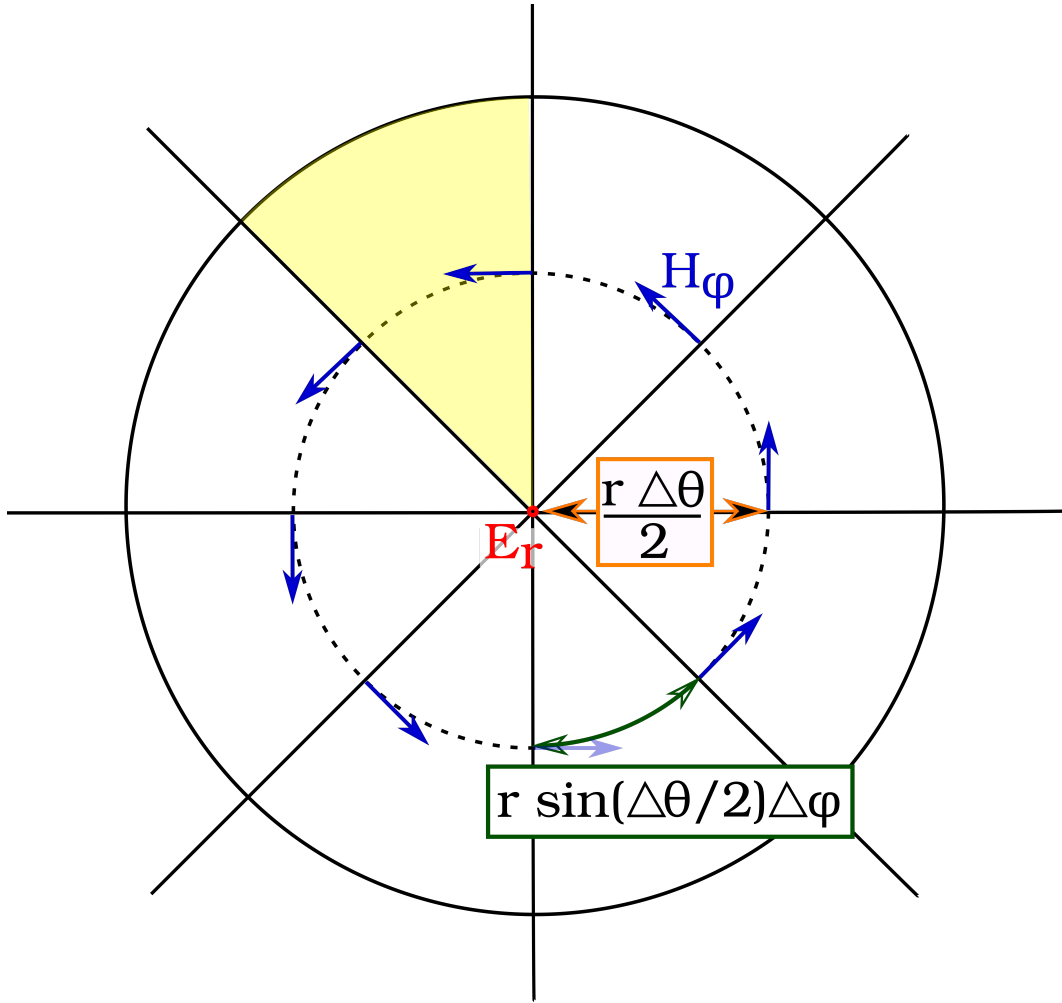


Рисунок А.3 — Конфигурация сетки FDTD в области точки сингулярности, для иллюстрации уравнения интегрального уравнения Ампера [192].

Периодические граничные условия

Для реализации периодических граничных условий в граничных узлах необходимо на соответствующих границах добавить фиктивные узлы в соответствии с рисунком А.4. Так как используемое конечно-разностное выражение для первой производной по пространству требует значения полей только в соседних узлах сетки, необходимо добавить только один фиктивный узел у границы вдоль соответствующей координаты. При этом, после решения уравнений Максвелла на очередном временном шаге требуется пересылка значений полей в фиктивные ячейки, в соответствии с рисунком А.4.

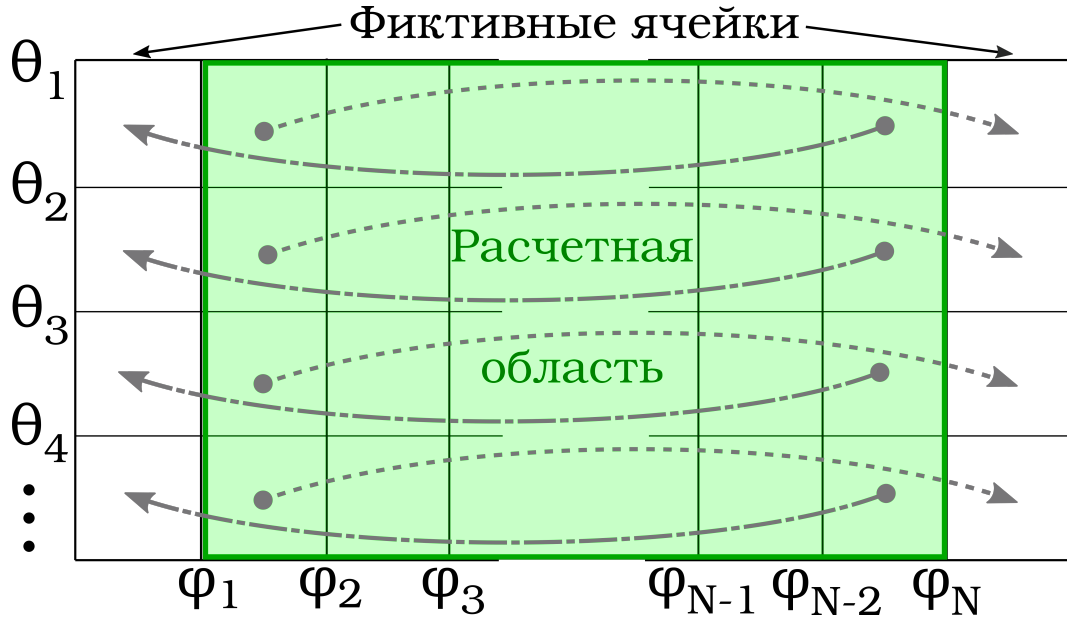


Рисунок А.4 — Иллюстрация реализации периодических граничных условий вдоль направления φ для сферической системы координат.

Импедансные граничные условия

Назовем отношение тангенциальных составляющих $E_{\parallel}$ $H_{\parallel}$ на границе поверхности S поверхностным импедансом:

$$Z_s = \frac{E_{\parallel}}{H_{\parallel}}. \quad (\text{A.16})$$

За исключением идеализированного случая бесконечной проводимости одной из сред, составляющие $E_{\parallel}$ и $H_{\parallel}$ непрерывны при переходе через границу, следовательно выражение (A.16) в равной степени относится к полям по обе стороны границы.

Теперь предположим, что оптическая плотность среды №2 намного больше, чем у среды №1, тогда угол преломления падающей волны весьма мал. При любых углах падения волна во второй среде распространяется практически по нормали к границе раздела. Следовательно, в этой среде векторы напряженности поля параллельны границе, а соотношение между ними записывается в виде:

$$E_2 = Z_2 (n \times H_2). \quad (\text{A.17})$$

Это соотношение справедливо для любой точки во второй среде, в том числе и для границы раздела. Так как нормальные составляющие поля во второй среде

практически отсутствуют, а тангенциальные непрерывны при переходе через границу, можно заменить E_2 на $E_{2\tau} = E_{1\tau}$, а H_2 на $H_{2\tau} = H_{1\tau}$. Условие (A.17) можно записать в виде:

$$E_{1\parallel} = Z_c (n \times H_{1\parallel}), \quad (\text{A.18})$$

где $Z_c = Z_2$. Таким образом, поверхностный импеданс на границе раздела с оптически плотной средой равен ее волновому сопротивлению (граничное условие Леонтовича) [193]. Далее $E_{1\parallel}$ и $H_{1\parallel}$ обозначаются, как $E_{\parallel}$ и $H_{\parallel}$, соответственно.

С тех пор, как импедансные граничные условия впервые были сформулированы Леонтовичем в 1948 году [194], они повсеместно используются для анализа параметров отражения и прохождения электромагнитной волны при наличии в области расчета поглощающих диэлектриков или неидеальных проводников. В общем случае расчет отражения электромагнитной волны от таких объектов подразумевает дискретизацию всего объекта целиком, однако технология импедансных граничных условий позволяет аппроксимировать электромагнитное поле только на границе неидеального проводника, не вычисляя поле внутри.

Обзор методов решения импедансных граничных условий [195]

Самым простым и широко применяемым методом расчета приближенных граничных условий, в том числе и во временной области, является метод SIBC (Surface Impedance Boundary Condition). В его основе лежит предположение, что тангенциальные компоненты электрического поля соотносятся с тангенциальными компонентами магнитного поля посредством скалярного множителя (A.18). Искомый множитель вычисляется путем решения задачи отражения нормально падающей плоской волны на бесконечную плоскую поверхность из заданного материала. Не смотря на простую концепцию, метод позволяет с хорошей точностью решать большой класс задач, а именно, в случае, когда характеристики отражения от границы считаются одинаковыми для произвольного угла падения волны. Такие условия характерны для

поверхностей из материала, обладающего большим показателем преломления или хорошей поглощающей способностью.

Для поверхностей, характеристики отражения которых сильно зависят от угла падения волны, метод SIBC не подходит. Множество сложных поверхностей, например из анизотропных материалов, меняет поляризацию падающей волны при отражении. В таком случае применяется метод граничных условий схожий с SIBC: Tensor Impedance Boundary Condition (TIBC). Отличие заключается в том, что TIBC содержит пару линейных уравнений, связывающих тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей. Данный метод также, как и SIBC, получается путем решения задачи отражения нормально падающей волны от интересующей границы и обладает схожими недостатками, а именно, характеристики отражающей поверхности должны быть независимы от угла падения волны. Это сильно сокращает применимость вышеописанных методов до хорошо поглощающих поверхностей.

Учет производных компонент электромагнитного поля в расчете граничных условий позволяет моделировать зависимость характеристик отражения от угла падения. Приближенные методы расчета граничных условий, содержащие производные электромагнитного поля, называются High Order Impedance Boundary Condition (HOIBC). На основе концепции HOIBC был получен метод Generalized Impedance Boundary Condition (GIBC) [196]. В этом методе связь нормальных компонент электрического и магнитного полей задается парой дифференциальных уравнений. Учитывая производные по нормали нормальных компонент поля при расчете граничных условий, можно смоделировать зависимость отражающих границ от угла падения, и таким образом, GIBC способен моделировать более широкий класс поверхностей. Коэффициенты, появляющиеся в дифференциальных уравнениях зависят от локальных параметров отражающей поверхности и могут быть определены несколькими способами: либо исследованием характеристик отражения от плоской поверхности при различных углах падения волны, либо при использовании разложения полей в ряды Тейлора.

Более точный подход методов HOIBC получается за счет повышения расчетной сложности. При использовании HOIBC необходимо решать как систему дифференциальных, так и интегральных уравнений, по сравнению с методами SIBC и TIBC. В случае, когда отражающий слой не замыкается проводником, HOIBC позволяет установить параметры прохождения, связывая тангенциаль-

ные компоненты полей и их производных по обе стороны тонкого отражающего слоя.

В задаче отражения электромагнитной волны от проводящей земной поверхности с хорошим приближением можно использовать метод SIBC.

Благодаря достаточно простой формулировке метод SIBC оказывается очень эффективен для расчета интегральных уравнений в частотной области, однако также может быть использован и при расчетах во временной области (например в FDTD).

Формулировка метода SIBC частотозависимая. Это означает, что во временной области уравнение (A.18) представляется интегралом свертки. Непосредственное вычисление интеграла свертки требует хранения значений электромагнитного поля на каждом шаге по времени, что является неприемлемым. Эта проблема была частично решена в работе [197] за счет использования приближенного рекурсивного вычисления интеграла свертки (см. раздел A.4), что однако все равно требовало дополнительных вычислений (экспоненциальной аппроксимации на каждом временном шаге). В работе [198] вышеописанный метод был усовершенствован и сформулирован для поглощающего диэлектрического полупространства, а также для тонкого поглощающего диэлектрика. Позднее в работе [199] был выявлен недостаток метода [198], приводящий к значительной ошибке в низкочастотном диапазоне. Стоит отметить, что использование SIBC в FDTD не только позволяет использовать менее подробную дискретизацию пространства, но и использовать больший шаг по времени, что значительно уменьшает трудоемкость прямого вычислительного подхода.

В случае диэлектрического полупространства нормализованная импедансная функция аппроксимируется в частотной области при помощи рядов рациональных функций первого порядка. Так как нормализованная импедансная функция не зависит от параметров среды, аппроксимация выполняется только один раз, а результат функции для различных порядков записывается в таблицу. Далее, используя эту приближенную нормализованную импедансную функцию, и аппроксимируя волну кусочно-линейной функцией во времени, выводится конечное выражение для рекурсивного вычисления интеграла свертки.

В общем случае поверхность поглощающего диэлектрического объекта является криволинейной, и это должно быть учтено в формулировке SIBC. Однако, если наименьший радиус кривизны поверхности много больше, чем длина волны внутри рассеивателя, поверхность можно считать плоской, и исполь-

зовать метод SIBC для случая плоской поверхности. В традиционном FDTD номинальный размер расчетной ячейки обычно задается не более $1/10$ длины волны самой большой частоты, так что без потери точности для плоской поверхности можно использовать метод SIBC.

Реализация приближения SIBC для FDTD

Рассмотрим волну, падающую на полупространство, заполненное поглощающим диэлектриком. Считаем, что показатель преломления диэлектрика достаточно большой, и в соответствии с формулировкой граничных условий Леонтовича, падающую волну можно разложить на сумму плоских волн, и при этом все плоские волны будут преломляться приблизительно по нормали к поверхности. Тогда плоские волны в диэлектрике можно аппроксимировать суммой ТЕ и ТМ волн, причем искомый граничный импеданс есть импеданс диэлектрика:

$$Z_c = \frac{\sqrt{j\omega\mu_2}}{\sqrt{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = \eta_2 \frac{\sqrt{j\omega\epsilon_2/\sigma_2}}{\sqrt{1 + j\omega\epsilon_2/\sigma_2}}. \quad (\text{A.19})$$

где Уравнение (A.18) можно представить во временной области в виде временной свертки выражения поверхностного импеданса Z_c и тангенциального магнитного поля $\vec{H}_{\parallel}$. Как уже было отмечено, для непосредственного вычисления этой свертки необходимо знать эволюцию тангенциального поля $\vec{H}_{\parallel}$ в каждой расчетной точке. На практике применяются численные приближения для снижения вычислительной нагрузки. Для этого функция поверхностного импеданса Z_c (A.19) аппроксимируется суммой рациональных функций первого порядка (что эквивалентно экспоненциальному приближению во временной области).

Заменяя $j\omega$ переменной s в уравнении (A.19), получаем:

$$Z_c(s) = \eta_2 \sqrt{\frac{s/a}{1 + s/a}}, \quad (\text{A.20})$$

где

$$a \equiv \sigma_2/\epsilon_2. \quad (\text{A.21})$$

Определив нормализованную импедансную функцию Z_N в виде

$$Z_N(s') = \frac{1}{\eta_2} Z_c(as') = \sqrt{\frac{s'}{1+s'}} \quad (\text{A.22})$$

мы таким образом избавляемся от зависимости параметров среды в уравнении (A.20). Таким образом, при выполнении численных расчетов FDTD, нормализованную функцию в расчете Z_N нужно вычислить только однажды. Аппроксимация функции (A.22) выполняется на интервале $s' = (0, 3]$ (эквивалент частотного диапазона до нескольких десятков ГГц) при помощи многочленов Чебышева различных порядков:

$$Z_N(s') \sim 1 - \sum_{i=1}^L \frac{C_i}{\omega_i + s'}, \quad (\text{A.23})$$

где L обозначает количество рациональных функции первого порядка. Результаты аппроксимации представлены в работе [198] виде коэффициентов рациональных функций (C_i и ω_i). Применяя к уравнению (A.23) обратное преобразование Лапласа и записывая его в виде интеграла временной свертки, получаем уравнение (A.18) во временной области:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel}(t) = Z_c(t) * [\hat{n} \times \vec{H}_{\parallel}(t)] &\simeq \eta_2 [\hat{n} \times \vec{H}_{\parallel}(t)] \\ &- a\eta_2 \int_0^t \sum_{p=1}^P aC_i e^{-a\omega_i(t-\tau)} [\hat{n} \times \vec{H}_{\parallel}(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Считая волну кусочно-линейной функцией и применяя формулу рекурсивной свертки, уравнение (A.24) можно переписать в виде:

$$\vec{E}_{\parallel}(n\Delta t) = \eta_2 [\hat{n} \times \vec{H}_{\parallel}(n\Delta t)] - \sum_{i=1}^L A_i(n\Delta t), \quad (\text{A.25})$$

где

$$A_i(n\Delta t) = p_{i1} [\hat{n} \times \vec{H}_{\parallel}(n\Delta t)] + p_{i2} [\hat{n} \times \vec{H}_{\parallel}((n-1)\Delta t)] + p_{i3} A_i((n-1)\Delta t) \quad (\text{A.26})$$

и

$$p_{i1} = \eta_2 \frac{C_i}{\omega_i} [1 + (e^{-a\omega_i \Delta t} - 1)/(\Delta t a \omega_i)], \quad (\text{A.27})$$

$$p_{i2} = \eta_2 \frac{C_i}{\omega_i} [1/(\Delta t a \omega_i) - e^{-a\omega_i \Delta t} (1 + 1/(\Delta t a \omega_i))], \quad (\text{A.28})$$

$$p_{i1} = e^{-a\omega_i \Delta t}. \quad (\text{A.29})$$

Заранее рассчитав значения (A.27)–(A.29), поле $\vec{E}_{\parallel}$ в момент времени $t = n\Delta t$ может быть рекурсивно рассчитано при помощи уравнений (A.25, A.26).

Как уже было отмечено, в работе [199] была отмечена большая погрешность метода [198] для случая низких частот. При этом был предложен несколько иной подход для аппроксимации выражения, описывающего поверхностный импеданс (A.22). Вместо выражения (A.23) используется функция вида:

$$Z_N(s') \sim b - \sum_{i=1}^L \frac{C_i}{\omega_i + s'}. \quad (\text{A.30})$$

При этом аппроксимация выполняется на отрезке $s' = (0, 0.1]$. $s' = 0.1$ соответствует частотному пределу, для которого справедливо приближение Леонтовича (т.е. $\sigma_2/\omega\epsilon_2 \gg 1$). Также было отмечено, что минимальным значением количества слагаемых функции (A.30), позволяющим с хорошей точностью аппроксимировать выражение (A.22) на всем рассматриваемом диапазоне $s' = (0, 0.1]$, является $L = 8$. Уравнение (A.18) во временной области принимает следующий вид:

$$\vec{E}_{\parallel}(t) = \eta_2 b \vec{H}_{\parallel}(t) - \eta \int_0^t \sum_{i=1}^L a C_i e^{-a\omega_i(t-\tau)} [\hat{n} \times \vec{H}_{\parallel}(\tau)] d\tau. \quad (\text{A.31})$$

Коэффициенты b , C_i , ω_i для случая $L = 8$ представлены в Таблице 4.

Таблица 4 — Коэффициенты рациональных функций, аппроксимирующих функцию (A.30), описывающую поверхностный импеданс.

Параметры аппроксимации	C_i	ω_i
$s' = (0, 0.1]$ $b = 0.70018543240140$	0.13055183741037	0.24602135652151
	0.00306555825088	0.03099397377339
	0.00022653939947	0.00536537536091
	0.00001454080921	0.00080892974513
	0.00000069880015	0.00009908827094
	0.00000002248575	0.00000910328390
	0.00000000039467	0.00000053822896
	0.00000000000235	0.00000001385344

Поглощающие граничные условия — Convolutional Perfect Matched Layer

Реализация поглощающих граничных условий является одним из самых важных аспектов в методе FDTD. Впервые решение поглощающей границы было представлено в работе [200] в формулировке разделения компонент полей на составляющие, а позже в работе [201] в терминах «растянутых» координат. Реализация поглощения волны производится за счет добавления перед границей отражения дополнительного слоя, в котором определенным образом вводятся искусственные значения электрической и магнитной проводимости среды. Это позволяет добиться значительного затухания электромагнитной волны внутри дополнительного слоя, тем самым имитируя покидание электромагнитного поля расчетной области. Было доказано, что в предельном случае отражение от поглощающей границы отсутствует, при этом внутри поглощающего слоя волна произвольной частоты и при произвольном угле падения экспоненциально затухает.

Формулировка сферического CPML в частотной области

Как было отмечено ранее, для многих задач электродинамики более удобно использовать сферическую систему координат. Изначально концепция поглощающего слоя PML была разработана для декартовой системы координат. Позже в работе [202] реализация PML за счет «растяжения» координат была представлена и для сферической СК.

К сожалению, в случае сферической СК из-за более сложной формы оператора Гамильтона нет решения поглощающей границы для метода FDTD одновременно вдоль нескольких координат. Далее будет представлено решение для отдельной реализации поглощающего слоя вдоль координат r и φ .

Для декартовой системы координат продолжение уравнений Максвелла в комплексную плоскость в частотной формулировке приводит к модификации

оператора Гамильтона:

$$\nabla_{\sigma} \equiv \hat{x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{A.32})$$

где комплексные переменные выражаются в виде:

$$s_{\zeta}(\zeta) = a_{\zeta}(\zeta) + i \frac{\sigma_{\zeta}(\zeta)}{\omega \varepsilon_0}, \quad \zeta = x, y, z. \quad (\text{A.33})$$

Очевидно, что при $a_{\zeta}(\zeta) = 1$ и $\sigma_{\zeta}(\zeta) = 0$ уравнения Максвелла приводятся к обычной записи. Для того, чтобы минимизировать ошибки отражения от поглощающих слоев, величины $a_{\zeta}(\zeta)$ и $\sigma_{\zeta}(\zeta)$ обычно задаются возрастающими степенными функциями внутри поглощающего слоя. Заменой переменных

$$\bar{\zeta} = \int_0^{\zeta} s_{\zeta}(\zeta') d\zeta', \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{s_{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (\text{A.35})$$

оператор Гамильтона ∇_{σ} приводится к привычной форме. Таким образом, вычисления электромагнитных полей приводятся к виду уравнений Максвелла масштабированием координатной области.

Сначала приводим радиальную компоненту к комплексной форме:

$$r \rightarrow \bar{r} = \int_0^r s_r(r') dr' = b_r(r) + i \frac{\Delta_r(r)}{\omega \varepsilon_0}, \quad (\text{A.36})$$

где

$$s_r(r) = a_r(r) + i \frac{\sigma_r(r)}{\omega \varepsilon_0}. \quad (\text{A.37})$$

Аналогично декартовой системе координат, параметры $a_r(r)$ и $\sigma_r(r)$ задаются возрастающими функциями. В данной работе используем полиномиальные возрастающие функции:

$$a_r(r) = \begin{cases} 1 & R_{min} < r < R_{in} \\ 1 + (K_{max} - 1) \left(\frac{r - R_{in}}{d} \right)^m, & R_{in} < r < R_{max} \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

$$\sigma_r(r) = \begin{cases} 0, & R_{min} < r < R_{in} \\ \sigma_{max} \left(\frac{r - R_{in}}{d} \right)^m, & R_{in} < r < R_{max} \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

где R_{min} и R_{max} — нижняя и верхняя границы расчетной области соответственно. R_{in} — граница между средой и PML.

Таким образом для уравнения Фарадея в комплексных координатах в частотной области получаем:

$$(i\omega\bar{r}(\omega))\mu H_r(\omega) = \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\varphi(\omega)) - \frac{\partial E_\theta(\omega)}{\partial\varphi} \right] \quad (\text{A.40})$$

$$(i\omega s_r(\omega))\mu\bar{H}_\theta(\omega) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}(s_r(\omega)E_r(\omega)) - \frac{\partial\bar{E}_\varphi(\omega)}{\partial r} \quad (\text{A.41})$$

$$(i\omega s_r(\omega))\mu\bar{H}_\varphi(\omega) = \frac{\partial}{\partial r}(\bar{E}_\theta(\omega)) - \frac{\partial(s_r(\omega)\bar{E}_r(\omega))}{\partial\theta} \quad (\text{A.42})$$

где

$$H_\theta(\omega) = \frac{\bar{H}_\theta(\omega)}{\bar{r}(\omega)} = \frac{\bar{H}_\theta(\omega)}{b_r(r) + i\frac{\Delta_r(r)}{\omega\varepsilon_0}} \quad (\text{A.43})$$

$$H_\varphi(\omega) = \frac{\bar{H}_\varphi(\omega)}{\bar{r}(\omega)} = \frac{\bar{H}_\varphi(\omega)}{b_r(r) + i\frac{\Delta_r(r)}{\omega\varepsilon_0}} \quad (\text{A.44})$$

Аналогично, для уравнения Ампера в комплексных координатах в частотной области получаем:

$$(i\omega\bar{r}(\omega))\varepsilon_0 E_r(\omega) = -\frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta H_\varphi(\omega)) - \frac{\partial H_\theta(\omega)}{\partial\varphi} \right] \quad (\text{A.45})$$

$$(i\omega s_r(\omega))\varepsilon_0\bar{E}_\theta(\omega) = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}(s_r(\omega)H_r(\omega)) + \frac{\partial\bar{H}_\varphi(\omega)}{\partial r} \quad (\text{A.46})$$

$$(i\omega s_r(\omega))\varepsilon_0\bar{H}_\varphi(\omega) = -\frac{\partial}{\partial r}(\bar{H}_\theta(\omega)) + \frac{\partial(s_r(\omega)\bar{H}_r(\omega))}{\partial\theta} \quad (\text{A.47})$$

где

$$E_\theta(\omega) = \frac{\bar{E}_\theta(\omega)}{\bar{r}(\omega)} = \frac{\bar{E}_\theta(\omega)}{b_r(r) + i\frac{\Delta_r(r)}{\omega\varepsilon_0}} \quad (\text{A.48})$$

$$H_\varphi(\omega) = \frac{\bar{E}_\varphi(\omega)}{\bar{r}(\omega)} = \frac{\bar{H}_\varphi(\omega)}{b_r(r) + i\frac{\Delta_r(r)}{\omega\varepsilon_0}} \quad (\text{A.49})$$

Уравнения сферического РМЛ во временной области

Для того, чтобы получить дифференциальные уравнения для РМЛ во временной области в сферической СК, необходимо применить обратное преобразование Фурье. Таким образом получаем для уравнения Фарадея:

$$(b_r(t) \frac{\partial}{\partial t} + \Delta_r) \mu H_r(t) = -\frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\varphi(t)) - \frac{\partial E_\theta(t)}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{A.50})$$

$$(a_r(t) \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_r) \mu \bar{H}_\theta(t) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [s_r(t) * E_r(t)] + \frac{\partial \bar{E}_\varphi(t)}{\partial r} \quad (\text{A.51})$$

$$(a_r(t) \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_r) \mu \bar{H}_\varphi(t) = -\frac{\partial \bar{E}_\theta(t)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} [s_r(t) * \bar{E}_r(t)] \quad (\text{A.52})$$

$$H_\theta = \bar{r}^{-1}(t) * \bar{H}_\theta(t) \quad (\text{A.53})$$

$$H_\varphi = \bar{r}^{-1}(t) * \bar{H}_\varphi(t) \quad (\text{A.54})$$

Аналогично для уравнения Ампера:

$$(b_r(t) \frac{\partial}{\partial t} + \Delta_r) \varepsilon_0 E_r(t) = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\varphi(t)) - \frac{\partial H_\theta(t)}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{A.55})$$

$$(a_r(t) \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_r) \varepsilon_0 \bar{E}_\theta(t) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [s_r(t) * H_r(t)] - \frac{\partial \bar{H}_\varphi(t)}{\partial r} \quad (\text{A.56})$$

$$(a_r(t) \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_r) \varepsilon_0 \bar{E}_\varphi(t) = \frac{\partial \bar{H}_\theta(t)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta} [s_r(t) * \bar{H}_r(t)] \quad (\text{A.57})$$

$$E_\theta = \bar{r}^{-1}(t) * \bar{E}_\theta(t) \quad (\text{A.58})$$

$$E_\varphi = \bar{r}^{-1}(t) * \bar{E}_\varphi(t), \quad (\text{A.59})$$

где оператор $*$ обозначает временную свертку.

Для упрощения реализации временной свертки, необходимо выполнить следующие преобразования. Рассмотрим $s_r(t) * H_r(t)$ и $\bar{r}^{-1} * \bar{E}_\theta(t)$ в качестве примера. Выражения для $s_r(t)$ и $\bar{r}^{-1}(t)$ получаем при помощи обратного преобразования Фурье:

$$s_r(\omega) \rightarrow a_r(r) \delta(t) + \sigma_r(r) u(t) = s_r(t) \quad (\text{A.60})$$

$$\bar{r}^{-1}(\omega) \rightarrow \frac{\delta(t)}{b_r(r)} - \frac{\Delta_r(r)}{b_r^2(r)} \exp \left(-\frac{\Delta_r(r)t}{b_r(r)} \right) u(t) \quad (\text{A.61})$$

где $u(t)$ — функция Хевисайда, $\delta(t)$ — дельта-функция. Тогда выражения принимают вид:

$$s_r(t) * H_r(t) = a_r(t)H_r(t) + \sigma_r \int_0^t H_r(t')dt \quad (\text{A.62})$$

$$\bar{r}(t) * \bar{E}_\theta(t) = \frac{1}{b_r(r)} \left(\bar{E}_\theta(t) - \frac{1}{\tau_0} \int_0^t \bar{E}_\theta(t - \tau) e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau \right) \quad (\text{A.63})$$

где $\tau_0 = \frac{b_r(r)}{\Delta_r(r)}$. Для численного решения уравнения (A.63) можно применить метод обратной свертки [203–205]. При аппроксимации поля на каждом шаге по времени кусочно-линейной функцией (A.64) расчет получается достаточно точным:

$$\bar{E}(t) = \bar{E}^i + \frac{\bar{E}^{i+1} - \bar{E}^i}{\Delta t} (t - i\Delta t). \quad (\text{A.64})$$

Считая $t = n\Delta t$, для развернутого во времени поля получаем:

$$\bar{E}(n\Delta t - \tau) = \bar{E}^{n-m} + \frac{\bar{E}^{m-n-1} - \bar{E}^{n-m}}{\Delta t} (\tau - m\Delta t). \quad (\text{A.65})$$

Подставляя (A.65) в интеграл уравнения (A.63) и вычисля последний для произвольного шага m по времени получаем:

$$\int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \bar{E}_\theta(t - \tau) e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau = \bar{E}^{n-m} \chi^m + (\bar{E}^{n-m} - \bar{E}^{n-m-1}) \zeta^m, \quad (\text{A.66})$$

где

$$\chi^m = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau = \tau_0 e^{-\frac{m\Delta t}{\tau_0}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_0}} \right), \quad (\text{A.67})$$

$$\zeta^m = \frac{1}{\Delta t} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} (\tau - m\Delta t) e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau = -\frac{\tau_0^2}{\Delta t} \left[e^{-\frac{\Delta t}{\tau_0}} \left(\frac{\Delta t}{\tau_0} + 1 \right) - 1 \right] e^{-\frac{m\Delta t}{\tau_0}}. \quad (\text{A.68})$$

В результате итерационное решение уравнения (A.63) для поля E_θ можно записать в виде:

$$E_\theta^n = \frac{1}{b_r(r)} \left[\bar{E}_\theta^n - \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_0}} \right) Q_1^n + \frac{\tau_0}{\Delta t} \left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau_0}} \left(\frac{\Delta t}{\tau_0} \right) - 1 \right) Q_2^n \right], \quad (\text{A.69})$$

где

$$Q_1^n = \bar{E}_\theta^n + Q_1^{n-1} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_0}}, \quad (\text{A.70})$$

$$Q_2^n = (\bar{E}_\theta^{n-1} - \bar{E}_\theta^n) + Q_2^{n-1} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_0}}. \quad (\text{A.71})$$

Следует отметить, что при $n = 0$, Q_i^n считаются равными нулю.

Компоненты $E_\varphi, H_\theta, H_\varphi$ вычисляются аналогично.

А.3 Расчет плотности тока проводимости

В данном случае учет конечной проводимости среды (ионосферной плазмы) реализуется при помощи расчета тока проводимости среды. При этом дополнительное дифференциальное уравнение (ДУ) для тока проводимости следует из закона движения заряженных частиц вида k , которое записывается согласно работе [206]:

$$N_k m_k \left[\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial t} + (\vec{v}_k \cdot \nabla) \vec{v}_k \right] = \nabla \cdot p + N_k q_k (\vec{E} + \vec{v}_k \times \vec{B} + N_k m_k \vec{g} - \nu N_k m_k \vec{v}_k + \vec{v}_k S, \quad (\text{A.72})$$

где N_k — плотность частиц вида k , m_k , q_k и $\vec{v}_k$ — масса, заряд и скорость частиц k соответственно, p — давление, $\vec{B}$ — магнитное поле. В уравнении (A.72) можно сделать ряд упрощений:

- слагаемое $(\vec{v}_k \cdot \nabla) \vec{v}_k$ — описывает конвективное движение частиц, возникающее из-за градиента средней скорости. Можно пренебречь в приближении небольшой средней скорости частиц;
- слагаемое $\nabla \cdot p$ — описывает градиент давления заряженных частиц. Можно пренебречь в приближении холодной плазмы;
- слагаемое $N_k m_k \vec{g}$ — описывает гравитационный эффект. Оказывается малым по сравнению с электромагнитным взаимодействием.
- $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_\omega$, где B_0 — описывает постоянное геомагнитное поле и имеет значения $\sim \text{мкТл}$, в то время, как B_ω — волновое (переменное) магнитное поле (например, при $\vec{E} \sim 20 \text{ В/м}$, $\vec{B}_\omega \sim \text{нТл}$). Таким образом, можно считать $\vec{B} \sim \vec{B}_0$.
- слагаемое $\vec{v} S$ — описывает процессы переноса импульса при возникновении/уничтожении частиц, которым также можно пренебречь.

Вышеописанные упрощения позволяют избавиться от слагаемых, зависящих от квадрата скорости $\vec{v}$ и переменного магнитного поля $\vec{B}_\omega$, тем самым линеаризуя уравнение (A.72). Считая $J_k = N_k q_k \vec{v}_k$, плотность тока $\vec{J}_{ck}$ для k -ого вида частиц можно записать в виде:

$$\frac{\partial \vec{J}_{ck}}{\partial t} + \nu_k \vec{J}_{ck} = \varepsilon_0 \omega_{pk}^2 \vec{E} - \vec{\omega}_{ck} \times \vec{J}_{ck}, \quad (\text{A.73})$$

где ν_k — эффективная частота заряженных частиц с нейтралами, $\omega_{pk} = \sqrt{(N_k q_k^2)/(m_k \varepsilon_0)}$ — плазменная частота, $\vec{\omega}_{ck} = (q_k B_0/m_k) \vec{B}_0/|\vec{B}_0|$ — гироча-

стота в постоянном геомагнитном поле $\vec{B}_0$. При этом вектор $\vec{\omega}_{ck}$ параллелен вектору магнитного поля $\vec{B}_0$ для положительных ионов и антипараллелен для электронов и отрицательных ионов. Суммарная плотность тока проводимости рассчитывается, как $\vec{J}_c = \sum \vec{J}_{ck}$. При этом количество необходимых дополнительных ДУ соответствует количеству учитываемых заряженных компонент среды. Такой подход описания ионосферной проводимости предполагает, что известны плотности всех видов частиц, а также, то, что скорость изменения плотности частиц во времени пренебрежимо мала, в сравнении со скоростью частиц, т.е. рассматривается приближение холодной плазмы. Преимуществом такого подхода является автоматический учет частотной дисперсии среды, ионосферной анизотропии, возникающей за счет наличия геомагнитного поля, а также возможность явного учета электронно-ионного состава ионосферы.

Численное решение дополнительного ДУ

Так как решение ДУ для всех частиц оказывается идентичным, в данной главе для простоты в обозначении плотности тока проводимости J_{ck} опускается индекс. Дифференциальное уравнение (А.73) может быть линейно дискретизовано по времени только при условии $v\Delta t \ll 1$. Для расчета распространения КНЧ–СДВ–ДВ это условие накладывает жесткие ограничения на расчетный шаг по времени, так как у поверхности Земли эффективная частота соударений электронов с нейтралами достигает значений $\sim 10^9 \text{ с}^{-1}$. Это приводит к необходимости реализации более сложных схем дискретизации.

В данной работе реализовано несколько различных методов численного расчета ДУ (А.73).

- явный и неявный методы Беренже [109],
- неявный метод Беренже для случая многокомпонентной плазмы [113],
- экспоненциальный метод Ли [111],
- схема Бунемана [207].

Все схемы решения ДУ, предложенные Беренже [108; 109; 113] реализованы на основе экспоненциального приближенного решения уравнения (А.139)

(см. раздел А.4). В настоящей работе реализованы явная [108] и неявная [109] схемы решения дополнительно ДУ, предложенные Беренже.

Явная схема Беренже

В явной схеме [108] плотность тока рассчитывается вместе с магнитным полем в полуцелых узлах сетки по времени $n + 1/2$, а электрическое поле в целых узлах сетки n . Таким образом, уравнение для электрического поля будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{E}^{n+1} = \vec{E}^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \vec{J}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{H}^{n+1/2}. \quad (\text{A.74})$$

Уравнение (A.73) записываем в следующем виде:

$$\frac{\partial J_r}{\partial t} + \nu J_r + \frac{e}{m} B_\varphi \frac{J_\theta^{n+1/2} + J_\theta^n}{2} - B_\theta \frac{J_\varphi^{n+1/2} + J_\varphi^n}{2} = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_r^n. \quad (\text{A.75})$$

Решение ДУ в экспоненциальном приближении из уравнения (A.137) для компоненты r можно записать в виде:

$$J_r^{n+1/2} = a J_r^{n-1/2} + b \left[-\omega_{b\varphi} \frac{J_\theta^{n-1/2} + J_\theta^{n+1/2}}{2} - \omega_{b\theta} \frac{J_\varphi^{n-1/2} + J_\varphi^{n+1/2}}{2} + \varepsilon_0 \omega_0^2 E_r^n \right], \quad (\text{A.76})$$

где $a = e^{-\nu \Delta t}$, $b = \frac{1-e^{-\nu \Delta t}}{\nu}$, $\omega_{br} = \frac{e}{m} B_r$, $\omega_{b\theta} = \frac{e}{m} B_\theta$, $\omega_{b\varphi} = \frac{e}{m} B_\varphi$.

Аналогично записывая уравнения для оставшихся двух компонент, систему уравнений для плотности тока можно переписать в матричном виде:

$$A \vec{J}^{n+1/2} = B \vec{J}^{n-1/2} + b \varepsilon_0 \omega_p^2 \vec{E}^n, \quad (\text{A.77})$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \omega_{b\varphi} & -\omega_{b\theta} \\ -\omega_{b\varphi} & 1 & \omega_{br} \\ \omega_{b\theta} & -\omega_{br} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.78})$$

$$B = \begin{bmatrix} a & -\omega_{b\varphi} & \omega_{b\theta} \\ \omega_{b\varphi} & a & -\omega_{br} \\ -\omega_{b\theta} & \omega_{br} & a \end{bmatrix} \quad (\text{A.79})$$

В более простой форме:

$$\vec{J}^{n+1/2} = M_1 \vec{J}^{n-1/2} + b\epsilon_0 \omega_p^2 M_2 \vec{E}^n, \quad (\text{A.80})$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= A^{-1}B, \\ M_2 &= A^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

Неявная схема Беренже

В данном случае плотность токов рассчитывается одновременно с электрическим полем E (на n шаге по времени), тогда уравнение (A.73) можно переписать в виде:

$$\vec{E}^{n+1} = \vec{E}^n - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \frac{\vec{J}^{n+1} + \vec{J}^n}{2} + \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{H}^{n+1/2}, \quad (\text{A.82})$$

Уравнение (A.139) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial J_r}{\partial t} + \nu J_r + \frac{e}{m} B_\phi \frac{J_\theta^{n+1} + J_\theta^n}{2} - B_\theta \frac{J_\phi^{n+1} + J_\phi^n}{2} = \epsilon_0 \omega_p^2 \frac{E_r^{n+1} + E_r^n}{2}. \quad (\text{A.83})$$

и решается при помощи приближенного экспоненциального дифференцирования, аналогично выражению (A.76), но смещенному на $\Delta t/2$, и с переинтерполированным значением электрического поля E для момента времени $n + 1/2$ в правой части. Расписывая две оставшиеся компоненты уравнения (A.73), получаем матричную форму:

$$A \vec{J}^{n+1} = B \vec{J}^n + b\epsilon_0 \omega_p^2 M_2 \frac{\vec{E}^n + \vec{E}^{n+1}}{2}. \quad (\text{A.84})$$

Таким образом, выражение для плотности тока J в момент времени $n + 1$ можно записать в виде:

$$\vec{J}^{n+1} = M_1 \vec{J}^n + b\epsilon_0 \omega_p^2 \frac{\vec{E}^n + \vec{E}^{n+1}}{2}. \quad (\text{A.85})$$

Выражения (A.82, A.85) образуют систему уравнений для значений векторов E и J в момент времени $n + 1$. Подставляя, например (A.85) в (A.82) получаем уравнение для $\vec{E}_{n+1}$ в явном виде:

$$\vec{E}^{n+1} = M_3 \vec{E}^n - \frac{\Delta t}{2\epsilon_0} M_4 \vec{J}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon_0} M_5 \vec{\nabla} \times \vec{H}^{n+1/2} \quad (\text{A.86})$$

где

$$\begin{aligned}
M_3 &= [I + \Theta M_2]^{-1} [I - \Theta M_2] = [I + \Theta A^{-1}]^{-1} [I - \Theta A^{-1}] , \\
M_4 &= [I + \Theta M_2]^{-1} [I - M_1] = [I + \Theta A^{-1}]^{-1} [I - A^{-1}B] , \\
M_5 &= [I + \Theta M_2]^{-1} = [I + \Theta A^{-1}]^{-1} , \\
\Theta &= \frac{b\Delta t \omega_p^2}{4} .
\end{aligned} \tag{A.87}$$

выражаются через матрицы (A.81). Таким образом, сначала вычисляя $\vec{E}^{n+1}$ при помощи (A.86), значение для тока $\vec{J}^{n+1}$ легко может быть получено при помощи (A.85).

Можно сделать наоборот, подставляя (A.82) в (A.85) и получая явное выражение уже для тока $\vec{J}^{n+1}$:

$$\vec{J}^{n+1} = M_6 \vec{J}^n + M_7 \vec{E}^n + M_8 \vec{\nabla} \times \vec{H}^{n+1/2}, \tag{A.88}$$

где

$$\begin{aligned}
M_6 &= [I + \Theta A^{-1}]^{-1} [A^{-1}B - \Theta A^{-1}] , \\
M_7 &= 2 \frac{\epsilon_0}{\Delta t} M_8, \\
M_8 &= 2\Theta [I + \Theta A^{-1}] .
\end{aligned} \tag{A.89}$$

Таким образом, сначала рассчитав $\vec{J}^{n+1}$, электрическое поле $\vec{E}^{n+1}$ вычисляется при помощи выражения (A.82).

Для неявных схем также используется приближенное экспоненциальное дифференцирование. При этом в работе [109] отмечается, что также можно использовать и точное аналитическое выражение для экспоненциального дифференцирования, однако, тестовые расчеты показали, что при этом расчет оказывается не всегда стабильным.

Явная схема Ли [111]

Уравнение A.73 можно переписать в виде:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \Omega \vec{J} + \epsilon_0 \omega_{pl}^2 \vec{E}, \tag{A.90}$$

где

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\nu & -\omega_{b\theta} & \omega_{br} \\ \omega_{b\theta} & -\nu & -\omega_{b\varphi} \\ -\omega_{br} & \omega_{b\varphi} & -\nu \end{bmatrix} \quad (\text{A.91})$$

Обычно компоненты плотности тока располагаются в пространстве ячейки совместно с электрическим полем. Такое расположение применимо в случае, когда компоненты плотности тока рассчитываются независимо. В данном случае они завязаны системой уравнений, поэтому необходимо, чтобы все компоненты $\vec{J}$ находились в одной точке пространства расчетной ячейки. Задача интерполяции в трехмерном пространстве оказывается довольно трудоемкой, кроме того отдельного внимания требует интерполяция на границах расчетной области. Данный недостаток можно обойти, поместив значения $\vec{J}$ в вершины элементарной расчетной ячейки. Считая величины $\vec{E}$, $\vec{\omega}_b$, ν и ω_p постоянными, и усредненными на шаге по времени, можно выполнить преобразование Лапласа для уравнения (A.90):

$$\vec{J}(s) = (s\vec{I} - \Omega)^{-1} \vec{J}_0 + \varepsilon_0 \omega_p^2 \frac{1}{s} (s\vec{I} - \Omega)^{-1} \vec{E}, \quad (\text{A.92})$$

где $\vec{I}$ является единичной матрицей. Далее, выполняя обратное преобразование Лапласа для уравнения (A.92) получаем явное выражения для $\vec{J}(t)$, в соответствии с работой [111]:

$$\vec{J}(t) = \mathbf{A}(t) \vec{J}_0 + \varepsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{K}(t) \vec{E}, \quad (\text{A.93})$$

где $\omega_b^2 = \omega_{b\varphi}^2 + \omega_{br}^2 + \omega_{b\theta}^2$. Матрицы $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{K}(t)$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \exp[\Omega t] \\ &= e^{-\nu t} \begin{bmatrix} C_1 \omega_{b\varphi} \omega_{b\varphi} + \cos \omega_b t & C_1 \omega_{b\varphi} \omega_{br} - S_1 \omega_{b\theta} & C_1 \omega_{b\varphi} \omega_{b\theta} + S_1 \omega_{br} \\ C_1 \omega_{br} \omega_{b\varphi} + S_1 \omega_{b\theta} & C_1 \omega_{br} \omega_{br} + \cos \omega_b t & C_1 \omega_{br} \omega_{b\theta} - S_1 \omega_{b\varphi} \\ C_1 \omega_{b\theta} \omega_{b\varphi} - S_1 \omega_{br} & C_1 \omega_{b\theta} \omega_{br} + S_1 \omega_{b\varphi} & C_1 \omega_{b\theta} \omega_{b\theta} + \cos \omega_b t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) &= \Omega^{-1} (\exp[\Omega t] - \vec{I}) \\ &= \frac{e^{-\nu t}}{\omega_b^2 + \nu^2} \begin{bmatrix} C_2 \omega_{b\varphi} \omega_{b\varphi} + C_3 & C_2 \omega_{b\varphi} \omega_{br} - C_4 \omega_{b\theta} & C_2 \omega_{b\varphi} \omega_{b\theta} + C_4 \omega_{br} \\ C_2 \omega_{br} \omega_{b\varphi} + C_4 \omega_{b\theta} & C_2 \omega_{br} \omega_{br} + C_3 & C_2 \omega_{br} \omega_{b\theta} - C_4 \omega_{b\varphi} \\ C_2 \omega_{b\theta} \omega_{b\varphi} - C_4 \omega_{br} & C_2 \omega_{b\theta} \omega_{br} + C_4 \omega_{b\varphi} & C_2 \omega_{b\theta} \omega_{b\theta} + C_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

$$S_1 = \sin \omega_b t / \omega_b \quad (\text{A.96})$$

$$C_1 = (1 - \cos \omega_b t) / \omega_b^2 \quad (\text{A.97})$$

$$C_2 = (e^{\mathbf{v}t} - 1) / \mathbf{v} - \mathbf{v} C_1 - S_1 \quad (\text{A.98})$$

$$C_3 = \mathbf{v}(e^{\mathbf{v}t} - \cos \omega_b t) + \omega_b \sin \omega_b t \quad (\text{A.99})$$

$$C_4 = e^{\mathbf{v}t} - \cos \omega_b t - \mathbf{v} S_1 \quad (\text{A.100})$$

Таким образом, разностные уравнения для вычисления $\vec{J}$ явно выражаются через значения $\vec{J}$, вычисленные на предыдущем шаге по времени:

$$\begin{bmatrix} J_\phi|_{i,j,k}^{n+(1/2)} \\ J_r|_{i,j,k}^{n+(1/2)} \\ J_\theta|_{i,j,k}^{n+(1/2)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\Delta t) \begin{bmatrix} J_\phi|_{i,j,k}^{n-(1/2)} \\ J_r|_{i,j,k}^{n-(1/2)} \\ J_\theta|_{i,j,k}^{n-(1/2)} \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon_0}{2} \omega_p^2|_{i+(1/2),j+(1/2),k+(1/2)}^n \mathbf{K}(\Delta t) \cdot \begin{bmatrix} E_\phi|_{i+(1/2),j,k}^n + E_\phi|_{i-(1/2),j,k}^n \\ E_r|_{i,j+(1/2),k}^n + E_r|_{i,j-(1/2),k}^n \\ E_\theta|_{i,j,k+(1/2)}^n + E_\theta|_{i,j,k-(1/2)}^n \end{bmatrix}. \quad (\text{A.101})$$

Стоит отметить, что $\mathbf{v}$ и $\vec{\omega}_b$ так же могут быть функциями пространства и времени.

На очередном шаге по времени при решении уравнения для электрического поля плотность тока интерполируется в точках пространства, в которых расположены компоненты электрического поля. При этом выполняется только линейная интерполяция, что не занимает большого количества вычислительных ресурсов. Например, для расчета $E_r|_{i,j+(1/2),k}^{n+1}$ необходимо значение соответствующей компоненты плотности тока: $J_r|_{i,j+(1/2),k}^{n+(1/2)} = \frac{1}{2}(J_r|_{i,j+1,k}^{n+(1/2)} + J_r|_{i,j,k}^{n+(1/2)})$.

Явная схема Бунемана [207]

Уравнение для тока проводимости (A.73) записывается в виде уравнения для скорости частиц:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} - \vec{v} \times B_0, \quad (\text{A.102})$$

и решается в три шага. На первом шаге выполняется решение для первого слагаемого правой части (ускорение за счет воздействия электрического поля E

на заряженную частицу) на первой половине шага по времени. На втором шаге выполняется решение для второго слагаемого правой части (вращение частицы во внешнем магнитном поле B_0). На третьем шаге добавляется ускорение частицы в электрическом поле E на второй половине шага по времени. В работе [112] уравнения решаются в условиях бесстолкновительной плазмы, таким образом, в данном случае применяется экспоненциальный метод дискретизации по времени, описанный в работе [208]. Сначала, уравнение (A.102) без второго (вращательного) слагаемого в правой части домножается на $e^{\mathbf{v}t}$ и интегрируется на отрезке $(0; \Delta t/2)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t/2} e^{\mathbf{v}t} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Delta t + \int_0^{\Delta t/2} e^{\mathbf{v}t} \mathbf{v} \vec{v} \Delta t &= \int_0^{\Delta t/2} e^{\mathbf{v}t} \frac{q}{m} \vec{E} \Delta t, \\ \vec{v} e^{\mathbf{v}t} \Big|_0^{\Delta t/2} - \int_0^{\Delta t/2} e^{\mathbf{v}t} \mathbf{v} \vec{v} \Delta t + \int_0^{\Delta t/2} e^{\mathbf{v}t} \mathbf{v} \vec{v} \Delta t &= e^{\mathbf{v}t} \frac{q}{\mathbf{v}m} \vec{E} \Big|_0^{\Delta t/2}, \\ \vec{v}_1 e^{\mathbf{v}\Delta t/2} - \vec{v}_0 &= \frac{q}{\mathbf{v}m} \vec{E} (e^{\mathbf{v}\Delta t/2} - 1), \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

где $\vec{v}_0$ — скорость в момент времени t , а $\vec{v}_1$ — скорость в момент времени $t = \Delta t/2$. Выражая $\vec{v}_1$ получаем:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 e^{-\mathbf{v}\Delta t/2} + \frac{q}{m} \vec{E} \frac{1 - e^{\mathbf{v}\Delta t/2}}{\mathbf{v}}. \quad (\text{A.104})$$

Вращение в магнитном поле решается по методу, описанному в работе [112]:

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2 \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}'_0}{1 + B_0'^2} \times \vec{B}'_0, \quad (\text{A.105})$$

где $\vec{B}'_0 = q\vec{B}_0\Delta t/2m$. На второй половине расчетного шага выражение для ускорения частицы в электрическом поле оказывается аналогичным (A.104), таким образом:

$$\vec{v}_{final} = \vec{v}_3 e^{-\mathbf{v}\Delta t/2} + \frac{q}{m} \vec{E} \frac{1 - e^{\mathbf{v}\Delta t/2}}{\mathbf{v}}. \quad (\text{A.106})$$

Так как в данной схеме компоненты тока расположены в вершинах расчетной области, перед подстановкой тока в уравнение Максвелла (A.1) необходимо выполнить переинтерполяцию значений компонент тока проводимости J на грани расчетной области:

$$\begin{aligned} J_x|_{i+1/2,j,k}^n &= \frac{q}{2} (N|_{i,j,k}^n \vec{v}_{final,x}|_{i,j,k}^n + N|_{i+1,j,k}^n \vec{v}_{final,x}|_{i+1,j,k}^n), \\ J_y|_{i,j+1/2,k}^n &= \frac{q}{2} (N|_{i,j,k}^n \vec{v}_{final,y}|_{i,j,k}^n + N|_{i,j+1,k}^n \vec{v}_{final,y}|_{i,j+1,k}^n), \\ J_z|_{i,j,k+1/2}^n &= \frac{q}{2} (N|_{i,j,k}^n \vec{v}_{final,z}|_{i,j,k}^n + N|_{i,j,k+1}^n \vec{v}_{final,z}|_{i,j,k+1}^n). \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

Сравнение схем расчета токов проводимости

Явные схемы решения ДУ оказываются более простыми в реализации, однако угрожают условие устойчивости расчетной схемы:

$$\Delta t < \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} + \frac{\omega_p^2}{4c^2}}}. \quad (\text{A.108})$$

Уменьшение расчетного шага по времени за счет дополнительного слагаемого $\frac{\omega_p^2}{4c^2}$ (по сравнению с условием сходимости при расчете распространения электромагнитной волны в вакууме), зависит от максимального значения электронной концентрации плазмы. Это оказывается серьезным недостатком явных схем, так как, для расчета распространения КНЧ–СДВ–ДВ диапазона с учетом ионосферной плазмы уменьшение шага по времени может достигать 3–4 раза, по сравнению с расчетным шагом для вакуума.

В свою очередь критерий устойчивости для неявной схемы не зависит от параметров плазмы:

$$\Delta t < \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}, \quad (\text{A.109})$$

так как электрическое поле $\vec{E}$ и ток ионосферной проводимости $\vec{J}$ рассчитываются в одинаковые моменты времени. Это позволяет включать в расчет области с большой электронной концентрацией (на больших высотах), а также производить расчеты в сильно неоднородной плазме без уменьшения шага по времени. Недостатком такой схемы является увеличение расчетной нагрузки на каждом расчетном шаге, так, как при этом либо $\vec{J}$, либо $\vec{E}$ приходится рассчитывать дважды.

Решение ДУ в случае многокомпонентной плазмы

Как уже было отмечено, для N различных сортов заряженных частиц необходимо решать N дополнительных ДУ вида (А.73). При этом значение тока проводимости, используемое в уравнениях Максвелла представляет собой

сумму токов всех компонент: $\vec{J} = \sum_{k=1}^N \vec{J}_k$. Для всех явных методов, увеличение компонент среды не изменяет вида решения уравнений (А.3, А.73). Трудность решения в случае многокомпонентной среды представляют собой именно неявные методы решения, так как все уравнения для токов проводимости оказываются связанными и должны вычисляться совместно. Решение было предложено в работе [113], считая ток ионных компонент независимым от геомагнитного поля, что оказывается применимым на высотах нией 100 км.

Пусть $\vec{J}_k \perp \vec{B}_0$, что максимизирует значение их векторного произведения. Тогда второе и третье слагаемое выражения (А.73) равны, если частота столкновений ионов с нейтральными частицами оказывается:

$$\nu_{k0} = \frac{q_k}{m_k} B_0, \quad (\text{А.110})$$

С другой стороны пренебречь вторым слагаемым (А.73) можно при $\nu_k \gg \nu_{k0}$. Считая, что заряд иона $q_k = |e|$, масса m_k соответствует массе 20 нуклонов, при напряженности внешнего магнитного поля $B_0 = 5 \times 10^{-5}$ Тл, частота соударений ν_{k0} из (А.110) оказывается $\sim 250 \text{ с}^{-1}$. В работе [209] было показано, что частота соударений ионов с нейтрами лежит в пределах:

$$\nu_e/40 < \nu_k < n u_e/10. \quad (\text{А.111})$$

Из стандартного выражения, описывающего частоту соударений электронов с нейтрами в зависимости от высоты ($\nu_e(h) = 1,82 \times 10^{-11} e^{-0,15h}$) получаем, что на высоте 100 км ν_k оказывается минимальным и лежит в пределах $1400 \text{ с}^{-1} < \nu_k < 5600 \text{ с}^{-1}$. Отсюда получаем, что условие $\nu_k \gg \nu_{k0}$ выполняется уже на высоте 100 км, и особенно хорошо в области ниже 90 км, где располагается высота отражения КНЧ-СДВ-ДВ радиодиапазона. Таким образом, влиянием геомагнитного поля на ионный ток можно пренебречь, и выражение (А.73) для ионных компонент упрощается до:

$$\frac{d\vec{J}_k}{dt} + \nu_k \vec{J}_k = \varepsilon_0 \omega_p^2 \vec{E}. \quad (\text{А.112})$$

Рассмотрим решение с одним видом ионов. В таком случае уравнение для расчета электрического поля аналогично (А.73) принимает вид:

$$\vec{E}^{n+1} = \vec{E}^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \frac{\vec{J}_e^n + \vec{J}_e^{n+1} + \vec{J}_1^n + \vec{J}_1^{n+1}}{2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{H}^{n+1/2}, \quad (\text{А.113})$$

Дополнительные ДУ вида (А.73) решаются при помощи экспоненциального приближения. При этом ДУ для ионов принимает вид:

$$\vec{J}^{n+1} = a_1 \vec{J}^n + b_1 \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \frac{\vec{E}^n + \vec{E}^{n+1}}{2}, \quad (\text{А.114})$$

где a_1, b_1, ω_{p1} . Уравнение для тока электронов $\vec{J}_e$ остается вида (А.73).

Решать систему уравнений (А.113, А.73, А.114) можно двумя способами.

Первый способ подразумевает подстановку уравнений (А.73, А.114) в (А.113). Обозначим его схемой №1. Тогда выражение для расчета компонент электрического поля принимает вид:

$$\vec{E}^{n+1} = W_1 \vec{E}^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0} W_2 \vec{J}_e^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} W_3 \left[\frac{1+a_1}{2} \vec{J}_1^n - \vec{\nabla} \times \vec{H}^{n+1/2} \right], \quad (\text{А.115})$$

где матрицы W_1, W_2, W_3 выражаются в виде:

$$W_3 = [(1 + \theta_1)I + \theta_e M_2]^{-1}, \quad (\text{А.116})$$

$$W_2 = W_3[I + M_1], \quad (\text{А.117})$$

$$W_1 = W_2[(1 - \theta_1)I - \theta_e M_2], \quad (\text{А.118})$$

матрицы M_1, M_2 , а также параметр θ рассчитываются согласно разделу А.3. Таким образом, рассчитав компоненты электрического поля $\vec{E}$, используя выражение (А.115), далее компоненты тока $\vec{J}_e$ и $\vec{J}_1$ легко получить из (А.73 и А.114).

Второй вариант предполагает наоборот подстановку (А.113) в уравнения (А.73) и (А.114). Таким образом, рассчитав сначала компоненты тока $\vec{J}_e$ и $\vec{J}_1$, используя выражения:

$$\vec{J}_1^{n+1} = \frac{a_1 - \theta_1}{1 + \theta_1} \vec{J}_1^n - \frac{\theta_1}{1 + \theta_1} \left[\vec{J}_e^n + \vec{J}_e^{n+1} - \frac{4\varepsilon_0}{\Delta t} \vec{E}^n - 2\vec{\nabla} \times \vec{H}^{n+1/2} \right], \quad (\text{А.119})$$

$$\vec{J}_e^{n+1} = W_4 \vec{J}_e^n + W_5 \left[\frac{1+a_1}{2} \vec{J}_1^n + \frac{2\varepsilon_0}{\Delta t} \vec{E}^n + \nabla \times \vec{H}^{n+1/2} \right], \quad (\text{А.120})$$

где матрицы W_4 и W_5 вычисляются исходя из:

$$W_4 = \left[I + \frac{\theta_e}{1 + \theta_1} M_2 \right]^{-1} \left[M_1 - \frac{\theta_e}{1 + \theta_1} M_2 \right], \quad (\text{А.121})$$

$$W_5 = \left[I + \frac{\theta_e}{1 + \theta_1} M_2 \right]^{-1} 2 \frac{\theta_e}{1 + \theta_1} M_2. \quad (\text{А.122})$$

Используя полученные значения для токов пересчитываются компоненты электрического тока.

Далее рассмотрим случай наличия произвольного количества видов ионов N-1. Тогда первая схема может быть легко адаптирована заменой уравнения (A.86) на уравнение:

$$\vec{E}^{n+1} = \vec{E}^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0} \left[\vec{J}_e^n + \vec{J}_e^{n+1} + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\vec{J}_k^n + \vec{J}_k^{n+1} \right) \right] + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{H}^{n+1/2}, \quad (\text{A.123})$$

и набором N ДУ для ионов и электронов. Подставляя уравнения для электронов и ионов в (A.123), получаем окончательно выражение для компонент электрического поля:

$$\vec{E}^{n+1} = W_6 \vec{E}^n - \frac{\Delta t}{2\varepsilon_0} W_7 \vec{J}_e^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} W_8 \left[\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1+a_k}{2} \vec{J}_k^n - \vec{\nabla} \times \vec{H}^{n+1/2} \right], \quad (\text{A.124})$$

где

$$W_8 = \left[(1 + \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k) I + \theta_e M_2 \right]^{-1}, \quad (\text{A.125})$$

$$W_7 = W_8 [I + M_1], \quad (\text{A.126})$$

$$W_6 = W_8 \left[(1 + \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k) I - \theta_e M_2 \right]. \quad (\text{A.127})$$

Рассчитав значения компонент электрического поля, далее легко получить все значения для токов $\vec{J}_k$ и $\vec{J}_e$ решая уравнения вида (A.73, A.114).

Стоит отметить, что количество матриц, которые необходимо хранить в памяти (M_1 , M_2 , W_6 , W_7 , W_8) оказывается таким же, как и в случае решения без учета ионов. При увеличении числа ионных компонент дополнительное вычислительное время затрачивается только на решение соответствующего количества дополнительных ДУ вида (A.114), которые не содержат матриц.

Не смотря на то, что для схемы №2 необходимо хранить только две матрицы, для большого числа заряженных компонент N схема требует значительно большего количества вычислительного времени для решения уравнений вида (A.120) и соответственно оказывается неэффективной.

А.4 Дополнительные материалы

Рекурсивная свертка

Рекурсивный расчет временной свертки возможен в случае, когда один из операндов является экспоненциальной функцией. Рассмотрим соответственно интеграл свертки:

$$y(t) = \int_0^t a e^{-b(t-\tau)} x(\tau) d\tau, \quad (\text{A.128})$$

и дискретизируем его:

$$y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} a e^{-b(n\Delta t-\tau)} x(\tau) d\tau. \quad (\text{A.129})$$

Считая, что $x(t)$ является константой на каждом временном интервале, интегрирование по τ можно заменить суммированием

$$y(n\Delta t) = \frac{a}{b} \sum_{k=0}^{n-1} x(k\Delta t) e^{-b(n-k)\Delta t} (e^{b\Delta t} - 1). \quad (\text{A.130})$$

Исключая $n - 1$ член из суммы получаем:

$$y(n\Delta t) = \frac{a}{b} \sum_{k=0}^{n-2} x(k\Delta t) e^{-b(n-k)\Delta t} (e^{b\Delta t} - 1) + \frac{a}{b} x(n\Delta t) e^{-b\Delta t} (e^{b\Delta t} - 1), \quad (\text{A.131})$$

и перепишем сумму до $n - 2$ в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-2} x(k\Delta t) e^{-b(n-k)\Delta t} (e^{b\Delta t} - 1) &= \sum_{k=0}^{n-2} x(k\Delta t) e^{-b(n-k-1)\Delta t} e^{-b\Delta t} (e^{b\Delta t} - 1) \\ &= e^{-b\Delta t} \sum_{k=0}^{n-2} x(k\Delta t) e^{-b(n-k-1)\Delta t} (e^{b\Delta t} - 1) = e^{-b\Delta t} y((n-1)\Delta t). \end{aligned} \quad (\text{A.132})$$

Это является базой для уравнения рекурсивной свертки:

$$y(n\Delta t) = e^{-b\Delta t} y((n-1)\Delta t) + \frac{a}{b} x((n-1)\Delta t) (1 - e^{-b\Delta t}). \quad (\text{A.133})$$

В уравнении (А.133) предполагается, что функция $x(t)$ аппроксимируется $x(n\Delta t)$ на отрезке $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$. Если аппроксимировать $x(t)$ кусочно-линейной функцией, то

$$x(t) \simeq x(n\Delta t) + \frac{t}{\Delta t}(x((n+1)\Delta t) - x(n\Delta t)), \quad (\text{А.134})$$

таким образом

$$y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} a e^{-b(n\Delta t - \tau)} \left[x(n\Delta t) + \frac{\tau - k\Delta t}{\Delta t} (x((n+1)\Delta t) - x(n\Delta t)) \right] d\tau \quad (\text{А.135})$$

и рекурсивная формула принимает вид:

$$y(n\Delta t) = e^{-b\Delta t} y((n-1)\Delta t) + \frac{a}{b} \left\{ x(n\Delta t) \left[1 + \frac{1}{\Delta t b} (e^{-b\Delta t} - 1) \right] + x((n-1)\Delta t) \left[\frac{1}{\Delta t b} - e^{-b\Delta t} \left(1 + \frac{1}{\Delta t b} \right) \right] \right\}. \quad (\text{А.136})$$

Приближенный экспоненциальный метод решения жестких ДУ

Метод численного решения жестких ДУ вида:

$$\dot{u} = cu + \mathbf{F}(u, t), \quad (\text{А.137})$$

где c — константа можно реализовать следующим образом [210]. Уравнение (А.137) домножается на e^{ct} , и интегрируя по времени от $t = t_n$ до $t = t_{n+1} = t_n + h$ получаем выражение для численного решения:

$$u(t_{n+1}) = u(t_n)e^{ch} + e^{ch} \int_0^h e^{c\tau} \mathbf{F}(u(t_n + \tau), t_n + \tau) d\tau \quad (\text{А.138})$$

В самом простом случае при условии, что $\Delta F_n / F_n \ll 1$ за время h , уравнение А.138 можно записать в виде:

$$u_{n+1} = u_n e^{ch} + \frac{(e^{ch} - 1)}{c} \mathbf{F}(u_n, t_n). \quad (\text{А.139})$$