

## ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ ТРЁХМЕРНЫХ ТРЕЩИН В УПРУГОМ ТЕЛЕ

*А.В. Звягин.<sup>1,2</sup>, А.А. Лужин<sup>1</sup>, А.А. Шамина<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова

<sup>2</sup> ИМАШ РАН имени А.А. Благонравова

Исследуется проблема взаимного влияния диско-образных трещин, расположенных в различных плоскостях трёхмерного упругого тела. Трещины моделируются математическими разрезами сплошной среды с возможностью сильного разрыва поля перемещений на берегах разреза. Решение строится численно с использованием метода разрывных смещений. Метод протестирован сравнением полученных численных результатов с имеющимися аналитическими решениями. Исследовано взаимное влияние трещин разной пространственной ориентации, а также влияние на трещину близкой границы тела. Рассмотрены два типа границы свободная поверхность и граница с жёстким телом.

### Введение

Одной из актуальных проблем современной механики разрушения является задача исследования концентрации напряжений в окрестности трещин в трёхмерном пространстве. Об этом свидетельствует широкий круг современных прикладных задач, где основным элементом является или трещина, или концентратор напряжений в виде клиновидной границы. Проблематика приложений весьма обширна: это прочность материалов с внутренней структурой; трещины в «резина – подобных» материалах; трещины на границе раздела сред (например, керамика – металл); трещины в условиях механического и теплового воздействия; задачи гидравлического разрыва. Можно выделить две основные проблемы, важные для инженерной практики. Первая – определение полей перемещений и напряжений, которые позволяют оценить области возможных пластических деформаций в теле. Вторая задача – найти коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), которые в линейной механике разрушения определяют возможность роста трещин. Эти проблемы обсуждаются в разных аспектах практически во всех публикациях. Хотелось бы отметить, что до сих пор основной массив работ связан с решением плоских задач. Трёхмерные постановки занимают значительно меньшую часть работ. Это свидетельствует в пользу продолжения работ по созданию надёжных вычислительных методов решения трёхмерных задач механики трещин. В механике разрушения трещины моделируются двумерными двухсторонними поверхностями, на которых перемещения терпят разрыв. Граничные условия необходимо выполнить не только на границе тела, но и на поверхностях (берегах) трещин. Наличие нескольких трещин разной пространственной ориентации приводит к существенному усложнению геометрии границы. В течение нескольких последних десятилетий доминирующими численными методами были методы конечных элементов. Метод конечных элементов для областей со сложной геометрией зависит от генерации сеток, адаптированных к границе. Генерация сетки в ситуациях с трещинами является не менее трудоёмкой

задачей, чем решение самой граничной задачи, отнимает много времени и чревато подводными камнями. В последние два десятилетия активно развиваются методы, не требующие введения сетки во всём объёме тела. К таковым относятся методы граничных элементов и методы граничных интегральных уравнений. Преимуществом этих методов является возможность точного выполнения уравнений теории упругости. При этом граничные условия выполняются приближённо. Точность метода фактически определяется степенью выполнения условий на дискретном множестве точек границы. Используется много разновидностей методов, которые условно можно разбить на группы прямых и непрямых методов, методов потенциала и т.д. Каждый из них обладает своими преимуществами и недостатками. Наиболее часто используются прямые методы, в основе которых заложено использование фундаментального решения задачи Кельвина для упругого пространства (или аналогичных задач для полупространства). Большой обзор работ по трёхмерным задачам и использованию прямых методов граничных элементов представлен в монографиях [Кит, Хай, 1989], [Бреббия, Уокер, 1982], [Бенерджи, Баттерфилд, 1984]. В настоящее время существуют хорошо развитые эффективные непрямые методы граничных элементов для решения двумерных задач о трещинах. Одним из таких методов является метод разрывных смещений [Крауч, Старфилд, 1987]. В данной работе предлагается численный метод граничных элементов, реализующий метод разрывных смещений в трёхмерном пространстве. Основой является представление решения в виде ряда по некоторому набору линейно независимых аналитических решений уравнений теории упругости. Сам набор состоит из разрывных решений поля перемещений для плоского, прямоугольного граничного элемента, ориентированного в пространстве. Преимуществом данного метода является то, что на конечные элементы разбивается только поверхность трещин, моделирующая разрыв упругой среды. Это понижает размерности задачи на стадии её решения. Для каждого элемента используется три независимых аналитических решений, в каждом из которых на элементе терпит разрыв одна из трёх компонент вектора перемещений. Решение конкретной граничной задачи ищется в виде ряда с неопределёнными коэффициентами по всему множеству элементов. Каждое элементарное решение вносит свой вклад в поле перемещений и в поле напряжений с весом, который и является соответствующим неопределённым коэффициентом ряда. Выполнение конкретных граничных условий приводит к системе линейных уравнений. После численного определения коэффициентов разложения мы имеем фактически аналитическое представление решения в виде конечного ряда внутри области. С точки зрения памяти, нам надо хранить только найденные коэффициенты разложения, позволяющие затем найти любые требуемые характеристики в любой точке

области решения. Это существенно с точки зрения простоты практического использования полученного решения. Ещё одним важным преимуществом предлагаемого метода является возможность решения любых краевых задач (задача в напряжениях, задача в перемещениях, любая смешанная задача).

Коды программы реализованы авторами на языке C++. Написанная программа протестирована сравнением с известными аналитическими решениями [Уфлянд, 1967], [Гольдштейн, 1979], [Kassir, Sih. 1968]. Сравнение показало хорошее качественное и количественное соответствие имеющимся результатам других авторов. Проведено численное исследование задачи взаимного влияния диско-образных плоских трещин. Рассматривались круглые и эллиптические плоские трещины разной взаимной ориентации и расположения в пространстве [Акулич, Звягин, Шамина, 2018], [Звягин, Смирнов, Панфилов, Шамина, 2018]. В качестве меры взаимного влияния использовались величины коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Исследования показали, что в отличие от трещин плоской деформации, для трёхмерных трещин расстояние их существенного взаимного влияния, намного меньше. Этот факт говорит в пользу использования трёхмерной постановки задач механики прочности при наличии дефектов в виде трещин.

### Метод решения

Основой метода разложения решения по не ортогональным функциям является построение системы линейно независимых решений основной системы уравнений задачи. В статической теории упругости – это уравнения равновесия. Введём следующие обозначения:  $(x_1, x_2, x_3)$  – декартовы координаты в некоторой системе координат с базисом  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ;  $u_i(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(i = 1, 2, 3)$  – компоненты вектора перемещений;  $\lambda, \mu, E, \nu$  – упругие модули ( $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона);  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – матрицы компонент тензора деформаций и тензора напряжений; для упрощения записи воспользуемся следующим обозначением частной производной  $\partial f / \partial x_k = f_{,k}$ ; повторяющийся индекс в любом выражении будет означать операцию свёртки;  $\nabla$  – оператор градиента функции;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Известно, что в статической теории упругости каждая из компонент поля перемещений, при отсутствии массовых сил, является бигармонической функцией [Треффц, 1934], [Новацкий, 1975]. Рассмотрим для поля перемещений общего решения уравнений равновесия представление Треффца в следующей форме

$$u_i = \varphi_i + x_3 \psi_{,i}, \quad \nabla^2 \varphi_i = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Легко проверить, что каждая компонента перемещений (1) является бигармонической функцией  $\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0$ ,  $i=1,2,3$ . Данное поле перемещений будет удовлетворять уравнениям упругости, если функции связаны соотношением

$$\psi_{,3} = -\Lambda \varphi_{,k,k}, \text{ где } \Lambda = (\lambda + \mu)/(\lambda + 3\mu) = 1/(3-4\nu). \quad (2)$$

Рассмотрим три частных решения уравнений теории упругости

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \varphi^{(1)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_1}, & u_2^{(1)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_2}, & u_3^{(1)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_3}; \\ u_1^{(2)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_1}, & u_2^{(2)} &= \varphi^{(2)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_2}, & u_3^{(2)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_3}; \\ u_1^{(3)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_1}, & u_2^{(3)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_2}, & u_3^{(3)} &= \varphi^{(3)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подстановка перемещений (3) в условие (2) приводит к следующей связи введенных функций

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_3} = -\Lambda \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_3} = -\Lambda \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_3} = -\Lambda \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3}. \quad (4)$$

Рассмотрим в упругом пространстве граничный элемент в виде плоского прямоугольника  $S$ :  $x_3 = 0$ ,  $|x_1| \leq h_1$ ,  $|x_2| \leq h_2$ . Определим, каждую функцию  $\varphi^{(k)}$ , как потенциал двойного слоя с плотностью  $\mu^{(k)}$

$$\varphi^{(k)}(\mathbf{x}) = \iint_S \mu^{(k)} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \Big|_{\xi_3=0} dS_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (5)$$

Потенциал двойного слоя типа (5) обладает следующим свойством

$$\varphi = -\frac{\partial g}{\partial x_3}, \text{ где } g(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\mu(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \Big|_{\xi_3=0} dS_{\boldsymbol{\xi}} - \text{потенциал простого слоя.} \quad (6)$$

Свойство (6) и равенства (4) позволяют выразить функции  $\psi^{(k)}$  в конечной форме

$$\psi^{(1)} = \Lambda \frac{\partial g^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \psi^{(2)} = \Lambda \frac{\partial g^{(2)}}{\partial x_1}, \quad \psi^{(3)} = -\Lambda \varphi^{(3)}. \quad (7)$$

Введём величину  $\Lambda_1 = \lambda/(2\mu) = \nu/(1-2\nu)$ . Используя (7), закон Гука и выражения для деформаций  $\sigma_{ji} = \lambda \delta_{ji} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ji}$ ,  $\varepsilon_{ji} = (u_{j,i} + u_{i,j})/2$ , можно найти компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, соответствующие каждому решению (3). Для перемещений получим:

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= \varphi^{(1)} + \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1^2}, & u_2^{(1)} &= \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}, & u_3^{(1)} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1}; \\
u_1^{(2)} &= \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2}, & u_2^{(2)} &= \varphi^{(2)} + \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_2^2}, & u_3^{(2)} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2}; \\
u_1^{(3)} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_1}, & u_2^{(3)} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_2}, & u_3^{(3)} &= \varphi^{(3)} - \Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Аналогично получаются выражения для компонент напряжений

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{11}^{(1)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda)+1] \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1^3}; & \frac{\sigma_{22}^{(1)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2^2}; \\
\frac{\sigma_{33}^{(1)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda)-\Lambda] \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{12}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1^2 \partial x_2}; \\
\frac{\sigma_{13}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_3} + \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1^2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1^2}; & \frac{\sigma_{23}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}. \\
\frac{\sigma_{11}^{(2)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_1^2 \partial x_2}; & \frac{\sigma_{22}^{(2)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda)+1] \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_2^3}; \\
\frac{\sigma_{33}^{(2)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda)-\Lambda] \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_2 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{12}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2^2}; \\
\frac{\sigma_{13}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2}; & \frac{\sigma_{23}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_3} + \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_2^2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_2^2}. \\
\frac{\sigma_{11}^{(3)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1^2}; & \frac{\sigma_{22}^{(3)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_2^2}; \\
\frac{\sigma_{33}^{(3)}}{2\mu} &= (\Lambda_1+1)(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_3^2}; & \frac{\sigma_{12}^{(3)}}{2\mu} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_2}; \\
\frac{\sigma_{13}^{(3)}}{2\mu} &= \frac{1-\Lambda}{2} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_1} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{23}^{(3)}}{2\mu} &= \frac{1-\Lambda}{2} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_2 \partial x_3}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Построенные решения для перемещений стремятся к нулю на бесконечности и являются линейно независимыми. В некоторых случаях потенциалы простого и двойного слоя можно вычислить аналитически. Например, в случае постоянной единичной плотности они соответственно равны:

$$g(\mathbf{x}) = \left\{ \left[ g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) \right]_{\xi_1=-h_1}^{\xi_1=h_1} \right\}_{\xi_2=-h_2}^{\xi_2=h_2}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \left\{ \left[ \varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) \right]_{\xi_1=-h_1}^{\xi_1=h_1} \right\}_{\xi_2=-h_2}^{\xi_2=h_2} \tag{10}$$

В формулах (10) использовано символическое равенство  $f(\eta)|_{\eta=b}^{\eta=a} = f(b) - f(a)$ , а функции  $g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)$ ,  $\varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)$  соответственно представлены в аналитической форме

$$\varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) = -\frac{\partial g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)}{\partial x_3}, \text{ где}$$

$$g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) = (x_1 - \xi_1) \log(r + x_2 - \xi_2) + (x_2 - \xi_2) \log(r + x_1 - \xi_1) - z \arctg\left(\frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r x_3}\right),$$

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}.$$

Аналитическое представление базисных решений в методе граничных элементов позволяет значительно упростить процедуру решения, поскольку отпадает необходимость вычисления сингулярных интегралов в системе граничных интегральных уравнений. Построенные решения (8), (9) используются в локальной системе координат для каждого граничного элемента. Для построения численной схемы обозначим поля перемещений и напряжений, соответствующие каждому из построенных решений, следующим образом:

$$U_i^{m(k)}, \sigma_{ij}^{m(k)}, \quad (i, j = 1, 2, 3), (m = 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

В выражениях (11) верхний индекс  $k = 1, 2, 3$  означает номер решения, индекс  $m$  соответствует номеру граничного элемента. Каждое из решений имеет разрыв соответствующей компоненты вектора перемещения на данном граничном элементе.

Рассмотрим типичную задачу механики трещин для бесконечного пространства. В пространстве глобальной системы координат  $(X, Y, Z)$  с базисом  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  расположены несколько трещин, которые моделируются поверхностями разрыва перемещений (Рис.1).

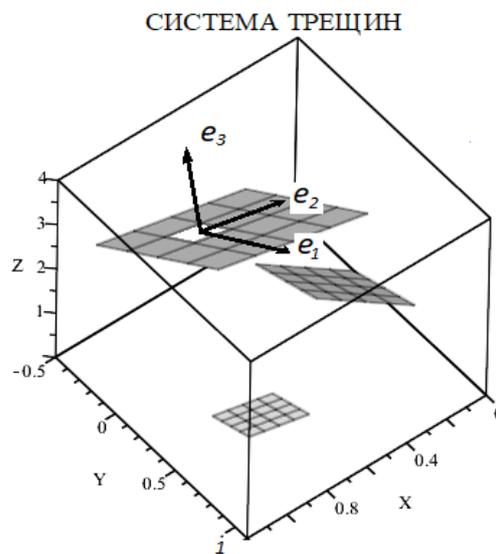


Рис.1 Система трещин в глобальной системе координат  $(X, Y, Z)$ . На поверхности одной из трещин выделен граничный элемент со своей локальной системой координат  $(x_1, x_2, x_3)$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

Будем, для определённости, ставить задачу в напряжениях. Для бесконечного пространства могут быть поставлены две типичные краевые задачи. В первой краевой задаче на бесконечности может быть задан ненулевой вектор напряжений  $\sigma_\infty$ , а на берегах трещин вектор напряжений равен нулю. Во второй краевой задаче вектор напряжений на бесконечности равен нулю, а на берегах трещин действует заданный вектор напряжений

$\mathbf{P}_0$ . В линейном случае первая задача может быть сведена ко второй использованием суперпозиции решений. Действительно, можно представить поле перемещений  $\mathbf{u}$  и тензор напряжений  $\sigma$  в виде суммы двух решений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\sigma = \sigma_\infty + \tilde{\sigma}$ , где  $\mathbf{u}_\infty, \sigma_\infty$  решение для пространства с заданными условиями на бесконечности при отсутствии трещин, а решение  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\sigma}$  стремится к нулю на бесконечности и удовлетворяет на границах трещин условию  $\tilde{\sigma} = -\sigma_0$ .

Поскольку построение первого решения достаточно тривиально, остановимся подробно на построении решения с нулевыми условиями на бесконечности и с заданным вектором напряжений на поверхности трещин.

Это означает, что на берегу трещины задан вектор напряжений, как функция точек поверхности. Пусть  $\mathbf{R}^{(m)} = (X_m, Y_m, Z_m)$  – радиус вектор центра граничного элемента с номером  $m$  в глобальной системе координат,  $(\mathbf{e}_1^m, \mathbf{e}_2^m, \mathbf{e}_3^m)$  – локальный базис данного элемента. Введём в рассмотрение ортогональные матрицы,  $F^{(m)}$ ,  $F^{(mn)}$  позволяющие выразить векторы в глобальном базисе и переходить из одного локального базиса в другой

$$\mathbf{e}^m = F^{(m)}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}^n = F^{(mn)}\mathbf{e}^m. \quad (12)$$

Для каждого граничного элемента с номером  $n$  в его локальном базисе  $\mathbf{e}_i^n$  можно считать заданными три компоненты вектора напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{e}_3^n$ :

$$\sigma_{31} = b_1^n, \sigma_{32} = b_2^n, \sigma_{33} = b_3^n. \quad (13)$$

Суммируя три решения (9) с неопределёнными коэффициентами  $D_1^m, D_2^m, D_3^m$  по всем элементам  $1 \leq m \leq N$  [Звягин, Смирнов, Панфилов, Шамина, 2018] и требуя выполнения граничных условий (13), мы приходим к системе линейных уравнений

$$\widehat{\mathbf{M}} \mathbf{D}^t = \mathbf{b}^t, \quad (14)$$

где верхний символ  $t$  означает операцию транспонирования, а соответствующие векторы взяты в форме  $\mathbf{D} = (D_1^1, \dots, D_1^N, D_2^1, \dots, D_2^N, D_3^1, \dots, D_3^N)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1^1, \dots, b_1^N, b_2^1, \dots, b_2^N, b_3^1, \dots, b_3^N)$ .

Матрица коэффициентов влияния имеет следующую структуру

$$\widehat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} A_{mn}^{(1)} & B_{mn}^{(1)} & C_{mn}^{(1)} \\ A_{mn}^{(2)} & B_{mn}^{(2)} & C_{mn}^{(2)} \\ A_{mn}^{(3)} & B_{mn}^{(3)} & C_{mn}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где  $A_{mm}^{(k)}, B_{mm}^{(k)}, C_{mm}^{(k)}$ , ( $k=1,2,3$ ) коэффициенты влияния упругого решения с номером  $k$  соответственно в первую, вторую и третью составляющую вектора напряжений. Таким образом, задача сводится к решению линейной системы уравнений (21).

### Результаты расчетов и тестирования

Изложенный метод был реализован в виде программы. Ниже приводятся численные результаты. В первую очередь, программа была оттестирована путём сравнения с известными аналитическими решениями. На Рис. 2 представлено сравнение аналитических результатов [Уфлянд, 1967] с численными решениями. Рис. 2(а) соответствует плоской трещине радиуса  $R=1$ , нагружаемой внутренним давлением  $p=0,1$ . Рис. 2(б) соответствует задаче для двух круглых плоских параллельных, одноосных трещин одинакового радиуса  $R=1$ , которые находятся под давлением  $p=0,1$  на расстоянии  $2h=0,6$  друг от друга.

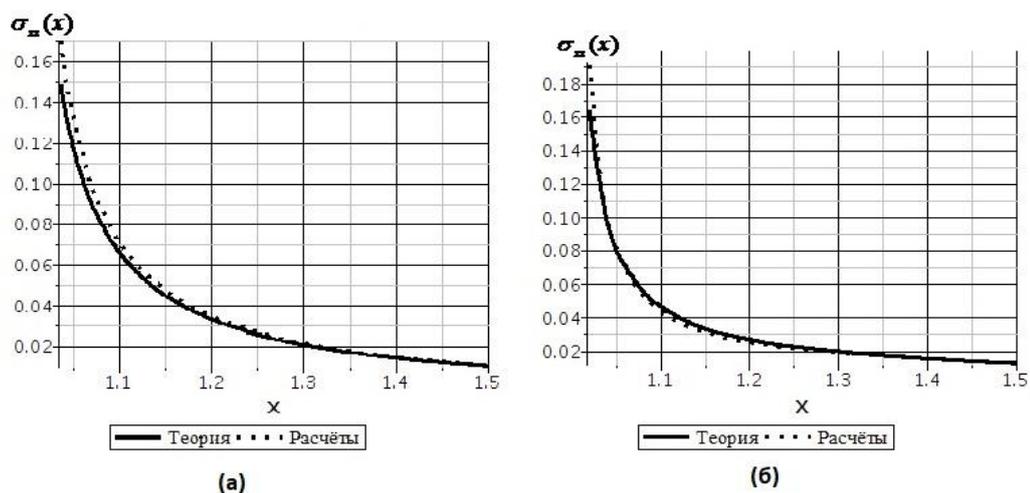


Рис.2. (а) – круглая плоская трещина радиуса  $R=1$  под внутренним давлением  $P=0,1$ . (б) – две круглые трещины радиуса  $R=1$  расположены параллельно плоскости  $z=0$  строго одна над другой на расстоянии  $2h=0,6$  между их плоскостями. Трещины находятся под внутренним давлением  $p=0,1$ . На оси абсцисс отложена координата  $x$  на продолжении трещины ( $x=1$  соответствует краю трещины), на оси ординат – величина напряжения  $\sigma_{zz}(x)$  на продолжении трещины.

Основной характеристикой линейной механики разрушения является коэффициент интенсивности напряжений (КИН)  $K_I = \lim_{r \rightarrow a} \sigma_{zz} \sqrt{2\pi(r-a)}$ , или инвариантный J-интеграл [Cherepanov, 1967], [Rice, 1968]. Эта задача решалась численно в трёхмерной постановке для разных радиусов трещины. Результаты сравнения таковы: для радиуса трещины 2 относительная погрешность численного решения составила 10,4%, для радиуса 2,5 – 9,8%.

Результаты сравнения с результатами [Мураками, 1990] для эллиптической трещины с разным отношением полуосей, под внутренним давлением приведены на Рис.3.

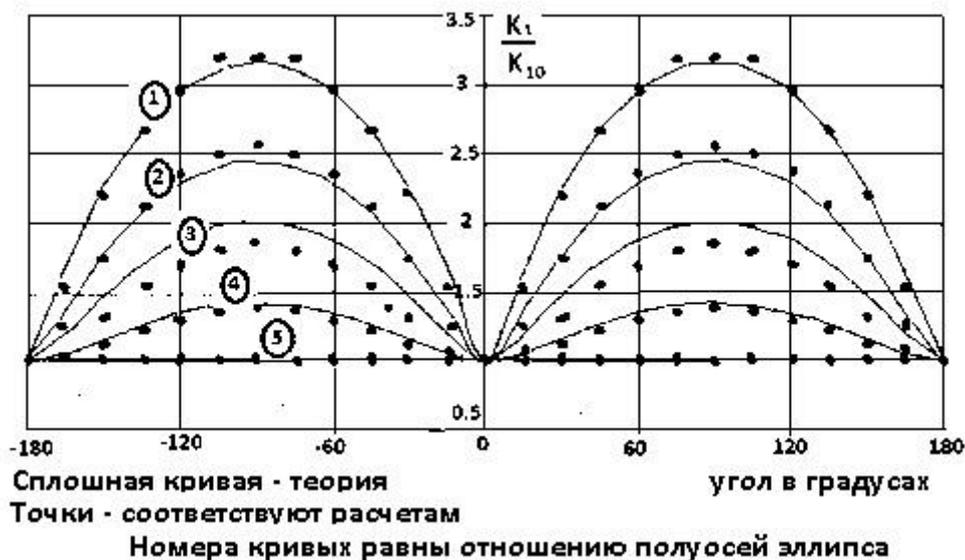


Рис.4. Распределение  $K_I/K_{I0}$  вдоль границы трещины нормального отрыва при различных соотношениях полуосей. По оси абсцисс отложена угловая координата соответствующей точки эллипса, по оси ординат – относительное значение коэффициента интенсивности напряжений при нормальном разрыве. Отношение большей полуоси к меньшей полуоси соответствует номеру расчета. Все трещины имеют одинаковую площадь  $\pi$ . Число г.э. 4669, модуль Юнга  $E = 2,5 \cdot 10^{10}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ . Величина  $K_{I0}$  – соответствует нулевому углу, отсчитываемому от большей полуоси.

Сравнение показывает достаточно хорошее качественное и количественное соответствие имеющимся результатам других авторов. Проведено численное исследование задачи взаимного влияния диско-образных плоских трещин. Рассматривались круглые и эллиптические плоские трещины разной взаимной ориентации и расположения в пространстве. В качестве меры взаимного влияния использовались величины коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Проведены расчеты напряжённо-деформированного состояния для трещин, находящихся около границы. В качестве границы рассматривалась свободная поверхность или абсолютно твёрдая граница с условиями прилипания. Рассмотрены открытые трещины в виде полукруга.

### Выводы

1. Исследования показали, что в отличие от трещин плоской деформации, для трёхмерных трещин расстояние их существенного взаимного влияния, намного меньше (фактически оно равно характерному размеру трещины). Этот факт говорит в пользу использования трёхмерной постановки задач механики прочности при наличии дефектов в виде трещин.
2. Наличие близкой свободной поверхности при нормальной нагрузке способствует росту трещины в направлении этой поверхности.

3. Наличие жёсткой границы приводит к остановке роста трещины в направлении границы.
4. Открытые трещины при любом направлении вектора внешней нагрузки показывают тенденцию к росту вдоль свободной поверхности, при этом на их внутренней границе такие трещины практически не раскрыты.

*Работы проводились при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-07-01111)*

### Литература

- Акулич А.В., Звягин А.В., Шамина А.А.* Численное моделирование взаимодействия диско-образных трещин в трехмерном упругом пространстве. В сборнике XVII Международная конференция "Супервычисления и математическое моделирование", место издания РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров. 2018, с. 29-41
- Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. – 494 с.
- Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. Пер. с англ. - М.: Мир, 1982. - 248с.
- Гольдштейн Р.В.* Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1979. - № 3. С. 111-126
- Звягин А.В., Смирнов Н.Н., Панфилов Д.И., Шамина А.А.* Метод граничных элементов для численного решения трехмерных задач механики трещин. В журнале Вестник кибернетики, издательство СурГУ (Сургут), том 30, № 2, 2018, с. 18-31
- Кит Г.С., Хай М.В.* Метод потенциалов в трёхмерных задачах термоупругости тел с трещинами. Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР. Издательство «Наукова думка» - Киев. 1989. 288 с.
- Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Изд-во МИР. 1987. 328 с.
- Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Издательство «МИР».1975. 872 с.
- Мураками Ю.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В двух томах. Т. 1: Пер. с англ. – М.: Изд. Мир, 1990. 448 с.
- Мураками Ю.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В двух томах. Т. 2: Пер. с англ.– М.: Изд. Мир, 1990. – 1016 с.
- Треффц Е.* Математическая теория упругости. – М.: Издательство ГТТЛ, 1934.
- Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Изд-во «Наука». 1967. 402 с.
- Cherepanov G. P.* Crack propagation in continuous media. // J. Appl. Math. Mech. 1967, 31, 503-512
- M.K. Kassir and G.C. Sih.* External crack in elastic solid. // The international Journal of Fracture Mechanics. Vol. 4, Nr. 4, 1968, p. 347-356
- Rice J.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. // J. Appl. Mech. 1968, 35, 379-386