Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)

На правах рукописи

ЮДИН ЕВГЕНИЙ ВИКТОРОВИЧ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ ДЛЯ АНАЛИЗА И ПЛАНИРОВАНИЯ РАЗРАБОТКИ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Специальность 25.00.10 Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор технических наук, профессор
Хасанов М.М.

Москва 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В связи со стремительным развитием нефтяной промышленности приобретает особую актуальность разработка методов моделирования движения жидкости в продуктивных пластах. Рассмотрим основные задачи, стоящие перед инженером-разработчиком нефтяных месторождений.

Математической моделью фильтрационной системы $\hat{M}$ будем называть совокупность системы уравнений в частных производных $\hat{L}$, описывающих распределение по времени насыщенности каждой из i фаз флюида, фильтрующегося в рассматриваемой области пористой среды $S_i\left(\vec{r},t\right)$, а также давления в данной фазе $p_i\left(\vec{r},t\right)$. Пористая среда определяется в общем случае многосвязной областью Ω и определенными на данной области совокупностью тензорных и скалярных полей: проницаемости $\hat{k}_\Omega\left(\vec{r}\right)$, пористости $\varphi\left(\vec{r}\right)$. Пористая среда и флюиды ее насыщающие характеризуются уравнениями: для вязкости $\mu_i\left(p_i\right)$, пористости $\varphi\left(\bar{p}\right)$, плотности $\rho_i\left(p_i\right)$, а также зависимости проницаемости от давления $k=k_0\cdot f\left(\bar{p}\right)$, где $\bar{p}=\sum_{i=1}^{N}S_i p_i$. Также задаются относительные фазовые проницаемости: $k_i\left(S_i\right)$. Для замыкания системы уравнений задаются начальные и граничные условия на *естественной* границе пласта:

$$\begin{array}{l} \hat{I}=\left\{p_0\left(\vec{r}\right),S_0\left(\vec{r}\right),\vec{r}\in\Omega\right\} \\ \hat{B}_\Omega=\left\{F\left[p_i,S_i,\nabla\bar{p},t\right]\right\},\vec{r}\in\Gamma_\Omega^j\ j=1,..,K \end{array}, \tag{1}$$

где F - неявная функция, заданная кусочно на границе Γ_Ω области фильтрации Ω, таким образом, что $F=F_j$, $\vec{r}\in\Gamma_\Omega^j$, где Γ_Ω^j - непересекающиеся части границы Γ_Ω, $\Gamma_\Omega=\bigcup_{i=1}^{K}\Gamma_\Omega^j$. Чаще всего в качестве граничных условий выступают условия постоянства давления, производной давления или их линейной связи.

Таким образом, под математической моделью будем понимать:

$$\hat{M}=\left\{\Omega,\hat{L}\left(\hat{R},\hat{C}\right)\left[p_i,S_i\right],k_i\left(S_i\right),\hat{B}_\Omega,\hat{I}\right\}, \tag{2}$$

где $\hat{R}=\left\{\hat{k}\left(\vec{r}\right),\varphi\left(\vec{r}\right)\right\}$ - совокупность свойств пласта, $\hat{C}=\left\{\mu_i\left(p_i\right),\rho_i\left(p_i\right),\varphi\left(\bar{p}\right),f\left(\bar{p}\right)\right\}$ - совокупность уравнений состояния, $k_i\left(S_i\right)$ - функции относительных фазовых проницаемостей.

Обратим внимание, что в постановке (2) в фильтрационной системе не заданы граничные условия, связанные со скважинами. Определение оптимальной расстановки скважин также является отдельной задачей. Таким образом, вследствие того, что время формирования пласта велико и все процессы в незатронутой разработкой залежи можно считать стационарными, граничные $\hat{B}_\Omega$ и начальные $\hat{I}$ условия должны быть необходимым образом согласованы.

Поставим наиболее важные задачи разработки месторождения.

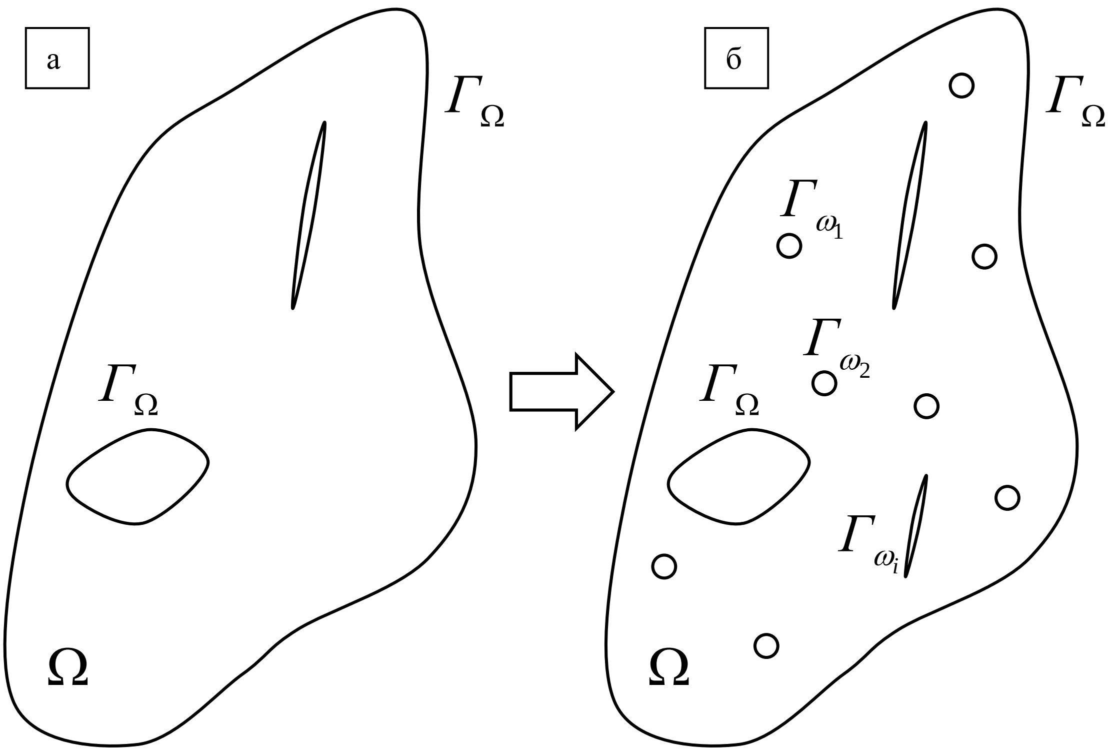


рис. 1. Область фильтрации со скважинами(а) и без скважин (б)

Задача 1.а (Определение оптимальных параметров разработки месторождения): Пусть задана математическая модель фильтрационной системы $\hat{M}$ (см. рис. 1.а). Таким образом задана область фильтрации, распределение пластовых свойств и уравнения, описывающие фильтрацию в пределах рассматриваемой области. Необходимо, определить оптимальную расстановку скважин и тип их заканчивания. То есть необходимо определить такие дополнительные границы $\Gamma_\omega = \left\{\Gamma_\omega^i\right\}$ (см. рис. 1.б) и граничные условия на данных границах $\hat{B}_\omega = \left\{\hat{B}_\omega^i\right\}, i = 1,..,N$, где N - число скважин, чтобы выполнялся экстремум (без ограничения общности будем считать максимум) некоторой целевой функции с учетом заданных ограничений на дополнительные параметры задачи:

$$\hat{B}_\omega, \Gamma_\omega : \Theta_\varepsilon\left[\hat{M}, \Gamma_\omega, \hat{B}_\omega, \vec{\varepsilon}, \vec{T}\right] \longrightarrow \max, \tag{3}$$

где $\vec{\varepsilon}$ - вектор дополнительных параметров, $\vec{T}$ - вектор, имеющий размерность N и отражающий профиль ввода скважин в эксплуатацию.

В качестве целевой функции используют накопленную добычу за определенное время или до достижения определенного уровня обводненности, дисконтированный поток наличности (NPV), коэффициент извлечения нефти (КИН) и т.д., также может быть использована комбинация озвученных параметров.

Вектор дополнительных параметров $\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_S\right)^T$ отражает совокупность величин, характеризующих данный вид целевой функции: КИН на предельное значение обводненности, горизонт расчета накопленной добычи, ставку дисконтирования, объем капитальных вложений для рассматриваемого варианта разработки и т.д.

Профиль ввода $\vec{T} = \left(0, T_2, ..T_N\right)^T$ отражает относительную последовательность ввода скважин на данном рассматриваемом участке, так сначала вводится первая скважина, затем через промежуток T_2 вторая скважина и т.д. Часто при решении задачи выбора оптимальной системы разработки принимается, что вектор $\vec{T}$ является нулевым, то есть, что все скважины запускаются одновременно.

В число ограничений при поиске оптимальных $\hat{B}_\omega$ может входить ограничение на число скважин $N \le N_{\max}$, ограничение на параметры заканчивания скважин, то есть на геометрические размеры Γ^i_ω (максимальная длина трещины ГРП, максимальная длина горизонтального ствола т.д.). При этом граничные условия на скважинах Γ^i_ω обычно принимаются стационарными и отражают геологический потенциал производительности скважин (обычно задаются условия постоянного минимально возможного забойного давления или максимального дебита добывающих скважин и максимальные давления или приемистости нагнетания).

Задача 1.б (Определение оптимального режима разработки месторождения): Пусть задана математическая модель фильтрационной системы $\hat{M}$ и дополнительные границы на скважинах Γ_ω (см. рис. 1.б). Необходимо найти такие граничные условия $\hat{B}_\omega$, чтобы выполнялся максимум целевой функции с учетом некоторых ограничений:

$$\hat{B}_\omega : \Theta_\varepsilon\left[\hat{M}, \Gamma_\omega, \hat{B}_\omega, \vec{\varepsilon}, \vec{T}\right] \longrightarrow \max . \qquad (4)$$

Заметим, что специфика задачи 1.б в отличие от задачи 1.а заключается в том, что скважины уже присутствуют в системе и необходимо определить оптимальный режим их эксплуатации. Ключевую роль в постановке данной задачи начинают играть ограничения на граничные условия на скважинах. К их числу относятся минимально возможные забойные давления, максимально возможные дебиты добывающих скважин, что связано с геологическим потенциалом скважин или максимальной пропускной способностью поверхностного обустройства. Также ограничения могут касаться нагнетательных скважин, что связано с максимально возможным давлением в линии нагнетания и ограничениями мощности кустовых насосных станций (КНС). В условиях северных регионов существуют ограничения на минимальные дебиты и приемистости в зимнее время в связи с опасностью заморозки коллекторов.

Задача 1 – это задача поиска оптимальных параметров разработки. Также одной из самых актуальных задач на производстве нефтегазодобывающих компаний имеет задача планирования добычи.

Задача 2.а (Задача планирования добычи): Пусть задана математическая модель фильтрационной системы $\hat{M}$. Также пусть заданы скважины (границы скважин) Γ_{ω}, условия на данных границах $\hat{B}_{\omega}$ и профиль ввода $\vec{T}$. Необходимо найти профиль добычи нефти и жидкости на определенный период времени.

В данной задаче на скважинах обычно также задаются стационарные граничные условия. При постановке имеют место быть ограничения, связанные с мощностями поверхностной инфраструктуры и т.д.

Трудности, с которыми сталкиваются разработчики нефтяных и газовых месторождений, заключаются в высокой неопределенности параметров фильтрационной системы $\hat{M}$. Это связано с тем, что параметры фильтрационной системы можно оценить в скважинах с помощью косвенных методов – геофизических методов исследований скважин (ГИС). При этом, помимо погрешности самих ГИС, сохраняется высокая неопределенность в межскважинном пространстве, размеры которого на три порядка выше характерного размера скважины. В связи с этим высокую актуальность приобретают алгоритмы идентификации параметров фильтрационной системы с использованием дополнительной информации. В качестве дополнительной информации используются данные «наблюдения» за системой – данные нормальной эксплуатации скважин, обычно это данные о динамике забойных давлений, дебитов, обводненностей, а также газового фактора на скважинах.

Таким образом, опишем еще две основные задачи, которые возникают в процессе разработки нефтяных и газовых месторождения.

Задача 2.б (Задача планирования добычи с учетом геологической неопределенности): Пусть задана математическая модель фильтрационной системы $\hat{M}$. При этом параметры фильтрационной системы не являются строго детерминированными и известны лишь их оценки сверху и снизу. Также пусть заданы скважины (границы скважин) Γ_{ω}, условия на данных границах $\hat{B}_{\omega}$ и профиль ввода $\vec{T}$. Необходимо оценить вероятность достижения планируемой добычи, а также меру неопределенности при планировании.

Задача 3 (Задача идентификации параметров фильтрационной системы): Пусть математическую модель фильтрационной системы $\hat{M}$ характеризует набор параметров $\vec{X} = \left(X_1, X_2, .., X_n\right)^T$ (фильтрационно-емкостные свойства, PVT-свойства, параметры относительных фазовых проницаемостей (ОФП), параметры трещин ГРП и авто-ГРП и т.д). Пусть из данных нормальной эксплуатации и другой дополнительной информации нам известен вектор параметров $\vec{\beta} = \left(\beta_1, \beta_2, .., \beta_m\right)^T$, который отражает характер фильтрации в рассматриваемой системе (динамика дебита, динамического уровня/забойного давления, обводненности, газового фактора и т.д.). Обозначим через $\vec{\beta}_{calc}\left(\vec{X}\right)=\left(\beta_1\left(\vec{X}\right),\beta_2\left(\vec{X}\right),..,\beta_m\left(\vec{X}\right)\right)^T$ - тот же вектор, полученный расчетным путем при решении уравнений математической модели $\hat{M}$. Необходимо подобрать такие параметры $\vec{X}=\left(X_1,X_2,..,X_n\right)^T$, чтобы выполнялся минимум целевой функции, характеризующей отклонение фактического вектора $\vec{\beta}$ от расчетного $\vec{\beta}_{calc}\left(\vec{X}\right)$:

$$E\left(\vec{X}\right)=\left\|\vec{\beta}_{calc}\left(\vec{X}\right)-\vec{\beta}\right\|\to\min. \qquad (5)$$

Рассмотрим взаимосвязь описанных задач. На рис. 2. схематически изображена взаимосвязь описанных выше задач разработки. Видно, что задачи имеют независимую область, но при этом есть и области взаимных пересечений. Сами по себе задачи имеют низкую практическую ценность, поэтому рассмотрим области пересечений поставленных задач.

Пересечение задач 2 и 3 – корректно поставленная задача планирования добычи с учетом оценки параметров фильтрационной системы. Однако в данном случае имеем планирование какого-то одного заранее выбранного варианта разработки, необязательно оптимального, так как задача 1 не решалась. Пересечение задач 1 и 3 может привести к неустойчивому результату, так как не определено влияние геологической неопределенности (в задаче 2а) на результат выбора оптимальных параметров разработки. Пересечение задач 1 и 2 заранее практически некорректно, так как при этом нет оценки параметров данной фильтрационной системы. Таким образом, видно, что только совместное решение всех трех задач может дать корректный результат при разработке месторождения. Поэтому для рациональной эксплуатации нефтяных месторождений необходимо согласованное развитие методов мониторинга, анализа и планирования в условиях высокой неопределенности.

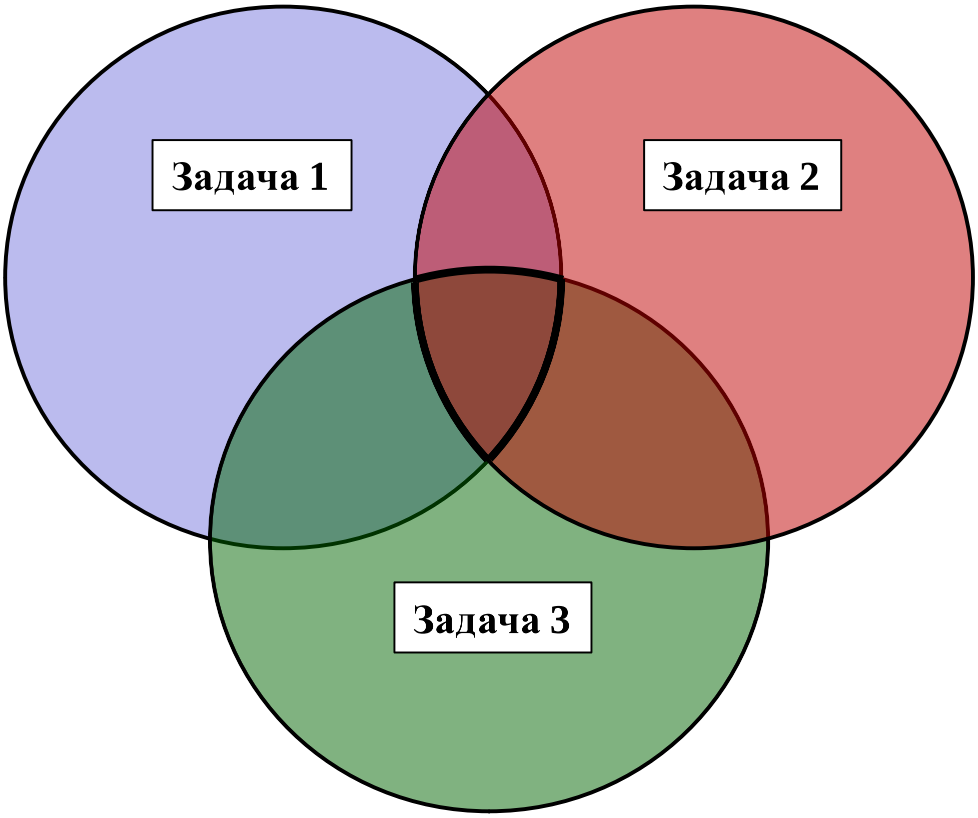


рис. 2. Взаимосвязь основных задач разработки

На сегодняшний момент принятым подходом считается в качестве модели фильтрационной системы использовать сеточные гидродинамические модели. Рассмотрим рабочий процесс при решении задач разработки, который принят сейчас в большинстве нефтегазодобывающих предприятий и проектных институтов (рис. 3). На первом этапе имеются данные по интерпретации сейсмических исследований и ГИС. Также используется информация по исследованию керна и физико-химическим исследованиям пластовых флюидов. Далее создается полномасштабная 3D геологическая сеточная модель залежи, из которой определяются запасы месторождения. Затем следует создание гидродинамической модели путем укрупнения ячеек геологической модели. С помощью полученной таким образом гидродинамической модели решают основные задачи разработки, озвученные выше. Слабым звеном в таком подходе является переход от геологической к гидродинамической модели и ее использование в качестве основного инструмента при разработке месторождения по следующим причинам:

1. Низкое качество доступной информации: данные нормальной эксплуатации зашумлены и обладают высокой погрешностью;
2. Высокая геологическая неопределенность и недостаток исходной информации: в большинстве случаев информации, необходимой для корректного построения гидродинамической модели, недостаточно, это особенно проявляется при принятии решений о разработке новых залежей или новых участков уже разрабатываемых месторо-

ждений, в связи с этим при построении модели используется субъективное мнение инженера-разработчика;

3. Неединственность и неустойчивость при решении параметрической обратной задачи адаптации модели под данные нормальной эксплуатации: как известно [46, 65] обратная задача поставлена некорректно и ее решение неединственно и неустойчиво, дополнительные трудности возникают из-за того, что вектор неизвестных параметров фильтрационной системы обладает высокой размерностью;
4. Увеличение объема вычислений при решении параметрической обратной задачи адаптации модели под данные нормальной эксплуатации: решение обратной задачи сводится к ряду решений прямых задач, таким образом в разы увеличивая время расчета, которое может занять несколько суток даже на современных ЭВМ;
5. Неконтролируемая потеря точности при укрупнении ячеек геологической модели;

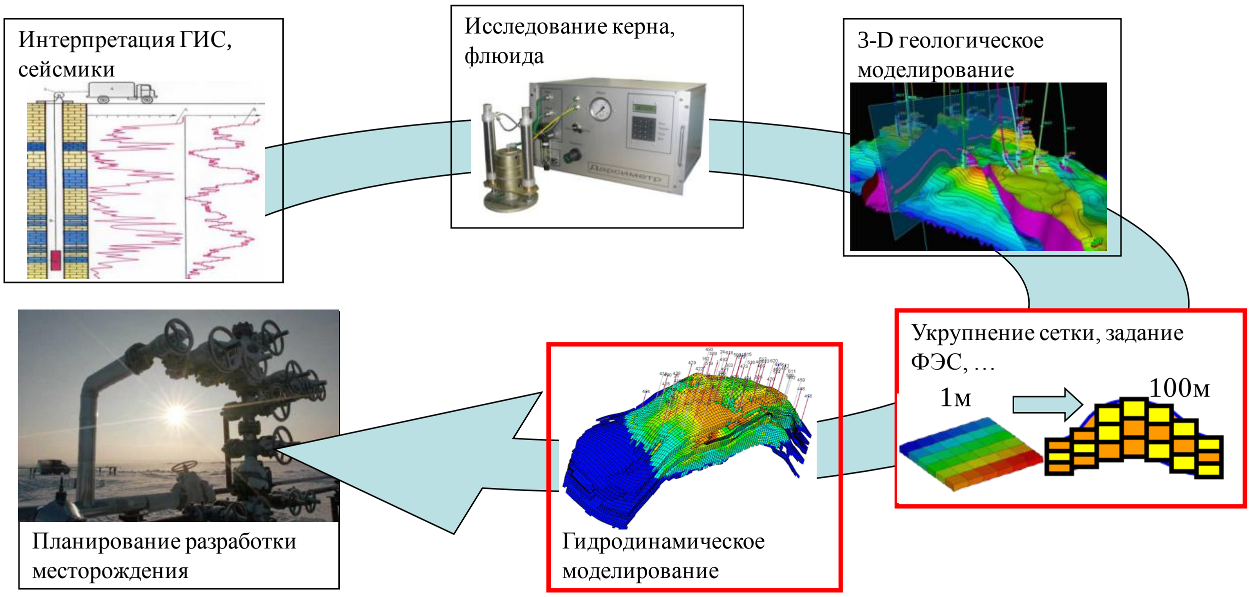


рис. 3. Современная схема принятия решений при разработки месторождения

Во многих практически важных случаях применение полномасштабных 3D гидродинамических моделей является неоправданным в связи с несоответствием уровня сложности используемой модели уровню исходной информации. Поэтому, высокую актуальность приобретает разработка новых численно-аналитических методов и алгоритмов для анализа, мониторинга и планирования эксплуатации месторождений, способных с одной стороны снять часть ограничений при использовании полномасштабных 3D гидродинамических моделей. Этого можно добиться путем сужения области неопределенности при адаптации с помощью использования численно-аналитических моделей меньших размерностей. С другой стороны развитие данных алгоритмов и моделей с акцентом на принятие решений при разработке месторождений имеет самостоятельную ценность при низком уровне исходной информации.

Недостаток информации о строении и свойствах залежи ограничивает принятие своевременных решений по оптимизации параметров разработки. При этом современные методы исследования продуктивных пластов не позволяют решить данную проблему. Геофизические исследования обладают низкой глубинностью ($\sim 10^{-1}$ м) и дают возможность определить фильтрационные характеристики пласта с помощью косвенных методов, имеющих высокую погрешность. Результаты сейсмических исследований могут быть использованы лишь для определения общей тенденции развития продуктивных интервалов. Гидродинамические исследования скважин (ГДИС) позволяют определить интегральные фильтрационные характеристики пластов, однако на практике охват фонда скважин исследованиями мал и во многих случаях данные исследования признаются неуспешными. Таким образом, необходима разработка новых алгоритмов определения параметров неоднородной пористой среды с использованием данных нормальной эксплуатации скважин.

Разработка новых залежей или новых участков уже эксплуатируемых месторождений сопряжена с высокими рисками достижения запланированных показателей вследствие низкой изученности. Использование данных об эксплуатации участков-аналогов не позволяет количественно оценить эти риски. Применение трехмерных сеточных гидродинамических моделей также невозможно вследствие отсутствия необходимой информации для ее инициализации. В связи с этим высокую актуальность приобретает развитие алгоритмов планирования разработки месторождений в условиях высокой геологической неопределенности.

Целью работы является разработка эффективных численно-аналитических методов и алгоритмов для анализа, мониторинга и планирования эксплуатации нефтяных месторождений в условиях высокой неоднородности и геологической неопределенности.

В рамках поставленной цели решались следующие задачи.

1. Разработка аналитических и численно-аналитических моделей фильтрации жидкости в неоднородной пористой среде для анализа и мониторинга эксплуатации нефтяных месторождений.
2. Разработка алгоритмов определения параметров неоднородной пористой среды из данных нормальной эксплуатации скважин.
3. Разработка подходов и методов планирования эксплуатации нефтяных месторождений в условиях высокой геологической неопределенности.
4. Тестирование разработанных алгоритмов, их реализация в виде прикладных программ и внедрение в производственный процесс.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Аналитические решения, описывающие фильтрацию жидкости в неоднородной многопластовой системе на различных временах расчета и режимах работы скважин.
2. Метод регуляризации решения задачи идентификации параметров неоднородного расчлененного коллектора – эффективной проницаемости и гидродинамической связности – по данным нормальной эксплуатации скважин.
3. Метод определения эффективности системы поддержания пластового давления в неоднородном расчлененном пласте.
4. Подход к планированию параметров разработки месторождений в условиях высокой геологической неопределенности.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработаны аналитические решения, описывающие фильтрацию жидкости в неоднородной многопластовой системе на различных временных интервалах и режимах работы скважин с учетом их произвольного расположения в продуктивном пласте. На основе построенных моделей получены выражения для расчета эффективности геолого-технических мероприятий с учетом влияния окружающих скважин.
2. Разработан метод определения эффективных параметров неоднородного расчлененного коллектора за счет совместного использования данных работы скважин на различных режимах, а также анализа структуры решения сопряженной задачи установившейся фильтрации. Его отличие от существующих подходов заключается в возможности определения эффективной проницаемости и гидродинамической связности продуктивного пласта без остановки скважины для проведения исследования.
3. Разработан подход к анализу и планированию эффективности системы заводнения, основанный на построенной численно-аналитической модели производительности скважин в регулярных системах разработки. Получены зависимости оптимальных параметров эксплуатации нагнетательных скважин от свойств пласта для различных технико-экономических показателей эксплуатации месторождения.
4. Разработан подход к планированию параметров разработки месторождения в условиях геологической неопределенности в свойствах продуктивных пластов. Ключевой особенностью предлагаемого метода является возможность оперативного расчета вероятности достижения запланированных технологических показателей для различных сценариев и методов разработки месторождений на основе построенных моделей фильтрации жидкости в неоднородной пористой среде.

Практическая ценность Разработанные алгоритмы и методы внедрены и широко используется для решения задач анализа и планирования разработки месторождений в ОАО «НК «Роснефть».

Методы планирования производительности скважин многоскважинной многопластовой системы используются для анализа работы скважин в неоднородных многопластовых коллекторах, прогноза и анализа эффекта от проведения геолого-технических мероприятий (ГТМ): приобщение нового пласта, глушение многопластовой скважины, интенсификация добычи нефти, проведение повторного ГРП.

Алгоритм по идентификации параметров неоднородного расчлененного пласта внедрен в корпоративный программный комплекс и используется для построения карт фильтрационных свойств коллектора и расчета темпов падения жидкости и нефти, при планировании добычи новых участков месторождения.

Метод определения эффективности системы ППД используется для расчета прироста/потерь в добыче при изменении стратегии заводнения, запаздывающих переводах скважин. Разработанный алгоритм применяется для оценки оптимального времени отработки нагнетательной скважины на нефть.

Метод планирования добычи в условиях высокой геологической неопределенности используется при принятии решения о разработке малых залежей, а также при выборе способа их разработки. Подход также применяется при планировании добычи и параметров экономической эффективности на новых участках уже разрабатываемых месторождений, отличающихся своими фильтрационно-емкостными свойствами и условиями осадконакопления от основной части залежи.

Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих **конференциях и семинарах**:

- XIII научно-практической конференции «Пути реализации нефтегазового и рудного потенциала Ханты-Мансийского автономного округа – Югры», Ханты-Мансийск , 15-19 ноября 2009 г;
- III научно-практической конференции «Математическое моделирование и компьютерные технологии в разработке месторождений», Уфа, 13-15 апреля 2010 г;
- Российской технической нефтегазовой конференции и выставке SPE по разведке и добыче «ROGC-2010», Москва, 26-28 октября 2010 г;
- IV научно-практической конференции «Математическое моделирование и компьютерные технологии в процессах разработки месторождений, добычи и переработки нефти», Уфа, 26-28 апреля 2011 г;

– Геофизическом семинаре Института динамики геосфер, РАН №3/12 «Численно-аналитические методы идентификации параметров неоднородной пористой среды при фильтрации», Москва, 7 февраля 2012г.
– V научно-практической конференции «Математическое моделирование и компьютерные технологии в процессах разработки месторождений», Уфа, 17-19 апреля 2012 г.
– Российской технической нефтегазовой конференции и выставке SPE по разведке и добыче «ROGC-2012», Москва, 16-18 октября 2012 г.
– Научно технических совещаниях ОАО «НК «Роснефть» 2009-2012 гг.
– Семинарах и научно-технических конференциях молодых специалистов ОАО «НК «Роснефть» 2008-2012 гг.

По теме диссертации **опубликовано** 12 работ.

1. Моделирование фильтрации в пористой среде

В данной главе проводится анализ методов моделирования фильтрации в пористой среде. Первый параграф посвящен обзору моделей фильтрации в пористой среде. Рассмотрены основные принципы при построении моделей фильтрации флюида в пористой среде. Рассматриваются явления вытеснения при двухфазной фильтрации, а также явления массо- и теплопереноса в пористой среде, фильтрация неактивных и активных примесей, фильтрационно-конвективная диффузия. Во втором параграфе рассматривается постановка основных задач фильтрации, типовые граничные и начальные условия. В третьем параграфе рассматриваются вопросы разделения уравнений для насыщенности и для давления в системе, а также вопросы осреднения уравнения давления по вертикальной координате.

1.1. Обзор моделей фильтрации в пористой среде

В данном разделе рассмотрены основные уравнения, использующиеся при моделировании фильтрации в пористых средах. В первой части рассмотрены различные формы законов фильтрации. Рассмотрен вывод основного уравнения однофазной изотермической фильтрации на упругом режиме – уравнения пьезопроводности. Также получены уравнения стационарной однофазной фильтрации. Во второй части рассматривается постановка задачи многофазной фильтрации на примере совместной фильтрации двух фаз. Обсуждается как общая модель многофазной фильтрации, так и ее упрощения – модель поршневого вытеснения и модель Баклея-Леверетта. Также обсуждаются вопросы фильтрации в анизотропном случае.

1.1.1. Однофазная фильтрация

Основные уравнения. Закон Дарси

Рассмотрим уравнения, использующиеся при описании фильтрации жидкости через пористые среды. В соответствии с подходом механики сплошных сред, движение жидкости должно удовлетворять основным уравнениям: уравнению неразрывности, уравнению для импульсов и уравнению для энергии, а также уравнениям состояния, характеризующим конкретную задачу. Рассмотрим уравнение неразрывности для жидкости в пористой среде [30], [70]:

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) = w, \tag{1.1}$$

где ρ - плотность жидкости, ϕ - пористость, $\vec{u}$ - скорость фильтрации, w - распределенный источник массы.

Уравнение для энергии выведено в п. 1.1.3. Здесь и далее будем рассматривать изотермическое приближение. В большинстве случаев в изотермическом приближении при решении задач фильтрации уравнение для энергии не требуется (исключение составляют, например, задачи, в которых необходимо учитывать явления разрушения [50], [51], [61]). Остановимся подробнее на уравнении для импульса.

Как известно [10], [31], [37], [60] движение вязкой жидкости описывается уравнением Навье-Стокса, поэтому для описания движения вязкой жидкости в пористой среде достаточно проинтегрировать данное уравнение в области движения. Однако, вследствие резкой неоднородности порового пространства, отсутствии информации о конкретном строении поровых каналов и т.д., данная задача практически невыполнима, и ее решение возможно для ограниченного набора идеальных периодических структур, являющихся приближением реального строения определенного типа пористого пласта, может служить лишь для качественного описания [74] и не имеет пользы для практических расчетов. Поэтому для того, чтобы записать уравнение для импульсов предполагают в общем случае следующую зависимость скорости фильтрации: $\vec{u} = f\left(\nabla p, k, \mu, \phi\right)$, где p - гидродинамическое давление, k - проницаемость пористой среды, μ - динамическая вязкость. Конкретный вид функции f зависит от рассматриваемой задачи. Наиболее простая и широко используемая модель – это модель линейного закона Дарси [112]. Данная модель теоретически и практически хорошо изучена и предполагает линейную связь между градиентом давления и скоростью фильтрации:

$$\vec{v}\phi = \vec{u} = -\frac{k}{\mu}\nabla p, \tag{1.2}$$

где $\vec{v}$ - средняя истинная скорость жидкости.

Необходимо также отметить и другие эмпирические зависимости скорости фильтрации от градиента давления. В общем случае нелинейный закон фильтрации можно записать в виде [70]:

$$\nabla p = -f\left(|\vec{u}|\right)\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \tag{1.3}$$

или

$$\vec{u} = -\frac{\nabla p}{|\nabla p|} f^{-1}\left(|\nabla p|\right), \tag{1.4}$$

где f^{-1} - функция обратная к f.

Закон фильтрации иногда задается в степенном виде [70]:

$$\vec{u} = -\frac{\nabla p}{|\nabla p|} C |\nabla p|^n \tag{1.5}$$

где C - константа, определяемая из опыта, и n - показатель режима фильтрации [70].

Также распространен двучленный закон фильтрации:

$$-\nabla p = \frac{\mu}{k}\vec{u} + C\rho\vec{u}|\vec{u}|, \tag{1.6}$$

C - экспериментальная константа.

В случае фильтрации с начальным градиентом сдвига закон Дарси принимает следующий вид [7], [8], [22]:

$$\vec{u} = \begin{cases} \dfrac{k}{\mu}\left(\nabla p - G\dfrac{\nabla p}{|\nabla p|}\right), |\nabla p| > G \\ 0, |\nabla p| < G \end{cases}, \qquad (1.7)$$

где G - величина предельного градиента сдвига. Неньютоновские свойства нефти имеют огромное влияние на величину коэффициента извлечения нефти.

Фильтрация при зависимости вязкости и проницаемости от давления

Рассмотрим фильтрацию однофазной жидкости с вязкостью, зависящей от давления $\mu = \mu(p)$, в трубке тока в пласте с проницаемостью, являющейся функцией давления и координаты s: $k \equiv k(p,s) \equiv k_1(s)k_2(p)$. Будем предполагать, что поперечная площадь трубки тока – переменная и есть функция координаты: $A = A(s)$. Получим уравнение для массового расхода, предполагая, что фильтрация подчиняется закону Дарси [70]:

$$M = \vec{u}f\rho = -\frac{k_1(s)k_2(p)}{\mu(p)}\frac{dp}{ds}A(s)\rho(p). \qquad (1.8)$$

Введем по аналогии с [38], [70] новую функцию давления:

$$P = \int \frac{\rho(p)k_2(p)}{\mu(p)}ds. \qquad (1.9)$$

В соответствии с данной заменой уравнение (1.8) примет вид:

$$M = -k_1(s)\frac{dP}{ds}A(s). \qquad (1.10)$$

Данный прием часто используется при моделировании фильтрации жидкости с параметрами, зависящими не только от пространственных координат.

Уравнение однофазной фильтрации

Рассмотрим в общем случае фильтрацию жидкости в анизотропной среде. В работе [74] было показано, что абсолютную проницаемость можно представить как тензор второго ранга, его свертка с градиентом давления – есть скорость фильтрации, с точностью до множителя (вязкость жидкости):

$$u_i = -\frac{k_{ij}}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_j}, \qquad (1.11)$$

где k_{ij} - тензор проницаемости.

Подставив уравнение (1.11) в (1.1), получим:

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\frac{k_{ij}}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = w, \qquad (1.12)$$

Предположим, что проницаемость является функцией координат, а вязкость жидкости постоянна. Чтобы замкнуть систему уравнений (1.1), (1.11) необходимо уравнения состояния. Пусть плотность жидкости и пористость являются только функциями давления $\rho = \rho\left(p\right)$ и связаны с давлением следующими соотношениями: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p} = const = C_f$, $\frac{\partial \phi}{\partial p} = const = C_\phi$ где, C_f, C_ϕ - коэффициенты изотермической сжимаемости. Тогда уравнение (1.11) – можно переписать относительно давлений [80]:

$$\mu\left(C_\phi + \varphi C_f\right)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = w, \tag{1.13}$$

Уравнение (1.13) является, вообще говоря, нелинейным в связи с зависимостью пористости от давления, однако в [80] показано, что если в качестве пористости рассматривать пористость при начальном пластовом давлении ϕ_0, которая не зависит от давления, то это не внесет больших погрешностей, а уравнение (1.13) становится линейным.

$$\mu\left(C_\phi + \phi_0 C_f\right)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = w, \tag{1.14}$$

Данное уравнение принято называть уравнением пьезопроводности. Оно описывает изотермическую фильтрацию однофазной жидкости на упругом режиме. Уравнение впервые получено для однородного случая Щелкачевым В.Н. [80]. По виду совпадает с уравнением, описывающим распространение тепла. Классические модели интерпретации гидродинамических исследований скважины [83] связаны с решением именно этого уравнения. В дальнейшем под пористостью в уравнении (1.13) будем понимать именно пористость при начальном давлении φ_0, а индекс «0» будем иногда опускать.

Если рассматривать стационарный случай, то из уравнения (1.13) легко получить:

$$\frac{1}{\phi_0 \mu C_t}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = -w, \frac{1}{\mu\left(C_\phi + \varphi C_f\right)}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) = -w \tag{1.15}$$

Если источники в области фильтрации отсутствуют, то уравнение (1.15) переходит:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = 0. \tag{1.16}$$

Широкое изучение задачи установившейся фильтрации представлено в [54] Полубариновой-Кочиной П.Я., а также в работах [27], [42], [73]. Здесь распространение получили методы теории потенциала [66] и функций комплексного переменного [52].

Уравнения (1.13) - (1.16) являются основными при описании изотермической фильтрации однофазной жидкости в пористой среде на упругом режиме. Методы решения данных уравнений и соответствующие аппроксимации будут рассмотрены ниже.

1.1.2. Явления вытеснения в пористой среде. Многофазная фильтрация.

Рассмотрим постановку задачи фильтрации двухфазной жидкости в пористой среде. Особую важность данная задача имеет в связи с тем, что большинство месторождений разрабатывается с применением заводнения. Одной из первых моделей, учитывающих вытеснение одной жидкости другой, является модель поршневого вытеснения [38]. В данной модели пренебрегается вязкостью вытесняющей жидкости. Это предположение вполне оправдано на месторождениях с высоковязкой нефтью. В дальнейшем эта модель была расширена на случай различных вязкостей [135].

В качестве методов по описанию явления вытеснения в пористой среде необходимо отметить метод трубок тока, описанный [71], [81], [82]. В соответствии с данным методом область фильтрации делится на трубки тока, в каждой из которых решается одномерная задача вытеснения.

Эксперименты, проводимые на керновых образцах и других пористых средах, показывают, что поршневое вытеснение наблюдается крайне редко и является лишь первым приближением, описывающим процесс вытеснения в реальных пластах. В большинстве случаев вытеснение происходит не полностью – образуется зона, в которой присутствуют оба типа флюидов: вытесняющего и вытесняемого. Чтобы полностью вытеснить оставшуюся жидкость во многих случаях необходимо прокачать через исследуемый образец несколько его поровых объемов. При этом фазовая проницаемость каждой из фильтрующихся жидкостей зависит от насыщенности данной фазы в рассматриваемой точке. Кривые зависимостей фазовых проницаемостей от насыщенности были впервые экспериментально получены в [155]. Обобщение закона Дарси на двухфазный случай с учетом сил гравитации имеет следующий вид:

$$\vec{u}_i = -\frac{kk_i(S)}{\mu_i}\left(\nabla p_i - \rho_i \vec{g}\right), \tag{1.17}$$

где $\vec{u}_i$ - скорость фильтрации i-ой фазы, $i=1,2$, $k_i(s)$ - значение относительной проницаемости i-ой фазы в зависимости от насыщенности вытесняющей фазы S, p_i - давление i-ой фазы, μ_i - ее вязкость, ρ_i - плотность, $\vec{g}$ - ускорение свободного падения. Необходимо заметить, что такое обобщение однофазного закона Дарси вполне обосновано экспериментально: показано [43], [84], что в широком диапазоне изменения условий фазовые проницаемости не зависят ни от скорости фильтрации, ни от соотношения вязкостей фильтрующихся фаз и, поэтому, имеют объективный физический смысл.

Запишем уравнение неразрывности для каждой из фаз:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi \rho_1 S}{\partial t} + \nabla\left(\rho_1 \vec{u}_1\right) = 0 \\ &\frac{\partial \phi \rho_2 \left(1 - S\right)}{\partial t} + \nabla\left(\rho_2 \vec{u}_2\right) = 0 \end{aligned}, \tag{1.18}$$

Разность давлений в фазах обусловлена разностями поверхностных натяжений двух флюидов в данной среде, поэтому ее можно учесть, введя функцию капиллярного давления, которая очевидно, должна зависеть от насыщенности и от характеристик скелета:

$$P_c = p_2 - p_1 = \alpha \sqrt{\frac{k}{\phi}} J\left(s\right) \cos \Theta_0 , \tag{1.19}$$

где k - абсолютная проницаемость, $J\left(s\right)$ - функция Леверетта, Θ_0 - средний интегральный краевой угол смачивания (является интегральной характеристикой пористой среды).

Систему из уравнений (1.17)-(1.19) необходимо замкнуть уравнениями состояния вида $\rho_i = \rho_i\left(p_i\right)$, $\phi = \phi\left(p_1 S + p_2\left(1 - S\right)\right)$.

Предположим, что фильтрующиеся жидкости и скелет несжимаемы, пренебрежем величиной капиллярного давления: $P_c = 0$. В таком случае уравнения (1.17)-(1.18) сведутся к следующему виду:

$$\begin{cases} \nabla\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right) = -\nabla\left(k\left(\dfrac{k_1\left(S\right)}{\mu_1} + \dfrac{k_2\left(S\right)}{\mu_2}\right)\nabla p\right) = 0 \\ \phi \dfrac{\partial S}{\partial t} = -\nabla\left(k \dfrac{k_1\left(S\right)}{\mu_1} \nabla p\right) \end{cases}. \tag{1.20}$$

Данная модель носит название модели Баклея-Леверетта. Было замечено [104], [153], что для данной модели на фронте вытеснения образуется скачок насыщенности. Так как капиллярное давление в ней предполагается нулевым, модель Баклея-Леверетта не учитывает капиллярных явлений. Учет этих явлений произведен при в работе [132], а также [143].

Необходимо сказать несколько слов о двухфазной фильтрации в анизотропной среде. Пусть среда характеризуется симметричным тензором абсолютной проницаемости второго ранга k_{kl}. Тогда существует тензор четвертого ранга f_{ijkl}^{α} [25], задающий фазовые проницаемости. Свертка с этим тензором тензора абсолютной проницаемости – дает тензор фазовой проницаемости k_{ij}^{α}:

$$k_{ij}^{\alpha} = f_{ijkl}^{\alpha} k_{kl} , \tag{1.21}$$

где α - номер фазы.

Причем утверждается [25], что группы симметрии тензора f_{ijkl}^{α} и тензора коэффициентов упругости C_{ijkl} совпадают (тензор C_{ijkl} задает связь между напряжениями p_{ij} и деформациями ε_{kl} в обобщенном законе Гука $p_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$).

Так же в качестве замечания отметим, что в общем случае граница раздела фаз при вытеснении в пористой среде может иметь фрактальную природу [45]. С этим, например, связано явление флуктуирующей обводненности на добывающих скважинах при заводнении.

1.1.3. Явления тепло- и массопереноса в пористой среде

Вопросами массопереноса в пористой среде занимались [7], [8], [22], [48], [78]. Исследование процессов переноса в насыщенной пористой среде связано с необходимостью в построении моделей для интерпретации трассерных исследований [92], [98], [99], [111], [118], [121], [136], [148], [156]. Трассерные исследования проводят для идентификации степени гидродинамической связности скважин. Обычно через нагнетательную скважину в пласт закачивают раствор меченых частиц, а затем в окружающих скважинах замеряют динамику концентрации данных частиц: эти измерения отражают неоднородность пласта в направлении исследуемой скважины, а также остаточную нефтенасыщенность в случае, если использовались химически активные агенты. Однако бывает, что закачка активных частиц производится через добывающую скважину – замеряют динамику концентрации меченых частиц на этой же скважине во время ее работы, измерения отражают остаточную нефтенасыщенность. Рассмотрим уравнения, описывающие движение активных и неактивных компонентов в пористой среде.

Осреднение полей концентраций

Для начала рассмотрим уравнения движения неактивных взвешенных частиц в однофазной жидкости, фильтрующейся в неоднородной пористой среде. В соответствии с [48] явление массопереноса неактивных примесей сначала рассматривается на микроуровне с помощью уравнения молекулярной диффузии:

$$\frac{\partial C'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_m\frac{\partial C'}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial\left(C'v'\right)}{\partial x_i}, \tag{1.22}$$

где D_m - коэффициент молекулярной диффузии, v' - скорость жидкости.

Далее это уравнение усредняется по объему жидкости ΔV_f в общем элементарном объеме пористой среды ΔV. В результате усреднения получается макродифференциальное уравнение относительно средних величин [48]:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(D_{ij}^0+D_{ij}\right)\frac{\partial C}{\partial x_j}\right)-v_i\frac{\partial C}{\partial x_i}, \tag{1.23}$$

где a отвечает за изменение концентрации вследствие адсорбции-десорбции:

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\int\limits_{\Delta S_m}\left(D_m\frac{\partial C'}{\partial x_i}-C'v_i\right)n_i dS,$$

также введены следующие обозначения [48], связывающие интегральные средние характеристики и параметры исходного уравнения (1.22):

$$C\left(x_i,t\right)=\frac{1}{\Delta V_f}\int\limits_{\Delta V_f}C'dV;\ v_i=\frac{1}{\Delta S_f}\int\limits_{\Delta S_f}v_i'dS;\ D_{ij}^0\frac{\partial C}{\partial x_j}=\frac{1}{\Delta S_f}\int\limits_{\Delta S_f}D_m\frac{\partial C'}{\partial x}n_i dS$$

$$D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}=\frac{1}{\Delta S_f}\int\limits_{\Delta S_f}(C'-C)(v_i'-v_i)\,dS\equiv\frac{1}{\Delta S_f}\int\limits_{\Delta S_f}C^*v_i^*dS\ ,$$

ΔS_f - граничные поперечные сечения ΔA_f, $D_{ij}^0=D_m t_{ij}$, t_{ij} - тензор, характеризующий геометрию порового пространства.

Согласно [48] коэффициент фильтрационной диффузии выражается для изотропной среды следующим образом:

$$D_{ij}=Q_{ijkl}\frac{u_k}{|u_k|}\frac{u_l}{\phi}\ , \tag{1.24}$$

где u_k -скорость фильтрации, ϕ - пористость, тензор четвертого ранга Q_{ijkl} определяется для как:

$$Q_{ijkl}=(\lambda_1-\lambda_2)\delta_{ik}\delta_{jl}+\lambda_2\delta_{ij}\delta_{kl}\ , \tag{1.25}$$

где λ_1, λ_2 - характерные длины, характеризующие пористую среду – «длины свободного пробега» в продольном и поперечном направлениях.

Фильтрационно-конвективная диффузия

Уравнение, полученное Николаевским В.Н. при осреднении поля концентрации на микромасштабе, похоже на уравнение, выведенное Баренблаттом Г.И. и др. [7] при описании вытеснения взаимосмешивающихся жидкостей, а также Желтовым Ю.П. [22] при описании конвективной диффузии:

$$\phi\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_j}\right)-u_i\frac{\partial C}{\partial x_i}\ . \tag{1.26}$$

Здесь $u_i=\phi v_i$. Уравнение (1.26) необходимо замкнуть уравнением неразрывности, а также уравнением состояния $\rho=\rho(p)$ и уравнением для импульса – законом Дарси.

Уравнение (1.26) получено в предположении, что на массоперенос компонентов вещества оказывают влияние несколько составляющих: во-первых, средняя скорость фильтрации, выражаемая законом Дарси: $u_i=-\frac{k_{ij}}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_j}$, во-вторых, молекулярная диффузия и дисперсия, обусловленная микронеоднородностью порового пространства.

В главных осях тензор дисперсии выражается следующим образом [7]:

$$D=\begin{pmatrix}K_1 & 0 & 0\\ 0 & K_2 & 0\\ 0 & 0 & K_2\end{pmatrix} \tag{1.27}$$

Коэффициенты K_1 и K_2 - называются соответственно коэффициентами продольной и поперечной диффузии (ось x_1 - сонаправлена вектору скорости фильтрации $\vec{u}$).

Эксперименты [7, 8, 22] показывают, что при небольших скоростях фильтрации, когда $ul << D_m$ $K_1 = \alpha D_m$, где коэффициент пропорциональности α - есть характеристика строения пористой среды. Далее в диапазоне чисел Пекле $1 < Pe \equiv \dfrac{ul}{D_m} < 100$ располагается переходная зона, где на коэффициент продольной диффузии влияют как молекулярная диффузия, так и механическое перемешивание. При числах Пекле $100 < Pe$ влияет только механическое перемешивание: $K_1 = blu$, где $b = const$. Зависимость коэффициента поперечной диффузии K_2 от числа Пекле аналогична, с той разницей, что влияние механического перемешивания проявляется при больших скоростях фильтрации [7].

Фильтрация активных примесей

Рассмотрим двухфазное фильтрационное течение. Пусть вода и нефть содержат активную примесь, способную влиять на гидродинамические характеристики течения. Уравнение баланса примеси имеет следующий вид [8]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi s c_1 + \phi(1-s)c_2 + a\right) + div\left(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \vec{q}\right) = w, \tag{1.28}$$

где c_1, c_2 - концентрация примеси в воде и нефти соответственно, a - количество примеси сорбированное скелетом, $\vec{q}$ - диффузионный поток, w - распределенный источник примеси, данный член моделирует генерацию примеси.

Если предположить, как это сделано в [8], что $w \equiv 0$ и $\vec{q} \equiv 0$, ввести обозначения: $c_1 = c$, $c_2 = g(c_1)$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi s c + \phi(1-s)g(c) + a\right) + div\left[\vec{u}\left(cf + g(c)(1-f)\right)\right] = 0, \tag{1.29}$$

где $a(s,c)$, $f(s,c)$ - функция Баклея-Леверетта, зависит от насыщенности и концентрации примеси. Из уравнения (1.29) видно, что для моделирования вытеснения нефти раствором активных примесей необходимо определиться с конкретным видом функций $f(s,c)$, $g(c)$ и $a(s,c)$ [8].

Явления теплопереноса в пористой среде

Запишем также уравнение баланса тепла для пористой среды. В соответствии с [8] получим для баланса тепла пористой среды (если считать, температуру скелета и флюида одинаковыми):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(c_m T - \phi\rho i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho i u_j\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda_{jk}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right) + Q, \tag{1.30}$$

где c_m - теплоемкость скелета, T - температура, i - энтальпия, λ_{jk} - тензор теплопроводности, Q - распределенный источник тепла.

Как показано в [8] уравнение (1.30) можно упростить. Если предположить отсутствие фазовых переходов: $di = c_p dT$, c_p - теплоемкость жидкости при постоянном давлении, а также $Q = 0$, $\lambda_{jk} = \lambda\delta_{jk}$, $\lambda = const$, $c_m = const$, получим [8]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma\vec{u}\nabla T = \chi\Delta T , \tag{1.31}$$

где $\gamma = \dfrac{\rho c_p}{c_m + \phi\rho c_p}$, $\chi = \dfrac{\lambda}{c_m + \phi\rho c_p}$.

1.2. Постановка основных задач фильтрации и сравнительный анализ методов расчета

В данном разделе рассматривается постановка основных задач фильтрации. Рассмотрены типовые граничные и начальные условия. Обсуждаются основные аналитические и численные методы интегрирования уравнений фильтрации. Проведен сравнительный анализ данных методов. В приложении к однофазной фильтрации рассмотрены в основном аналитические методы. В разделе, обсуждающем многофазную фильтрацию, рассмотрены численные методы.

1.2.1. Однофазная фильтрация

Рассмотрим основные уравнения однофазной фильтрации, обозначим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{u}) = w \\ \vec{u} = -\dfrac{k}{\mu}(\nabla p + \rho\vec{g}) \\ k = k(x, y, z),\ \phi = \phi(x, y, z, p) \\ \rho = \rho(p), \mu = \mu(p) \end{cases} , \tag{1.32}$$

где $\vec{g}$ - ускорение свободного падения, $w = w(x, y, z, t)$ - плотность источника массы. Функции проницаемости $k = k(x, y, z)$, пористости $\phi = \phi(x, y, z, p)$, плотности $\rho = \rho(p)$ и вязкости $\mu = \mu(p)$ считаются известными.

Так как второе уравнение системы (1.32) может быть подставлено в первое, то искомой функцией является давление p. При отыскании данной функции поле скоростей $\vec{u}$ определится автоматически.

Необходимо в заданной области найти функцию $p(x, y, z, t)$, удовлетворяющую системе (1.32), начальным условиям

$$p(x, y, z, 0) = p_0(x, y, z), \tag{1.33}$$

и граничным условиям следующих типов:

$$
\begin{aligned}
& p(x,y,z,t)\big|_{\Gamma} = p_{\Gamma}(x,y,z,t), \\
& \frac{\partial}{\partial \vec{n}} p(x,y,z,t)\Big|_{\Gamma} = u(x,y,z,t)
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

где Γ - участки границы области фильтрации, $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали.

Условия (1.34) называются условиями соответственно первого и второго рода [55], [66], [69]. Также используются граничные условия третьего рода, при которых задается линейная связь между значением функции и ее нормальной производной на границе:

$$
\frac{\partial}{\partial \vec{n}} p(x,y,z,t)\Big|_{\Gamma} + k(x,y,z,t)\, p(x,y,z,t)\big|_{\Gamma} = v(x,y,z,t). \tag{1.35}
$$

Чаще всего коэффициент k предполагается постоянным: $k(x,y,z,t) = const$.

Возможны случаи, когда различные типы граничных условий заданы на различных участках границы области фильтрации.

Как было показано выше, при некоторых упрощениях, система (1.32) сведется к уравнению пьезопроводности (1.13). Данное уравнение по виду совпадает с уравнением теплопроводности – уравнением, описывающим распространение тепла в сплошной среде при условии выполнения закона Фурье (аналога закона Дарси для теплопроводности) о линейной связи между градиентом температуры и тепловым потоком. Поэтому методы решения уравнения теплопроводности применимы естественным образом и к задачам изотермической однофазной фильтрации на упругом режиме. Наиболее полно методы решения уравнения теплопроводности изложены в фундаментальной монографии Г. Карслоу и Д. Егера [28].

Рассмотрим некоторые аналитические методы при решении уравнения пьезопроводности. Некоторые задачи теории неустановившейся однофазной фильтрации можно решить, используя свойства автомодельности. Согласно [6] определение автомодельности звучит следующим образом: «Явление, развивающееся во времени, называется автомодельным, если распределения его характеристик в разные моменты времени получаются одно из другого преобразованием подобия». Г.И. Баренблатт в своей монографии [6] успешно использовал свойства автомодельности при интегрировании уравнений математической физики.

В самом простом случае свойство автомодельности заключается к возможности свести уравнение в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями от нескольких переменных, например, от времени и координаты, к уравнению от безразмерной комбинации этих переменных, в уравнении при этом уменьшится количество переменных. В частности, уравнение пьезопроводности для прямолинейно-параллельного потока (если записать его относительно перепада давления):

$$
\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \Delta p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Delta p(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1.36}
$$

с начальным и граничными условиями:

$$\begin{aligned}&\Delta p(x,0)=0,\ 0<x<+\infty\\&\Delta p(x,0)=C=const,\ 0\le t\le+\infty\end{aligned}. \tag{1.37}$$

обладает свойством автомодельности. Введя замену переменных:

$$w=\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}. \tag{1.38}$$

мы сведем уравнение пьезопроводности (1.36) к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$f''(w)+2wf'(w)=0. \tag{1.39}$$

где $p(x,t)=Cf(w)$. Уравнение (1.39) называется сопряженным уравнением (1.36).

Также в некоторых случаях при интегрировании уравнения пьезопроводности можно воспользоваться методом разделения переменных. Суть метода заключается, в том, что от уравнения пьезопроводности, выполнив соответствующую замену переменных, можно перейти к двум дифференциальным уравнениям, называемыми сопряженными данному, имеющим более простой вид. Решение при этом ищется в виде:

$$\Delta p(r,t)=\phi(r)\Theta(t). \tag{1.40}$$

То есть искомая функция представляется в виде произведения функции, зависящей только от времени и функции, зависящей только от координат.

В простых случаях – мы можем сразу найти вид функций $\phi(r)$ и $\Theta(t)$. В более общем случае – необходимо воспользоваться свойством линейности уравнения пьезопроводности, а именно – искать общее решение в виде суммы сходящегося ряда частных решений. Подробное описание метода разделения переменных можно найти в [28], [55], [66] и [69], [80].

При решении задач теории неустановившейся фильтрации крайне полезны методы операционного исчисления – различные интегральные преобразования. С помощью таких преобразований уравнения в частных производных сводятся к более простому виду.

В общем случае интегральное преобразование имеет вид [4], [14], [55]:

$$\tilde{f}(x_1,...,x_n;s)=\int\limits_{x=a}^{b}K(x,s)\,f(x,x_1,...,x_n)dx, \tag{1.41}$$

где $K(x,s)$ – ядро интегрального преобразования, f – функция, $\tilde{f}$ – образ функции, s – параметр преобразования. Ядро преобразования выбирают таким образом, чтобы уравнение имело более простой вид. Предполагается, что существует формула обращения:

$$f(x,x_1,...,x_n)=\int\limits_{S=a'}^{b'}H(x,s)\,\tilde{f}(x_1,...,x_n;s)dx, \tag{1.42}$$

где $H(x,s)$ - разрешающее ядро.

Широкое распространение при решении задач неустановившейся фильтрации получило преобразование Лапласа, задаваемое следующей формулой [4], [14], [55]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt. \tag{1.43}$$

Обратное преобразование задается формулой:

$$f(t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \tilde{f}(s)\,ds. \tag{1.44}$$

Иногда произвести аналитическое интегрирование (1.44) для обратного преобразования Лапласа – крайне тяжело, поэтому для практических целей удобно пользоваться численным обратным преобразованием Лапласа [146].

Рассмотрим применение преобразования Лапласа на примере интегрирования одномерного уравнения пьезопроводности для однородного изотропного плоскорадиального случая:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \Delta p(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Delta p(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta p(r,t)}{\partial r^2}. \tag{1.45}$$

где $\kappa = \dfrac{k}{\phi \mu C_t}$ - коэффициент пьезопроводности.

Из формулы (1.43) нетрудно получить важное свойство преобразования Лапласа:

$$L\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t)\right](s) = sf(s) - f(+0). \tag{1.46}$$

В результате применения преобразования Лапласа уравнение пьезопроводности перешло в обыкновенное дифференциальное уравнение, известное как модифицированное уравнение Бесселя (здесь предполагалось, что начальное условие однородно: $\Delta p(r,0) = 0$):

$$\frac{s}{\kappa}\Delta\tilde{p} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Delta\tilde{p}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta\tilde{p}}{\partial r^2}. \tag{1.47}$$

Его фундаментальное решение выглядит следующим образом [15]:

$$\Delta\tilde{p}(r,s) = C_1 I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}r\right) + C_2 K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}r\right), \tag{1.48}$$

где I_0 и K_0 - модифицированные функции Бесселя соответственно 1-го и 2-го рода.

Константы C_1 и C_2 находятся из граничных условий. При этом начальное условие было использовано при переходе в пространство Лапласа.

Обширный круг задач теории однофазной неустановившейся фильтрации с использованием преобразования Лапласа приведен в классической работе [150].

При неоднородных начальных и граничных условиях удобен в использовании метод функции Грина. Для примера рассмотрим следующую задачу Коши для неоднородного уравнения пьезопроводности с однородным начальным условием:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t}-\Delta p=w\left(\vec{r},t\right). \quad (1.49)$$

Пусть $G\left(\vec{r},\vec{r}',t,\tau\right)$ - функция Грина, тогда решение задачи (1.49) представимо в виде [55]:

$$p\left(\vec{r},t\right)=\int_0^t\int_{R^n}G\left(\vec{r},\vec{r}',t-\tau\right)w\left(\vec{r}',\tau\right)d\vec{r}'d\tau, \quad (1.50)$$

где n - количество измерений для рассматриваемой задачи.

Функция Грина $G\left(\vec{r},\vec{r}',t,\tau\right)$ для уравнения пьезопроводности имеет следующий физический смысл – это значение давления в точке $\vec{r}$ в момент времени t, если в момент времени τ в точке $\vec{r}'$ мгновенно включился точечный сток единичной интенсивности.

Рассмотрим алгоритм нахождения функции Грина не примере неоднородного уравнения плоскопараллельной фильтрации. Для данного случая функция Грина является решением однородного уравнения [66]:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=0. \quad (1.51)$$

С начальным условием специального вида:

$$G\left(x,x',t,\tau\right)\Big|_{t=\tau}=\delta\left(x-x'\right). \quad (1.52)$$

И однородными граничными условиями (если ставится краевая задача).

Ищется функция Грина обычно в виде разложения в ряд по системе полных ортогональных функций в виде:

$$G\left(x,x',t\right)\Big|_{t=\tau}=\sum_n^\infty A_n\left(t\right)\phi_n\left(x\right), \quad (1.53)$$

где $\left\{\phi_n\left(x\right)\right\}$ - полная нормированная ортогональная система функций.

При этом дельта функция также представляется в виде ряда [66]:

$$\delta\left(x-x'\right)=\sum_n^\infty\phi_n\left(x\right)\phi_n\left(x'\right), \quad (1.54)$$

Коэффициенты $A_n\left(t\right)$ находятся из уравнения (1.51) (каждое слагаемое суммы (1.53) должно удовлетворять данному уравнению), а также из начального условия (1.52).

Если характеристики фильтрационных потоков не меняются со временем (стационарны), то распределение давления описывается (при отсутствии источников внутри области фильтрации) уравнениями (1.15), (1.16). Такие режимы фильтрации называются установившимися. При двумерном установившемся потоке в изотропных однородных коллекторах многие задачи фильтрации могут быть решены с помощью мощного математического аппарата комплексного анализа[42], [52], [54]. А также с помощью методов теории потенциала. [66]. В приложениях к теории установившейся фильтрации также широкий круг задач (в том числе задачи площадного заводнения), с использованием методов ТФКП был решен Маскетом в его монографии [42]. Среди отечественных авторов можно отметить работу [73].

В заключении данного раздела рассмотрим некоторые наиболее употребимые аппроксимации для неустановившегося режима при плоскорадиальной симметрии. Наиболее распространены две модели работы скважины: модель постоянного дебита и модель постоянного давления. Причем в литературе в основном описывается модель постоянного дебита. Решение для скважины, работающей с постоянным дебитом в бесконечном пласте, в случае плоскорадиального притока, легко получить, проинтегрировав соответствующее фундаментальное решение [80], [83]:

$$\Delta p \equiv p_0 - p(r,t) = \frac{Q\mu}{4\pi kh}\int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4\kappa(t-t')}}}{t-t'}dt' \equiv \frac{Q\mu}{4\pi kh}\left[-Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right)\right], \tag{1.55}$$

где $-Ei(-z)$ - интегральная показательная функция или интегральная экспонента.

Для данного решения имеется более удобная аппроксимация [83]:

$$p(r,t) \approx p_0 - \frac{Q\mu}{4\pi kh}\left(\ln\left(\frac{4\kappa t}{r^2}\right) - \gamma\right), \tag{1.56}$$

где $\gamma \approx 0.5772$ - константа Эйлера-Маскерони.

Аппроксимация (1.56) - называется логарифмической аппроксимацией и имеет место при следующем условии на время: $t > \frac{25 r_w^2}{\kappa}$.

Рассмотрим модель постоянного давления. В работе [72] говорится, что при анализе дебита скважины, работающей на неустановившемся режиме с постоянным забойным давлением с точностью около 1% можно пользоваться приближенной формулой:

$$q \approx \frac{2\pi kh}{\mu}\frac{P_0 - P_{wf}}{\ln\left(1 + \frac{\sqrt{\pi\kappa t}}{r_w}\right)}, \tag{1.57}$$

Формула (1.57) имеет место при следующем условии на время: $t < \frac{(r_e - r_w)^2}{\pi\kappa}$.

1.2.2. Многофазная фильтрация

Рассмотрим двухфазную изотермическую фильтрацию жидкости [1]. Процесс двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей описывается с помощью уравнений неразрывности для каждой из фаз (1.18) и уравнением Дарси (1.17). Эту систему необходимо дополнить уравнениями, описывающими зависимость капиллярного давления и функций фазовой проницаемостей от насыщенности $P_c(S_1)$, $k_i = k_i(S_i)$ и уравнениями зависимости плотности, вязкости, пористости от давления $\rho_i = \rho_i(p_i)$, $\mu_i = \mu_i(p_i)$, $\phi = \phi(p)$. Также в пределах исследуемой области фильтрации $\Omega(x, y, z)$ задаются функции $\phi(x, y, z)$ и $k(x, y, z)$.

Задача двухфазной фильтрации ставится следующим образом. Необходимо в заданной области найти функции динамики давления и насыщенности $p_i(x, y, z, t)$ и $S_i(x, y, z, t)$, удовлетворяющие описанным выше уравнениям, начальным и граничным условиям.

Начальные условия на насыщенность и давление задаются для одной из фаз фильтрующихся жидкостей (для второй фазы определяются автоматически): $p_i(x, y, z, 0) = p_0(x, y, z)$, $S_i(x, y, z, 0) = S_0(x, y, z)$. Граничные условия на давление задаются аналогично (1.34), (1.35). Граничные условия на насыщенность определяются из решения уравнений двухфазной фильтрации и могут быть заданы независимо только на границах, являющихся источником данной фазы (например на границах аквифера или на границах нагнетательных скважин).

Для решения задач многофазной фильтрации развиты различные численные методы [1], [18], [26], [57], [58], [59], [95]. При этом область фильтрации разбивается на конечное число блоков – ячеек. Характерный размер скважин (10^{-1} м) гораздо меньше характерного размера ячейки ($10^1 - 10^2$ м) в гидродинамической модели ($10^3 - 10^5$ м), что затрудняет моделирование скважины с помощью задания границ скважины в явном виде. Для учета скважины в сеточной модели развиты различные методы, использующие соответствующие аналитические решения [140], [141]. Также существуют подходы к моделированию фильтрации в ячейке со скважиной (или трещиной) с помощью формализма трубок тока [106], [107].

1.3. Упрощение уравнений фильтрации жидкости в пористой среде

В некоторых случаях корректно описать фильтрацию можно лишь с использованием полномасштабной 3D гидродинамической модели. При таком подходе интегрирование системы дифференциальных уравнений будет осуществляться численными методами. Как говорилось выше, одним из самых распространенных на данный момент численных методов является метод конечных разностей. Основное преимущество данного метода заключается в его универсальности. Однако, как было замечено, при решении обратных задач возникают вычислительные трудности в его использовании. Поэтому для проведения оценочных расчетов необходимы аналитические и численно-аналитические модели, лишенные данного недостатка. Необходимо также заметить, что для хорошей аппроксимации решения вблизи особенностей, нужно дробить шаг, что также сказывается на оперативности расчета. В данном случае также помогает использование аналитических моделей для асимптотического описания решения вблизи особенности, тогда как вдали от особенности можно использовать численные методы [2].

Как было указано выше, уравнения многофазной фильтрации в общем случае аналитически неразрешимы, поэтому для аналитической постановки задачи фильтрации жидкости в неоднородной пористой среде необходимы дополнительные упрощения. Рассмотрим условия разделения уравнений для насыщенности и для давления, а также возможность понижения размерности задачи фильтрации.

1.3.1. Разделение уравнений для насыщенности и давления

Рассмотрим уравнения двухфазной фильтрации в самом общем виде, при этом для простоты будем считать, что распределенные источники отсутствуют:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\left(\phi\rho_1 S\right)}{\partial t}+div\left(\rho_1\vec{u}_1\right)=0\\ \frac{\partial\left(\phi\rho_2\left(1-S\right)\right)}{\partial t}+div\left(\rho_2\vec{u}_2\right)=0\end{gathered}. \tag{1.58}$$

Будем предполагать, что выполняется обобщенный закон Дарси (капиллярным давлением пренебрежем):

$$\begin{gathered}\vec{u}_1=-\frac{kk_1\left(S\right)}{\mu_1}grad\left(p\right)\\ \vec{u}_2=-\frac{kk_2\left(S\right)}{\mu_2}grad\left(p\right)\end{gathered}. \tag{1.59}$$

Перепишем уравнения в следующем виде:

$$\begin{gathered}\rho_1 S\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi S\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\phi\rho_1\frac{\partial\left(S\right)}{\partial t}+\rho_1 div\left(\vec{u}_1\right)+grad\left(\rho_1\right)\cdot\vec{u}_1=0\\ \rho_2\left(1-S\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi\left(1-S\right)\frac{\partial\rho_2}{\partial t}-\phi\rho_2\frac{\partial S}{\partial t}+\rho_2 div\left(\vec{u}_2\right)+grad\left(\rho_2\right)\cdot\vec{u}_2=0\end{gathered}. \tag{1.60}$$

Будем рассматривать движение однородных слабосжимаемых жидкостей, поэтому пятым членом справа пренебрегаем. Считаем, что пористость и плотность есть функции давления: $\phi=\phi\left(p\right),\ \ \rho_i=\rho_i\left(p\right)$. Будем рассматривать фильтрацию на упругом режиме. Обозначим через $C_{fi}=\dfrac{1}{\rho_i}\dfrac{\partial\rho_i}{\partial p}$ коэффициент изотермической сжимаемости i-го флюида. Тогда предыдущие уравнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}S\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi SC_{f1}\frac{\partial p}{\partial t}+\phi\frac{\partial S}{\partial t}+div\left(\vec{u}_1\right)=0\\ \left(1-S\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi\left(1-S\right)C_{f2}\frac{\partial p}{\partial t}-\phi\frac{\partial S}{\partial t}+div\left(\vec{u}_2\right)=0\end{gathered}. \tag{1.61}$$

Сложим уравнения (1.61) и заменим суммой нижнее уравнение, с учетом (1.59) получим:

$$S\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi SC_{f1}\frac{\partial p}{\partial t}+\phi\frac{\partial S}{\partial t}-div\left(\lambda_1\cdot k\cdot grad\left(p\right)\right)=0$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi\frac{\partial p}{\partial t}\left(\left(1-S\right)C_{f2}+SC_{f1}\right)-div\left(\lambda\cdot k\cdot grad\left(p\right)\right)=0 , \tag{1.62}$$

где $\lambda_1=\frac{k_1\left(S\right)}{\mu_1}$, $\lambda=\lambda\left(S\right)=\frac{k_1\left(S\right)}{\mu_1}+\frac{k_2\left(S\right)}{\mu_2}$, $\phi=\phi\left(p\right)$.

Система (1.62) состоит из двух уравнений относительно давления и насыщенности. Причем в общем случае оба уравнения системы (1.62) содержат как давление, так и насыщенность и требуют совместного решения. Однако во многих практически важных случаях уравнения системы (1.62) можно разделить и, в частности, выделить уравнение для давления.

Рассмотрим для начала следующий подход. Разобьем область фильтрации на несколько подобластей, в каждой из которых усредним насыщенность: $\Omega=\bigcup_j\omega_j$, $j=\overline{1,N}$. В каждой из подобластей можно записать уравнение относительно давления, с учетом осредненной по данной подобласти насыщенности, для j-ой подобласти ω_j второе уравнение (1.62) преобразуется:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi\frac{\partial p}{\partial t}\left(\left(1-S^j\right)C_{f2}+S^jC_{f1}\right)-\lambda^j div\left(k\cdot grad\left(p\right)\right)=0, \tag{1.63}$$

где S^j - средняя насыщенность j-ой подобласти, $\lambda^j=\frac{k_1\left(S^j\right)}{\mu_1}+\frac{k_2\left(S^j\right)}{\mu_2}$, $\phi=\phi\left(p\right)$.

Уравнение (1.63) содержит лишь давление и может быть решено независимо. При этом граничные и начальные условия определяются из граничных и начальных условий задачи и условий сопряжения поля давления между областями:

$$p^i\Big|_{\Gamma_{ij}}=p^j\Big|_{\Gamma_{ij}}$$
$$\lambda^i\left(\nabla p^i\cdot\vec{n}\right)\Big|_{\Gamma_{ij}}=\lambda^j\left(\nabla p^j\cdot\vec{n}\right)\Big|_{\Gamma_{ij}} , \tag{1.64}$$

где Γ_{ij} - граница между подобластью *i* и *j*, $\vec{n}$ - единичная нормаль к границе раздела Γ_{ij}.

Очевидно, что поле насыщенности при этом кусочно-постоянно.

Описанный выше подход применяется в случаях, когда заранее известно распределение насыщенности или его можно легко оценить, например, на начальном этапе разработки: насыщенность изменяется в областях вокруг нагнетательных скважин. Затем по мере разработки вся область фильтрации делится на подобласти вокруг добывающих и нагнетательных скважинах, а также на некоторые переходные подобласти. При этом границы подобластей и средние насыщенности в них приходится постоянно пересчитывать, оценивая их из соображений материального баланса и т.д., а также до прорыва и после прорыва воды [67], [119], [120]. Данный подход используется для описания фильтрации в простых случаях в симметричных системах разработки.

Недостатки данного подхода также очевидны, фактически он является первым приближением к методу конечных разностей.

Рассмотрим второе уравнение системы (1.62). Как показывает анализ данных эксплуатации, исследования керна, а также данные численных экспериментов по адаптации гидродинамических моделей на многих месторождениях Западной Сибири функция суммарной относительной подвижности слабо отличается от постоянного значения во всем диапазоне изменения насыщенности: $\lambda(S) \approx \lambda_0$. С учетом этого запишем второе уравнение (1.62):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial p}{\partial t}\left((1-S)C_{f2} + SC_{f1}\right) - \lambda_0 \cdot div\left(k \cdot grad\left(p\right)\right) = 0. \tag{1.65}$$

Очевидно, что для того, чтобы уравнение (1.65) не зависело от насыщенности необходимо выполнение условия $C_{f2} = C_{f1} = C_f$. Данное условие реализуется в нескольких случаях. Во-первых, при однофазной фильтрации, а также в зонах с сильно промытыми областями, где фильтрация близка к однофазной. В этом случае уравнение (1.65) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi C_f \frac{\partial p}{\partial t} - \lambda_0 \cdot div\left(k \cdot grad\left(p\right)\right) = 0. \tag{1.66}$$

Вторым условием, при котором уравнение (1.65) будет независимым от насыщенности является малость членов при насыщенности, то есть малость C_{f1} и C_{f2}. Что выполняется для несжимаемых жидкостей, а также для слабосжимаемых жидкостей, когда их сжимаемостью можно пренебречь. В этом случае уравнение (1.65) переходит в следующее выражение:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda_0 \cdot div\left(k \cdot grad\left(p\right)\right) = 0. \tag{1.67}$$

Наконец, если мы рассматриваем установившуюся фильтрацию и ставим целью найти стационарное поле давления, то члены с частными производными по времени равны нулю, и уравнение (1.65) переходит в следующее стационарное уравнение, также независящее от насыщенности:

$$div\left(k \cdot grad\left(p\right)\right) = 0. \tag{1.68}$$

Так как мы рассматриваем фильтрацию на упругом режиме, то введем коэффициент изотермической сжимаемости скелета $C_\phi = \frac{\partial \phi}{\partial p}$. С учетом этого запишем уравнение (1.65):

$$\frac{\partial p}{\partial t}\left(\phi(1-S)C_{f2} + \phi SC_{f1} + C_\varphi\right) - \lambda_0 \cdot div\left(k \cdot grad\left(p\right)\right) = 0, \tag{1.69}$$

С учетом введенного коэффициента сжимаемости уравнения (1.66) и (1.67) будут выглядеть следующим образом соответственно:

$$\left(\phi C_f + C_\phi\right)\frac{\partial p}{\partial t} - \lambda_0 \cdot div\left(k \cdot grad\left(p\right)\right) = 0. \tag{1.70}$$

$$C_\phi \frac{\partial p}{\partial t} - \lambda_0 \cdot div\left(k \cdot grad\left(p\right)\right) = 0. \tag{1.71}$$

Уравнение (1.70), не является линейным, однако, как говорилось выше, если принять в качестве зависимости функции пористости от давления ее значение ϕ_0 при начальном пластовом давлении p_0, то уравнение становится линейным.

Данные уравнения можно записать в следующем общем для них виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \cdot div\left(k \cdot grad\left(p\right)\right), \tag{1.72}$$

где коэффициент κ имеет различные значения в зависимости от рассматриваемого случая: для первого случая (сжимаемости флюидов одинаковы или их различием можно пренебречь) $\kappa = \frac{\lambda_0}{\left(\phi_0 C_f + C_\varphi\right)}$, для второго случая (сжимаемостью флюидов можно пренебречь) $\kappa = \frac{\lambda_0}{C_\varphi}$. Здесь, как было указано выше, под пористостью ϕ_0 понимается пористость при начальном давлении p_0.

Уравнение (1.68), описывающее фильтрацию несжимаемых флюидов в несжимаемой пористой среде – является также предельным случаем уравнения (1.72) и его решения должны стремиться к решениям уравнения (1.68) на больших временах.

1.3.2. Осреднение уравнений фильтрации по вертикальной координате

На практике для описания фильтрации во многих случаях можно перейти к двумерному случаю. Погрешность перехода от трехмерного случая к двумерному тем меньше, чем больше соотношение латеральных размеров пласта к его средней мощности. Большую погрешность вносит вертикальная неоднородность по проницаемости. Однако в этом случае разработаны эффективные алгоритмы по учету данного типа неоднородности через введение функций модифицированных относительных фазовых проницаемостей [32]. Поэтому при моделировании больших месторождений, имеет смысл перейти к рассмотрению двумерной фильтрации. Также моделирование фильтрации в двумерном приближении целесообразно проводить для оценочных расчетов при решении обратных задач. В данном разделе рассмотрены вопросы моделирования осреднения уравнений фильтрации.

Однофазная фильтрация

Рассмотрим уравнения однофазной фильтрации в виде (1.72):

$$\frac{\left(\phi_0 C_f + C_\varphi\right)}{\lambda_0}\frac{\partial p}{\partial t} - div\left(k \cdot grad\left(p\right)\right) = 0. \tag{1.73}$$

Напишем уравнение (1.73) в декартовой ортонормированной системе координат (ось z направлена вертикально):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \cdot \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \cdot \frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\left(\varphi C_f + C_\varphi\right)}{\lambda_0}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{1.74}$$

Аналогично [13] проинтегрируем по вертикальной координате z, при этом предполагаем, что все условия для применения формулы Лейбница [64] выполнены:

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left(k\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)\cdot dz+\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}\left(k\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right)\cdot dz+\int_0^h \frac{\partial}{\partial z}\left(k\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)\cdot dz=\int_0^h\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t}\right)dz\,, \tag{1.75}$$

где $k=k(x,y,z)$, $\kappa=\kappa(x,y,z)$, $h=h(x,y)$ - мощность пласта.

Если предположить, что поток жидкости через подошву и кровлю пласта отсутствует, то есть что $\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=h}=0$, то последнее слагаемое в левой части (1.75) исчезает.

Рассмотрим первое и второе слагаемые в левой части. По формуле Лейбница:

$$\begin{aligned}\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left(k\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)\cdot dz&=\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left(k\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)\cdot dz-k\left.\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{z=h}+k\left.\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{z=0},\\ \int_0^h \frac{\partial}{\partial y}\left(k\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right)\cdot dz&=\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}\left(k\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right)\cdot dz-k\left.\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{z=h}+k\left.\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{z=0}.\end{aligned} \tag{1.76}$$

Если предположить [13], что мощность пласта слабо меняется, а также с учетом того, что проницаемость пласта вблизи кровли и подошвы близка к нулю, то двумя последними членами справа в (1.76) можно пренебречь, а уравнение (1.75) примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h\left(k\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dz\right)+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^h\left(k\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\cdot dz\right)=\int_0^h\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t}\right)dz\,. \tag{1.77}$$

Воспользовавшись теоремой о среднем, придем к следующему уравнению [13]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{k}h\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{k}h\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{h}{\tilde{\kappa}}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{1.78}$$

или

$$\nabla\left(\tilde{k}h\cdot\nabla p\right)=\frac{h}{\tilde{\kappa}}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{1.79}$$

где введены следующие замены:

$$\tilde{k}=\frac{1}{h}\int_0^h(k\cdot dz),\ \ \frac{1}{\tilde{\kappa}}=\frac{1}{h}\int_0^h\frac{1}{\kappa}dz\,, \tag{1.80}$$

где при независимости сжимаемости породы от координаты, имеем $\frac{1}{\tilde{\kappa}}=\frac{h\left(C_f\tilde{\varphi}+C_\varphi\right)}{\lambda_0}$, $\tilde{\phi}=\frac{1}{h}\int_0^h(\phi_0\cdot dz)$. Величины $\tilde{k}$ и $\tilde{\varphi}$ - есть эффективная проницаемость и пористость. Операторы градиента и дивергенции действуют уже в двумерном пространстве.

В данной работе фильтрация будет описывать в рамках уравнений (1.78), (1.79). Решение уравнений (1.78), (1.79) применительно к задачам нефтедобычи и разработки месторождений является предметом данной работы.

2. Численно-аналитические алгоритмы моделирования фильтрации в многопластовых многоскважинных системах

Данная глава посвящена математической постановке задач исследования, построению моделей производительности скважин в многоскважинных многопластовых системах.

В первом параграфе ставится общая задача неустановившейся фильтрации жидкости в многопластовой многоскважинной системе. Обсуждается практическая важность решения задачи фильтрации в описанной постановке. Во втором параграфе ищется структура и общий вид решения поставленной задачи для установившейся фильтрации. В третьем и четвертом параграфе рассматривается неустановившаяся и установившаяся фильтрация в случае многоскважинной однопластовой системы и односкважинной многопластовой системы. Получены аналитические решения и аппроксимации поставленной в первом параграфе задачи для описанных случаев. Рассмотрены практические приложения построенных решений для прямых задач разработки при планировании и анализе производительности скважин в многопластовых и многоскважинных системах.

2.1. Постановка задачи о поле давления в неоднородной многопластовой многоскважинной системе

2.1.1. Обсуждение уравнений и граничных условий

Рассмотрим многопластовую систему, состоящую из M пластов (см. рис. 2.1). Пласты имеют эффективные усредненные по вертикали характеристики. Будем предполагать, что условия для разделения уравнений для насыщенности и для давления выполнены (см. п. 1.3.1), также будем считать выполненными условия осреднения уравнений по вертикали (см. п.1.3.2). В соответствии с ранее сделанными выводами, поле давления при фильтрации в каждом из пластов описывается с помощью уравнения (знак тильды опущен):

$$\frac{h}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla\left(kh \cdot \nabla p\right), \tag{2.1}$$

Пусть фильтрация (2.1) происходит в многопластовой многоскважинной системе, изображенной на рис. 2.1, представляющей совокупность M двумерных пластов различных геометрических размеров и формы. Многоскважинная система состоит из N скважин. Причем в общем случае в системе есть как скважины, вскрывающие все пласты системы, так и скважины, вскрывающие лишь некоторые из этих пластов.

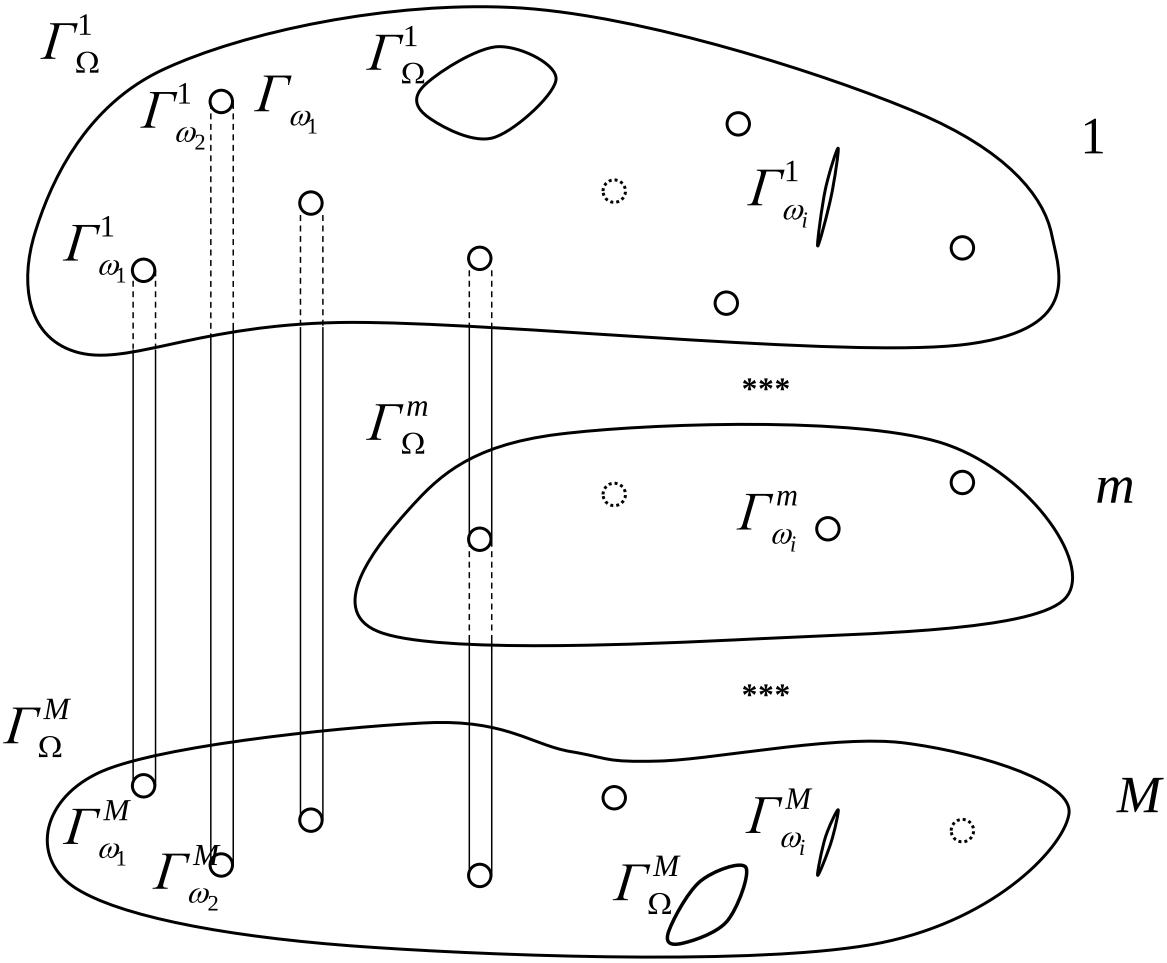


рис. 2.1. Многопластовая многоскважинная система

Для отображения информации о том, какие скважины работают на какой пласт в многопластовой системе удобно ввести понятие матрицы вскрытия $\hat{P}$. Матрица вскрытия $\hat{P}$ - есть матрица размером $M \times N$, элементы которой равны 1, если скважина вскрывает соответствующий пласт и нулю в обратном случае:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, \ j-\text{ая скважина вскрывает } i-\text{ый пласт} \\ 0, \ j-\text{ая скважина не вскрывает } i-\text{ый пласт} \end{cases}. \tag{2.2}$$

На естественных границах каждого из M пластов заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} & p(x,y,t)\big|_{\Gamma_{\Omega_i}^p} = p_{\Omega_i}(x,y,t), i = 1,..,K_p \\ & \left.\frac{\partial p(x,y,t)}{\partial n}\right|_{\Gamma_{\Omega_j}^q} = C \cdot u_{\Omega_j}(x,y,t), \ j = 1,..,K_q \end{aligned}, \tag{2.3}$$

где $\Gamma_{\Omega_i}^p$ и $\Gamma_{\Omega_j}^q$ - участки границы с соответственно заданным давлением

Рассмотрим граничные условия на скважинах. Если $P_{mj} = 0$, то на *j*-ой скважине на *m*-ом пласте задается следующее граничное условие:

$$\left.\frac{\partial p^m\left(x,y,t\right)}{\partial n^m}\right|_{\Gamma^0_{w^m_j}}=0\,, \tag{2.4}$$

где $\Gamma^0_{w^m_j}$ - граница j-ой скважины на m-ом пласте, скважина не вскрывает пласт (пласт не проперфорирован, зачастую $\Gamma^0_{w^m_j}$ - это граница цементного кольца).

Если $P_{mj}=1$, то на скважинах возможно задание граничных условий нескольких типов.

Наиболее часто встречаются условия 1-го и 2-го рода. Граничные условия 1-го рода:

$$p\left(x,y,z,t\right)\Big|_{\Gamma^m_{wj}}=p^m_{w\_j}\left(t\right), \tag{2.5}$$

где Γ^m_{wj} - граница j-ой скважины на m-ом пласте.

Условия 2-го рода:

$$\left.\frac{\partial p^m\left(x,y,z,t\right)}{\partial \vec{n}^m}\right|_{\Gamma^m_{wi}}=C_m\cdot\vec{u}^m\left(t\right). \tag{2.6}$$

Граничные условия (2.5), (2.6) задаются на каждый пласт в отдельности. Очевидно, что при таким образом заданных граничных условиях многопластовая система представляет совокупность независимых однопластовых систем. Недостатком такого задания граничных условий является то, что на практике в большинстве случаев в скважину спускается один насос на все пласты многопластовой системы, что говорит о невозможности задания независимых граничных условий на каждый пласт.

Рассмотрим другие способы задания граничных условий на скважинах в многопластовых системах. Обычно при задании постоянного давления на границе многопластовой скважины подразумевают забойное давление на самом верхнем пласте, остальные забойные давления пересчитываются на уровень соответствующих пластов. Поэтому при задании на скважине условия постоянного давления – задается давление на верхнем из пластов, а давление на остальных пластах вычисляется с помощью следующей формулы:

$$p^m\left(x,y,z,t\right)\Big|_{\Gamma^m_{wj}}=p^1_{w\_j}\left(t\right)+\Delta^m_j\left(t\right),\quad P_{mj}=1, \tag{2.7}$$

где Δ^m_j - есть разница между давлением на границе 1-го пласта и m-го пласта вследствие разницы в их глубине, она может быть вычислена по давлению столба жидкости между двумя пластами в стволе скважины с помощью алгоритмов гидравлических расчетов многофазной смеси [100, 103]. Будем предполагать, что время протекания переходных процессов в стволе скважины много меньше времени изменения режима ее работы. Заметим, что уравнение (2.7) имеет место только при $P_{mj}=1$. Давление на границе j-ой скважины в m-ом пласте при $P_{mj}=0$ является следствием (2.4).

Другим общим типом задания граничных условий на скважине, работающей на несколько пластов, является задание постоянного дебита со всех пластов. Аналогично тому, как это было сделано выше, введем дополнительное условие постоянства давления (но не по времени) по границе скважины на разных пластах:

$$\begin{matrix} \sum_{m=1}^{M} \lambda_0^m \oint_{\Gamma_{w_j^m}^q} k^m h^m \cdot \frac{\partial p^m}{\partial n^m} \cdot dl = q_{wj} \\ p^m(x,y,t)\Big|_{\Gamma_{wj}^p} = p_{w\_j}^1(t) + \Delta_j^m \end{matrix}, \quad P_{mj} = 1 \qquad (2.8)$$

где $p_{wj}^m(t)$ - давление на границе j-ой скважины в m-ом пласте. Заметим, что второе уравнение имеет место лишь на пластах при условии $P_{mj} = 1$. Давление на границе j-ой скважины в m-ом пласте при $P_{mj} = 0$ является следствием (2.4).

В общем случае имеет место следующая постановка граничного условия на скважине, включающая как частные случаи (2.7), (2.8):

$$\begin{matrix} p^m(x,y,t)\Big|_{\Gamma_{wj}} = p_{w\_j}^m(t) = f(q_{wj}) + \Delta^m(t) \\ q_{wj} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_0^m \oint_{\Gamma_{w_j^m}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p^m}{\partial n^m} \cdot dl \end{matrix}, \quad P_{mj} = 1 \qquad (2.9)$$

где функция $f(q_{wj})$ описывает движение жидкости в стволе скважины с учетом особенностей компоновки самой скважины и напорной характеристики насоса, изображенная в системе координат «дебит – забойное давление» такая зависимость носит название «кривой эффективности лифта» [100, 103]. Фактически $f(q_{wj})$ отражает пропускную способность скважины и может быть вычислена с помощью гидравлических расчетов движения многофазной смеси в стволе скважины [100, 103]. Данный тип граничного условия будет использован ниже при рассмотрении вопросов моделирования технологических операций на многопластовых скважинах.

2.1.2. Постановка задачи определения поля давления в многопластовой многоскважинной системе

Поставим задачу о нахождении поля давления в пластах неоднородной многопластовой многоскважинной системы. Пусть имеется состоящая из M пластов многопластовая область фильтрации $\{\Omega^m\}_{m=1}^{M}$ (рис. 2.1). Каждый из пластов гидродинамически изолирован и связан с другими пластами только через скважины. Многопластовая область вскрывается N скважинами. Характер вскрытия конкретных пластов задается с помощью матрицы вскрытия $\hat{P}$. Поле давления при фильтрации в рассматриваемой системе описывается с помощью уравнения:

$$\frac{h^m}{\kappa^m}\frac{\partial p^m}{\partial t}=\nabla\left(k^m h^m\cdot\nabla p^m\right),\ m=1,..,M\ , \qquad (2.10)$$

где m - номер пласта, $p^m=p^m\left(x,y,t\right)$ - давление в m-ом пласте, $\kappa^m=\dfrac{\lambda_0^m}{\varphi^m C_f^m+C_\varphi^m}$, $\varphi^m=\varphi^m\left(x,y\right)$, $k^m=k^m\left(x,y\right)$, $h^m=h^m\left(x,y\right)$ - функции зависимости пористости, проницаемости и мощности для каждого из M пластов.

На естественных границах каждого из M пластов заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &p^m\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^p_{\Omega_i^m}}=p_{\Omega_i^m}\left(x,y\right),i=1,..,K_p^m \\ &\left.\frac{\partial p^m\left(x,y,t\right)}{\partial n^m}\right|_{\Gamma^q_{\Omega_j^m}}=C\cdot u_{\Omega_j^m}\left(x,y\right),\ j=1,..,K_q^m \end{aligned}, \qquad (2.11)$$

где $\Gamma^p_{\Omega_i^m}$ и $\Gamma^q_{\Omega_j^m}$ - участки границы с соответственно заданным давлением и скоростью фильтрации для m-го пласта Ω^m. Предполагаем, что граничные условия на естественных границах пласта не зависят от времени.

Также для каждого из M пластов предполагаем заданным начальное условие:

$$p^m\left(x,y,t\right)\Big|_{t=0}=p_0^m\left(x,y\right). \qquad (2.12)$$

Как и выше будем предполагать, что на скважинах задается два типа граничных условия. На N_p скважинах задается постоянное давление на границе, если $P_{mj}=1$:

$$p^m\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^m_{wi}}=p^1_{w\_i}+\Delta^m,i=1,..,N_p\,, \qquad (2.13)$$

где Δ^m - разность в забойных давлениях, вызванная давлением столба жидкости в стволе скважины между пластами, когда разностью глубин залегания пластов можно пренебречь, то имеем $\Delta^m=0$, и на всех вскрываемых пластах на границе данной скважины задается одно и то же давление. p^1_{wi} и Δ^m - считаются заданными и не зависят от времени.

На скважинах N_q задается постоянный суммарный дебит со всех пластов, если $P_{mj}=1$:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{M}\lambda_0^m\oint\limits_{\Gamma^q_{w_j^m}}k^m h^m\cdot\frac{\partial p^m}{\partial n^m}\cdot dl=q_{wj},\ j=1,..,N_q \\ &p^m\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^p_{wj}}=p^1_{w\_j}\left(t\right)+\Delta_j^m,\ j=1,..,N_q \end{aligned}, \qquad (2.14)$$

В отличие от условия (2.13), второе из условий (2.14) отражает, что давление в любой точке границы скважины одинаково, но является неизвестным и в общем случае зависит от времени.

Для случая когда $P_{mj}=0$, имеем:

$$\left.\frac{\partial p^m\left(x,y,t\right)}{\partial n^m}\right|_{\Gamma_{w_j^m}}=0\,, \qquad (2.15)$$

вне зависимости от типа скважины (постоянным давлением, постоянным дебитом).

В некоторых случаях давления на границе скважины на разных пластах могут быть независимы (например, когда каждый пласт разрабатывается своим насосом), но при этом данные пласты фактически разрабатываются разными скважинами и данный случай легко учесть описываемым в данной работе способом.

По аналогии с [32] поставим две задачи, связанные с исследованием фильтрации системе, описанной выше. Существенным отличием от случая, изучаемого в [32] является, то, что здесь рассматривается многопластовая система и неустановившаяся фильтрация.

Задача 1

Необходимо найти M непрерывно дифференцируемых по времени и дважды непрерывно дифференцируемых по координатам в $\left\{\Omega^m\right\}_{m=1}^M$ функций $\left\{p^m(x,y,t)\right\}_{m=1}^M$, каждая из которых удовлетворяет соответствующему для m-го пласта уравнению (2.10), граничным условиям (2.11) на естественной границе каждого из пластов, а также начальным условиям для каждого пласта (2.12). При этом функции $p^m(x,y,t)$ удовлетворяют общим граничным условиям (2.13), (2.14) на скважинах при $P_{mj}=1$ и условию (2.15) при $P_{mj}=0$. Рассматриваемая многопластовая система характеризуется полями проницаемости и пористости: $\left\{\varphi^m(x,y)\right\}_{m=1}^M$, $\left\{k^m(x,y)\right\}_{m=1}^M$ на каждый пласт, пласты являются переменными по мощности $\left\{h^m(x,y)\right\}_{m=1}^M$.

Также поставим задачу, связанную с задачей 1 и имеющую высокий практический интерес.

Задача 2

Пусть функции $\left\{p^m(x,y,t)\right\}_{m=1}^M$ являются непрерывно дифференцируемыми по времени и дважды непрерывно дифференцируемыми по координатам, удовлетворяют уравнениям (2.10) в областях фильтрации $\left\{\Omega^m\right\}_{m=1}^M$, начальным условиям (2.12), граничным условиям на естественной границе пласта (2.11), а также общим граничным условиям (2.13), (2.14) на скважинах при $P_{mj}=1$ и условию (2.15) при $P_{mj}=0$. Необходимо найти динамику дебита на скважинах, на которых задано забойное давление (2.13) и динамику забойного давления на скважинах с заданным дебитом (2.14), а также динамику дебитов по скважинам с каждого из пластов.

Рассмотрение задач 1 и 2 в описанной выше поставке имеет высокую практическую значимость, так как уровень сложности данных моделей соответствует уровню неопределенности в исходных данных при планировании и анализе разработки нефтяных месторождений. Данным обстоятельством также объясняется факт перехода от трехмерных полей проницаемости и пористости к эффективным двумерным. Способ представления трехмерной фильтрации в многопластовой системе через сопряжение соответствующих двумерных задач, таким образом, является оптимальным с точки зрения простоты и малого времени моделирования с одной стороны и учета неоднородности с другой. Построение моделей фильтрации в описанной постановке позволяет решить проблему поиска оптимальных параметров разработки многопластовых месторождений.

2.1.3. Единственность решения задачи о поле давления в неоднородной многоскважинной многопластовой системе

Покажем единственность решения **задачи 1**. Предположим, что это не так. Пусть функции $\left\{p_1^m\right\}_{m=1}^M$ и $\left\{p_2^m\right\}_{m=1}^M$ являются решениями уравнений (2.10) с начальным условием (2.12) и граничными условиями (2.13), (2.14) и (2.11). Рассмотрим множество функции $\left\{p'^m\right\}_{m=1}^M$, где $p'^m = p_2^m - p_1^m$. Так как уравнение (2.10) является линейным, то функция p'^m - также является его решением. При этом, так как p_2^m и p_1^m удовлетворяют одним и тем же начальным и граничным условиям, то $\left\{p'^m\right\}_{m=1}^M$ удовлетворяет уже однородным начальным и граничным условиям:

$$
\begin{aligned}
& p'^m\Big|_{t=0} = 0 \\
& p'^m\Big|_{\Gamma^p_{\Omega_i^m}} = 0,\ i = 1,..,K_p^m \\
& \frac{\partial p'^m}{\partial n}\bigg|_{\Gamma^q_{\Omega_j^m}} = 0,\ j = 1,..,K_q^m \\
& p'^m\Big|_{\Gamma^p_{w_i^m}} = 0,\ \ i = 1,..,N_p, P_{mi} = 1 \\
& \sum_{m=1}^{M} P_{mj}\lambda_0^m \oint\limits_{\Gamma^q_{w_j^m}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p'^m}{\partial n^m} \cdot dl = 0,\ j = N_p+1,..,N_p+N_q, P_{mj} = 1 \\
& p'^m\Big|_{\Gamma^q_{w_j^m}} = p^m_{2w\_j} - p^m_{1w\_j} = p'^m_{w\_j}(t),\ j = N_p+1,..,N_p+N_q, P_{mj} = 1 \\
& \frac{\partial p'^m}{\partial n^m}\bigg|_{\Gamma^p_{w_i^m}} = 0, i = 1,..,N_p, P_{mi} = 0 \\
& \frac{\partial p'^m}{\partial n^m}\bigg|_{\Gamma^q_{w_j^m}} = 0,\ j = N_p+1,..,N_p+N_q, P_{mj} = 0
\end{aligned}
\qquad (2.16)
$$

,

где $p^m_{1w\_j} = p^m_{1w\_j}(t)$ и $p^m_{2w\_j} = p^m_{2w\_j}(t)$ - давления на границе *j*-ой скважины на *m*-ом пласте для решений $\left\{p_1^m\right\}_{m=1}^M$ и $\left\{p_2^m\right\}_{m=1}^M$ соответственно, скважины пронумерованы таким образом, что сначала идут скважины с заданным забойным давлением, а затем скважины с заданным дебитом.

Так как $p^m_{1w\_j} = p^1_{1w\_j} + \Delta^m$, $p^m_{2w\_j} = p^1_{2w\_j} + \Delta^m$, то очевидно, что:

$$p'^m\Big|_{\Gamma^q_{w^m_j}} = p^m_{2w\_j} - p^m_{1w\_j} = p^1_{2w\_j} - p^1_{1w\_j} = p'_{w\_j}(t),\ j = 1,..,N_q, \forall m : P_{mj} = 1, \qquad (2.17)$$

то есть множество функций $\left\{p'^m\right\}_{m=1}^M$ имеет на границе данной скважины одни и те же давления на разные пласты, равные $p^1_{2w\_j} - p^1_{1w\_j}$ при $P_{mj} = 1$.

Для начала докажем, что при таких условиях $p^m_{1w\_j} = p^m_{2w\_j},\ \forall j = 1,..,N_q$. Докажем, что это так, если в системе имеется всего одна скважина с заданным дебитом, то есть с условием (2.14). Допустим это не так и существует отрезок времени когда $p^m_{1w\_j} \neq p^m_{2w\_j}$, пусть для определенности в этот период $p^1_{2w\_j} > p^1_{1w\_j}$. Тогда для функции p'^m справедливо:

$$\begin{aligned}
&p'^m\Big|_{t=0} = 0\\
&p'^m\Big|_{\Gamma^p_{\Omega^m_i}} = 0,\ i = 1,..,K^m_p\\
&\left.\frac{\partial p'^m}{\partial n}\right|_{\Gamma^q_{\Omega^m_j}} = 0,\ j = 1,..,K^m_q\\
&p'^m\Big|_{\Gamma^p_{w^m_i}} = 0,\ i = 1,..,N_p, P_{mi} = 1\\
&\sum_{m=1}^M P_{mj}\lambda^m_0 \oint_{\Gamma^q_{w^m_j}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p'^m}{\partial n^m} \cdot dl = 0,\ j = N_p + 1, P_{mj} = 1\\
&p'^m\Big|_{\Gamma^q_{w^m_j}} = p^1_{2w_j} - p^1_{1w_j} = p'^1_{w_j}(t),\ j = N_p + 1, P_{mj} = 1\\
&\left.\frac{\partial p'^m}{\partial n^m}\right|_{\Gamma^p_{w^m_i}} = 0, i = 1,..,N_p, P_{mi} = 0\\
&\left.\frac{\partial p'^m}{\partial n^m}\right|_{\Gamma^q_{w^m_j}} = 0,\ j = N_p + 1, P_{mj} = 0
\end{aligned} \qquad (2.18)$$

Как предполагалось выше, существует период времени, когда $p'^1_{w\_j} > 0$. В таком случае по принципу максимума [16], максимум функций $\left\{p'^m\right\}_{m=1}^M$ для $P_{mj} = 1$ достижим на границе $\Gamma^q_{w^m_j}$ данной скважины. Отсюда следует, что на данной скважине $\left.\frac{\partial p'^m}{\partial n^m}\right|_{\Gamma^q_{w^m_j}} > 0$, при $P_{mj} = 1$. А, следовательно, и $\sum_{m=1}^M P_{mj}\lambda^m_0 \oint_{\Gamma^q_{w^m_j}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p'^m}{\partial n^m} \cdot dl > 0$ при $j = N_p + 1,\ P_{mj} = 1$. Однако, это противоречит граничному условию на рассматриваемой скважине с заданным дебитом (2.18). Следовательно, при $P_{mj} = 1$ забойные давления на $p^m_{2w\_j} = p^m_{1w\_j}$ и, следовательно, $p'^m\Big|_{\Gamma^q_{w^m_i}} = 0$, при $j = N_p + 1,\ P_{mj} = 1$.

Докажем, что $p'^m\big|_{\Gamma^q_{w_l^m}}=0$ при $P_{mj}=0$. Это доказывается аналогично. Предположим, что это не так, то максимум или минимум должен достигаться на границе $\Gamma^q_{w_j^m}$, $P_{mj}=0$, но по принципу максимума/минимума [16], из этого следует, что $\left.\dfrac{\partial p'^m}{\partial n^m}\right|_{\Gamma^q_{w_l^m}}\neq 0$. Это противоречит условию. Также доказывается равенство нулю давления по границе $\Gamma^p_{w_i^m}$ при $i=1,..,N_p$, $P_{mi}=0$.

Итак, мы доказали, что давления на скважине с заданным дебитом определяются однозначно. Также мы показали, что давления на границе скважин при $P_{mi}=0$ также определены однозначно.

Покажем, что давления на скважинах с заданным дебитом определяются однозначно в случае, когда таких скважин несколько, а не одна. Пусть имеем N_q скважин с заданным дебитом. Задача для функций $\left\{p'^m\right\}_{m=1}^{M}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&p'^m\big|_{t=0}=0\\
&p'^m\big|_{\Gamma^p_{\Omega_i^m}}=0,\ i=1,..,K_p^m\\
&\left.\frac{\partial p'^m}{\partial n}\right|_{\Gamma^q_{\Omega_j^m}}=0,\ j=1,..,K_q^m\\
&p'^m\big|_{\Gamma^p_{w_i^m}}=0,\ \ i=1,..,N_p,P_{mi}=1\\
&\sum_{m=1}^{M}P_{mj}\lambda_0^m\oint_{\Gamma^q_{w_j^m}}k^m h^m\cdot\frac{\partial p'^m}{\partial n^m}\cdot dl=0,\ j=N_p+1,..,N_p+N_q,P_{mj}=1\\
&p'^m\big|_{\Gamma^q_{w_j^m}}=p^m_{2w_j}-p^m_{1w_j}=p'^m_{w_j}(t),\ j=N_p+1,..,N_p+N_q,P_{mj}=1\\
&p'^m\big|_{\Gamma^p_{w_i^m}}=0,i=1,..,N_p,P_{mi}=0\\
&p'^m\big|_{\Gamma^q_{w_j^m}}=0,\ j=N_p+1,..,N_p+N_q,P_{mj}=0
\end{aligned}\tag{2.19}$$

.

Допустим, что существует промежуток времени, на котором $\exists l: p'^m_{wl}=\max\left\{p'^m_{wj}\right\}_{j=1}^{N_q},\forall m: P_{mj}=1$. В таком случае по принципу максимума условие равенства дебита нулю на данной скважине не выполняется: $\sum_{m=1}^{M}P_{ml}\lambda_0^m\oint_{\Gamma^q_{w_l^m}}k^m h^m\cdot\frac{\partial p'^m}{\partial n^m}\cdot dl=0$, так как каждое слагаемое в сумме больше нуля: $\lambda_0^m\oint_{\Gamma^q_{w_l^m}}k^m h^m\cdot\frac{\partial p'^m}{\partial n^m}\cdot dl>0$ при $P_{mj}=1$. Отсюда следует, что для функций $\left\{p'^m\right\}_{m=1}^M$ давления на границе скважин с заданным дебитом равны между собой для любого пласта для любой скважины. Если предположить, что они при этом отличны от нуля, то наряду с условиями (2.19) и принципом максимума, получим, что дебиты на данных скважинах не равны нулю, что является противоречием исходному условию задачи.

Таким образом для функций $\left\{p'^m\right\}_{m=1}^M$ получаем следующие условия:

$$\begin{aligned}
&p'^m\Big|_{t=0} = 0\\
&p'^m\Big|_{\Gamma^p_{\Omega_i^m}} = 0,\ i = 1,..,K_p^m\\
&\frac{\partial p'^m}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma^q_{\Omega_j^m}} = 0,\ j = 1,..,K_q^m\\
&p'^m\Big|_{\Gamma^p_{w_i^m}} = 0,\ i = 1,..,N_p, P_{mi} = 1 \qquad ,\\
&p'^m\Big|_{\Gamma^q_{w_j^m}} = 0,\ j = N_p+1,..,N_p+N_q, P_{mj} = 1\\
&p'^m\Big|_{\Gamma^p_{w_i^m}} = 0, i = 1,..,N_p, P_{mi} = 0\\
&p'^m\Big|_{\Gamma^q_{w_j^m}} = 0,\ j = N_p+1,..,N_p+N_q, P_{mj} = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

из которых следует, что данные функции тождественно равны нулю для любого пласта: $p'^m \equiv 0, \forall m = 1,..,M$. Отсюда следует, что $p_1^m = p_2^m\ \forall m = 1,..,M$. Таким образом, если решение **задачи 1** существует, то оно единственно.

2.1.4. Аналитическое решение задачи о поле давления в многоскважинной многопластовой системе

Постановка задачи

Построим упрощенную аналитическую модель фильтрации в многоскважинной многопластовой системе, основываясь на поставленной выше задаче. Данная модель может служить вспомогательным инструментом в задачах оптимизации заводнения, ее также можно использовать в качестве регуляризирующего решения в обратных задачах [65].

Рассмотрим элемент симметрии с *N M*-пластовыми скважинами (см.рис. 2.2).

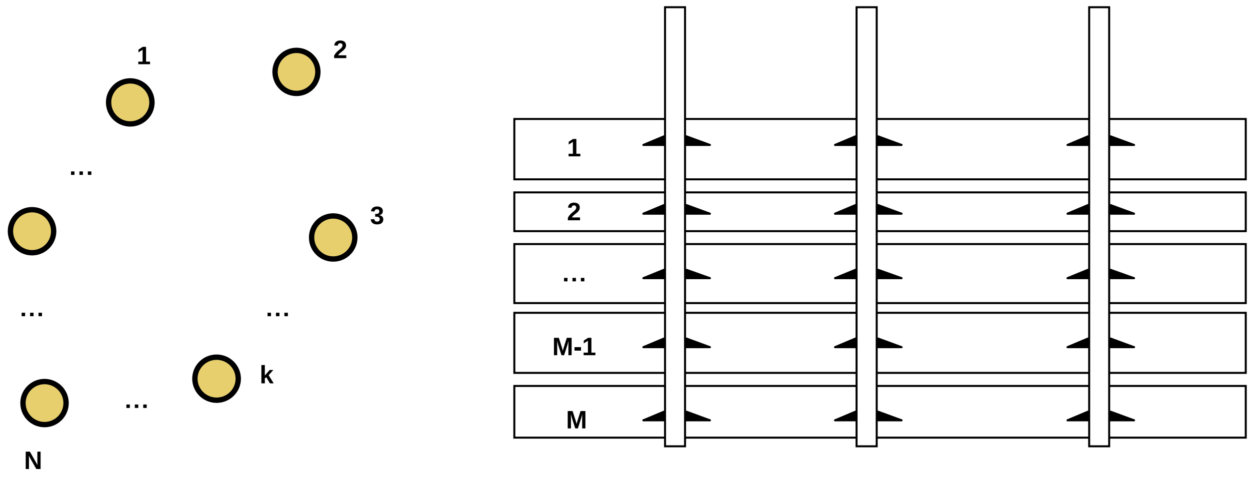


рис. 2.2. Элемент симметрии системы разработки *M*-пластового месторождения с *N*-скважинами

Каждой из скважин припишем свою область дренирования. Так как моделируемая система является регулярной, то предполагается, что каждая из зон связана между собой граничными условиями вида:

$$\begin{cases} p_i^m(\vec{r},t)\big|_{\Gamma_i^m} = p_j^m(\vec{r},t)\big|_{\Gamma_j^m} \\ \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{k_i^m h_i^m}{\mu_i^m} \frac{\partial p_i^m}{\partial n_i^m}\bigg|_{\Gamma_i^m} \right](\vec{r},t) = 0 \end{cases}. \tag{2.21}$$

Первое из уравнений (2.21) показывает основное предположение предлагаемой модели: давление на границе всех областей дренирования одинаково, оно принимается в качестве пластового давления. Второе из уравнений (2.21) отражает отсутствие дополнительных источников массы в пределах рассматриваемого элемента симметрии системы разработки.

Фильтрация в каждом из пластов описывается с помощью уравнения (2.10). Задача двумерной фильтрации в регулярной системе заводнения сводится, таким образом, к сопряжению решения задач в каждой из областей дренирования элемента симметрии (например, для пятиточечной системы разработки это сопряжение фильтрации в зоне закачки и в зоне отбора). Решение в каждой из областей дренирования может быть получено методом возмущения формы границы, что позволяет снизить размерность задачи и перейти от двумерной к сопряжению решений нескольких одномерных задач [12], [47].

Проинтегрировать данные уравнения аналитически в общем случае не представляется возможным, поэтому необходимо ввести дополнительные упрощения. Будем предполагать, что в пределах каждой из зон проницаемость и мощность являются постоянными. Переход от исходных полей проницаемости и мощности осуществляется по очевидной формуле:

$$\bar{\beta}_i^m = \frac{1}{S_i^m} \int_{S_i^m} \beta^m(x,y)\, dS^m, \tag{2.22}$$

где под β^m принимается поле проницаемости, мощности в m-ом пласте, S_i^m - площадь i-ой зоны дренирования в m-ом пласте.

Дополнительно упростим задачу и аппроксимируем области дренирования кругами с соответствующими площадями, фильтрацию будем предполагать плоскорадиальной. Задача моделирования фильтрации в многоскважинной многопластовой системе от двумерной фильтрации сведется к сопряжению ряда одномерных (осесимметричных) задач. Геометрия потока учитывается при нормировке с помощью решения сопряженной задачи установившейся фильтрации: данные решения для самых распространенных случаев доступны в [114], [119], [120], [135]. Расчет эффективной вязкости в каждой зоне для учета двухфазности течения описан в [67], [119], [120] что позволяет также учитывать двухфазность течения в эффективных параметрах для каждой из зон. Неоднородность учитывается через задание эффективной проницаемости в каждой зоне.

Ниже приведено аналитическое решение поставленной задачи с учетом отмеченных упрощений.

Начальные условия в каждой из зон задаются следующей матрицей:

$$\hat{P}_0 = \begin{pmatrix} p_{0(11)} & \cdots & p_{0(1N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{0(M1)} & \cdots & p_{0(MN)} \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

где $p_{0(i,j)}$ - начальное пластовое давление i-го пласта в j-ой скважины: $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$.

В общем случае в элементе симметрии присутствуют как скважины, работающие с постоянным давлением, так и с постоянным дебитом. Пусть в данном элементе симметрии K скважин работают с условием постоянного давления, а $(N-K)$ скважин работают с условием постоянного дебита. Пронумеруем скважины элемента симметрии так, чтобы скважины с номерами $j = \overline{1, K}$ - были скважинами с условием поддержания постоянного забойного давления, а с номерами $j = \overline{(K+1), N}$ - скважинами с условием поддержания дебита.

Граничные условия на j-ой скважине задаются следующим вектором:

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} p_{wf1} \\ \cdots \\ p_{wfK} \\ q_{sK+1} \\ \cdots \\ q_{sN} \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Другие параметры системы задаются следующими матрицами:

$$\hat{r}_e = \begin{pmatrix} r_{e11} & \dots & r_{e1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{eM1} & \dots & r_{eMN} \end{pmatrix},\ \hat{r}_w = \begin{pmatrix} r_{w11} & \dots & r_{w1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{wM1} & \dots & r_{wMN} \end{pmatrix},\ \hat{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & \dots & R_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{M1} & \dots & R_{MN} \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

где r_{eij} - радиус зоны *j*-ой скважины *i*-го пласта, r_{wij} - радиус *j*-ой скважины на уровне *i*-го пласта (для учета разных скин-факторов), R_{ij} - совокупность параметров зоны *j*-ой скважины *i*-го пласта.

Граничные условия для зоны *j*-ой скважины *i*-го пласта выглядят следующим образом (здесь осуществлен переход от функции давления к функции перепада давления – отклонения давления от начального):

$$\begin{cases} \Delta p_{ij}(r,t)\big|_{r=r_{w(ij)}} = p_{wf(ij)} - p_{0(ij)},\ j=\overline{1,K} \\ \left.\dfrac{\partial \Delta p_{ij}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_{w(ij)}} = \dfrac{\mu_{ij} q_{s(ij)} B_o}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{w(ij)}},\ j=\overline{(K+1),N} \end{cases}. \tag{2.26}$$

$$\left.\frac{\partial \Delta p_{ij}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_{e(ij)}} = \frac{\mu_{ij} q_{Z(ij)}}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{e(ij)}}\ \ j=\overline{1,N}\ ,\ i=\overline{1,M}\ . \tag{2.27}$$

Запишем уравнение пьезопроводности для *i*-го пласта *j*-ой скважины с граничными и начальными условиями (уравнение записано относительно изменения давления):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\kappa_{ij}} \dfrac{\partial \Delta p_{ij}(r,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \Delta p_{ij}(r,t)}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 \Delta p_{ij}(r,t)}{\partial^2 r} \\ \Delta p_{ij}(r,t)\big|_{t=0} = 0 \\ \begin{cases} \Delta p_{ij}(r,t)\big|_{r=r_{w(ij)}} = p_{wf(ij)} - p_{0(ij)},\ j=\overline{1,K} \\ \left.\dfrac{\partial \Delta p_{ij}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_{w(ij)}} = \dfrac{\mu_{ij} q_{s(ij)} B_o}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{w(ij)}},\ j=\overline{(K+1),N} \end{cases} \\ \left.\dfrac{\partial \Delta p_{ij}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_{e(ij)}} = \dfrac{\mu_{ij} q_{Z(ij)}}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{e(ij)}} \end{cases}. \tag{2.28}$$

Запишем также общие граничные условия на *j*-ой скважины:

$$\begin{cases} \begin{cases} \Delta p_{1j}(r,t)\big|_{r=r_{w(1j)}} = p_{wf(1j)} - p_{0(1j)} \\ \Delta p_{1j}(r,t)\big|_{r=r_{w(1j)}} + p_{0(1j)} = \dots = \Delta p_{Mj}(r,t)\big|_{r=r_{w(M,j)}} + p_{0(Mj)} \end{cases},\ j=\overline{1,K} \\ \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{M} q_{s(ij)} = q_{sj} \\ \Delta p_{1j}(r,t)\big|_{r=r_{w(1j)}} + p_{0(1j)} = \dots = \Delta p_{Mj}(r,t)\big|_{r=r_{w(M,j)}} + p_{0(Mj)} \end{cases},\ j=\overline{(K+1),N} \end{cases}. \tag{2.29}$$

Для случая скважин с постоянным давлением – эти условия заключаются в равенстве забойных давлений для разных пластов (к случаю необходимости учета различных забойных давлений вследствие различных глубин залегания пластов можно перейти простой заменой переменных). Для случая скважин с постоянным дебитом, условия заключаются в задании постоянного общего дебита с пластов и задании условий равных (но неизвестных и зависящих от времени) забойных давлений для разных пластов.

Запишем общие граничные условия для разных зон дренирования для *i*-го пласта (2.21) для случая плоскорадиальной фильтрации:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} q_{Z(ij)} = 0 \\ \Delta p_{1j}(r,t)\big|_{r=r_{e(1j)}} + p_{0(\ )} = \ldots = \Delta p_{Nj}(r,t)\big|_{r=r_{e(N,j)}} + p_{0N} \end{cases}. \tag{2.30}$$

Решение в пространстве Лапласа

В пространстве Лапласа уравнения (2.28), (2.29), (2.30) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{s}{\kappa_{ij}}\Delta\tilde{p}_{ij} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Delta\tilde{p}_{ij}}{\partial r} + \frac{\partial^2\Delta\tilde{p}_{ij}}{\partial^2 r} \\ \begin{cases} \Delta\tilde{p}_{ij}\big|_{r=r_{w(ij)}} = \frac{p_{wf(ij)} - p_{0(ij)}}{s}, \ j=\overline{1,K} \\ \left.\frac{\partial\Delta\tilde{p}_{ij}}{\partial t}\right|_{r=r_{w(ij)}} = \frac{\mu_{ij}\tilde{q}_{s(ij)}B_o}{2\pi k_{ij}h_{ij}r_{w(ij)}}, \ j=\overline{(K+1),N} \end{cases} \\ \left.\frac{\partial\Delta\tilde{p}_{ij}}{\partial t}\right|_{r=r_{e(ij)}} = \frac{\mu_{ij}\tilde{q}_{Z(ij)}}{2\pi k_{ij}h_{ij}r_{e(ij)}} \end{cases}, \tag{2.31}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \Delta p_{1j}\big|_{r=r_{w(1j)}} = \frac{p_{wf(ij)} - p_{0(ij)}}{s} \\ \Delta\tilde{p}_{1j}\big|_{r=r_{w(1j)}} + \frac{p_{01}}{s} = \ldots = \Delta\tilde{p}_{Nj}\big|_{r=r_{w(N,j)}} + \frac{p_{0N}}{s} \end{cases}, \ j=\overline{1,K} \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^{M}\tilde{q}_{s(ij)} = \frac{q_{sj}}{s} \\ \Delta\tilde{p}_{1j}\big|_{r=r_{w(1j)}} + \frac{p_{01}}{s} = \ldots = \Delta\tilde{p}_{Nj}\big|_{r=r_{w(N,j)}} + \frac{p_{0N}}{s} \end{cases}, \ j=\overline{(K+1),N} \end{cases}, \tag{2.32}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N}\tilde{q}_{Z(ij)} = 0 \\ \Delta\tilde{p}_{1j}\big|_{r=r_{e(1j)}} + \frac{p_{01}}{s} = \ldots = \Delta\tilde{p}_{Nj}\big|_{r=r_{e(N,j)}} + \frac{p_{0N}}{s} \end{cases}. \tag{2.33}$$

Решением уравнения (2.31) является:

$$\Delta\tilde{p}_{ij}(r,s) = C_1^{ij} I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa_{ij}}}r\right) + C_2^{ij} K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa_{ij}}}r\right), \tag{2.34}$$

где для $j=\overline{1,K}$

$$C_1^{ij} = A_1^{ij} q_{Z(ij)} + B_1^{ij}, \ C_2^{ij} = A_2^{ij} q_{Z(ij)} + B_2^{ij}, \tag{2.35}$$

где введены следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
A_1^{ij} &= \sqrt{\frac{\kappa_{ij}}{s}} \frac{\mu_{ij} K_0\left(x_{w(ij)}\right)}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{e(ij)} \left(I_0\left(x_{w(ij)}\right) K_1\left(x_{e(ij)}\right) + I_1\left(x_{w(ij)}\right) K_0\left(x_{w(ij)}\right)\right)}, \\
B_1^{ij} &= \frac{\left(p_{wf(ij)} - p_{0(ij)}\right)}{s} \frac{K_1\left(x_{e(ij)}\right)}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{e(ij)} \left(I_0\left(x_{w(ij)}\right) K_1\left(x_{e(ij)}\right) + I_1\left(x_{w(ij)}\right) K_0\left(x_{w(ij)}\right)\right)}, \\
A_1^{ij} &= -\sqrt{\frac{\kappa_{ij}}{s}} \frac{\mu_{ij} I_0\left(x_{w(ij)}\right)}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{e(ij)} \left(I_0\left(x_{w(ij)}\right) K_1\left(x_{e(ij)}\right) + I_1\left(x_{w(ij)}\right) K_0\left(x_{w(ij)}\right)\right)}, \\
B_1^{ij} &= \frac{\left(p_{wf(ij)} - p_{0(ij)}\right)}{s} \frac{I_1\left(x_{e(ij)}\right)}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{e(ij)} \left(I_0\left(x_{w(ij)}\right) K_1\left(x_{e(ij)}\right) + I_1\left(x_{w(ij)}\right) K_0\left(x_{w(ij)}\right)\right)}.
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Для скважин, работающих с постоянным дебитом, то есть для $j = \overline{(K+1), N}$, имеем:

$$
C_1^{ij} = A_1^{ij} q_{Z(ij)} + D_1^{ij} q_{s(ij)}, \; C_2^{ij} = A_2^{ij} q_{Z(ij)} + D_2^{ij} q_{s(ij)}, \tag{2.37}
$$

где введены следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
A_1^{ij} &= \sqrt{\frac{\kappa_{ij}}{s}} \frac{\mu_{ij} K_1\left(x_{w(ij)}\right)}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{e(ij)} \left(I_1\left(x_{e(ij)}\right) K_1\left(x_{w(ij)}\right) - I_1\left(x_{w(ij)}\right) K_1\left(x_{e(ij)}\right)\right)}, \\
D_1^{ij} &= -\sqrt{\frac{\kappa_{ij}}{s}} \frac{\mu_{ij} B_o K_1\left(x_{e(ij)}\right)}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{w(ij)} \left(I_1\left(x_{e(ij)}\right) K_1\left(x_{w(ij)}\right) - I_1\left(x_{w(ij)}\right) K_1\left(x_{e(ij)}\right)\right)}, \\
A_2^{ij} &= \sqrt{\frac{\kappa_{ij}}{s}} \frac{\mu_{ij} I_1\left(x_{w(ij)}\right)}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{e(ij)} \left(I_1\left(x_{e(ij)}\right) K_1\left(x_{w(ij)}\right) - I_1\left(x_{w(ij)}\right) K_1\left(x_{e(ij)}\right)\right)}, \\
D_2^{ij} &= -\sqrt{\frac{\kappa_{ij}}{s}} \frac{\mu_{ij} B_o I_1\left(x_{e(ij)}\right)}{2\pi k_{ij} h_{ij} r_{w(ij)} \left(I_1\left(x_{e(ij)}\right) K_1\left(x_{w(ij)}\right) - I_1\left(x_{w(ij)}\right) K_1\left(x_{e(ij)}\right)\right)}.
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

где $x_{w(ij)} = z_{ij} r_{w(ij)}$, $x_{e(ij)} = z_{ij} r_{e(ij)}$, $z_{ij} = \sqrt{\frac{s}{\kappa_{ij}}}$.

Для скважин $j = \overline{1, K}$ - необходимо вычислить матрицу неизвестных

$$
\hat{q}_{Z(ij)} = \begin{pmatrix} q_{Z(11)} & \cdots & q_{Z(1N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{Z(M1)} & \cdots & q_{Z(MN)} \end{pmatrix}. \tag{2.39}
$$

Для скважин $j = \overline{(K+1), N}$ необходимо вычислить еще и матрицу неизвестных:

$$\hat{q}_{s(ij)} = \begin{pmatrix} q_{s(1,K+1)} & \cdots & q_{s(1,N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{s(M,K+1)} & \cdots & q_{s(MN)} \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Неизвестные (2.39), (2.40) находятся из систем уравнений. Число неизвестных для скважин $j = \overline{1, K}$ меньше, потому что в этом случае условия постоянства забойного давления являются независимыми от работы других пластов.

В (2.39) имеется $(N \cdot M)$ неизвестных, а в (2.40) - $(N-K)\cdot M$. Эти неизвестные можно найти из общих граничных условий. Запишем вектор неизвестных:

$$\vec{X} = \left(\tilde{q}_{Z(1,1)}, \tilde{q}_{Z(2,1)}, ..., \tilde{q}_{Z(M,1)}, ..., \tilde{q}_{Z(1,N)}, ..., \tilde{q}_{Z(M,N)}, \tilde{q}_{s(1,K+1)}, ..., \tilde{q}_{s(M,K+1)}, ..., \tilde{q}_{s(1,N)}, ..., \tilde{q}_{s(M,N)}\right)^T. \tag{2.41}$$

Вектор имеет размерность $\left((N \cdot M) + (N-K)\cdot M\right)$.

Запишем давление *i*-го пласта *j*-ой скважины:

$$\Delta\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} A^{ij}\tilde{q}_{Z(ij)} + B^{ij}, \ j = 1,..,K \\ A^{ij}\tilde{q}_{Z(ij)} + D^{ij}\tilde{q}_{s(ij)}, \ \ j = K+1,..,N \end{cases}. \tag{2.42}$$

где введены следующие обозначения:

$$A^{ij} = A_1^{ij} I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa_{ij}}} r\right) + A_2^{ij} K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa_{ij}}} r\right),$$

$$B^{ij} = B_1^{ij} I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa_{ij}}} r\right) + B_2^{ij} K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa_{ij}}} r\right), \tag{2.43}$$

$$D^{ij} = D_1^{ij} I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa_{ij}}} r\right) + D_2^{ij} K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa_{ij}}} r\right).$$

Для определения вектора неизвестных запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1. \ \Delta p_{i,j}\left(x_{e(i,j)}\right) + \dfrac{p_{0(i,j)}}{s} - \Delta p_{i,j+1}\left(x_{e(i,j+1)}\right) - \dfrac{p_{0(i,j+1)}}{s} = 0, \ i = \overline{1,M}, \ j = \overline{1,N} \\ 2. \ \tilde{q}_{Z(i,1)} + \tilde{q}_{Z(i,2)} + ... + \tilde{q}_{Z(i,N)} = 0, i = \overline{1,M} \\ 3. \ \Delta p_{i,j}\left(x_{w(i,j)}\right) + \dfrac{p_{0(i,j)}}{s} - \Delta p_{i,j+1}\left(x_{w(i,j+1)}\right) - \dfrac{p_{0(i,j+1)}}{s} = 0, \ i = \overline{1,M}, \ j = \overline{(K+1),N} \\ 4. \ \tilde{q}_{s(1,j)} + \tilde{q}_{s(2,j)} + ... + \tilde{q}_{Z(M,j)} = \dfrac{q_{sj}}{s}, \ j = \overline{(K+1),N} \end{cases}. \tag{2.44}$$

Первое семейство уравнений отвечает за непрерывность давления на границах зон дренирования (2.33) количество уравнений 1-го типа - $(N-1)\cdot M$, уравнения второго типа выражают собой закон сохранения вещества при перетоке из одной зоны в другую (2.33), количество уравнений этого типа - M. Уравнения 3, выражают собой увязку забойных давлений для скважин с условием постоянного дебита, количество этих уравнений $(N-K)(M-1)$. Уравнения типа 4 выражают собой также закон сохранения вещества и гласят, что сумма дебитов с пластов – есть дебит скважины, количество уравнений этого типа - $\left(N-K\right)$.

Итак, количество уравнений – равно количеству неизвестных, поэтому система (2.44) имеет решение, притом единственное [11]. С учетом замены (2.42) перейдем в (2.44) к $\tilde{q}_{Z(i,j)}$ и $\tilde{q}_{s(i,j)}$ и по правилам решения системы линейных уравнений вычислим вектор неизвестных параметров $\vec{X}$, найдя обратную матрицу системы уравнений (2.44).

После чего по формулам (2.34) - (2.38) и (2.42), (2.43) найдем решение для распределения давления в такой системе. В обычные координаты перейдем с помощью численного алгоритма [146].

2.2. Стационарное поле давления в неоднородной многопластовой многоскважинной системе

2.2.1. Постановка задачи

Целью данного параграфа является изучение решения задачи фильтрации в поставленной в предыдущем параграфе постановке на больших временах. Поэтому здесь рассматривается структура решения задачи фильтрации в многопластовой многоскважинной системе в предположении стационарной фильтрации. Таким образом распределение давления в каждом из M пластов описывается следующим уравнением:

$$\nabla\left(\tilde{k}^m\cdot h^m\cdot\nabla p^m\right)=0,\ m=1,..,M. \tag{2.45}$$

На внешних границах пластов задаются условия:

$$\begin{aligned} &p^m\left(x,y\right)\Big|_{\Gamma^p_{\Omega^m_i}}=p_{\Omega^m_i}\left(x,y\right), i=1,..,K^m_p \\ &\left.\frac{\partial p^m\left(x,y\right)}{\partial n^m}\right|_{\Gamma^q_{\Omega^m_j}}=C\cdot u_{\Omega^m_j}\left(x,y\right),\ j=1,..,K^m_q \end{aligned}, \tag{2.46}$$

где $\Gamma^p_{\Omega^m_i}$ и $\Gamma^q_{\Omega^m_j}$ - участки границы с соответственно заданным давлением и скоростью фильтрации для m-го пласта Ω^m.

На скважинах задаются условия постоянного дебита со всех пластов, если $P_{mj}=1$:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{M}\lambda^m_0\oint_{\Gamma_{w^m_j}}k^m h^m\cdot\frac{\partial p^m}{\partial n^m}\cdot dl=q_{wj},\ j=1,..,N \\ &p^m\left(x,y\right)\Big|_{\Gamma_{w^m_j}}=p^1_{w\_j}+\Delta^m_j,\ j=1,..,N \end{aligned}. \tag{2.47}$$

Давления $p^1_{w\_j}$ неизвестны.

Для случая когда $P_{mj}=0$, имеем:

$$\left.\frac{\partial p^m(x,y)}{\partial n^m}\right|_{\Gamma_{w_j^m}} = 0. \tag{2.48}$$

Поставим следующие задачи.

Задача 3

Необходимо найти M дважды непрерывно дифференцируемых по координатам в $\{\Omega^m\}_{m=1}^M$ функций $\{p^m(x,y)\}_{m=1}^M$, каждая из которых удовлетворяет соответствующему для m-го пласта уравнению (2.45), граничным условиям (2.46) на естественной границе каждого из пластов. При этом функции $p^m(x,y)$ удовлетворяют общим граничным условиям (2.47) на скважинах при $P_{mj} = 1$ и условию (2.48) при $P_{mj} = 0$. Рассматриваемая многопластовая система характеризуется полями проницаемости и пористости: $\{\varphi^m(x,y)\}_{m=1}^M$, $\{k^m(x,y)\}_{m=1}^M$ на каждый пласт, пласты являются переменными по мощности $\{h^m(x,y)\}_{m=1}^M$.

Также поставим задачу, аналогичную **задаче 2** в стационарной постановке.

Задача 4

Пусть функции $\{p^m(x,y)\}_{m=1}^M$ являются непрерывно дифференцируемыми по времени и дважды непрерывно дифференцируемыми по координатам, удовлетворяют уравнениям (2.45) в областях фильтрации $\{\Omega^m\}_{m=1}^M$, граничным условиям на естественной границе пласта (2.46), а также общим граничным условиям (2.47) на скважинах при $P_{mj} = 1$ и условию (2.48) при $P_{mj} = 0$. Необходимо найти забойные давления и дебиты с каждого из пластов по скважинам.

2.2.2. Построение решения задачи о стационарном поле давления в неоднородной многопластовой системе

Представление функции давления для односкважинной системы

Рассмотрим **задачу 3** в специальной односкважинной постановке, когда на естественных границах пласта заданы однородные граничные условия. Для этого рассмотрим односкважинную *M*-пластовую систему – скважину, вскрывающую *M* пластов. Обозначим через q^m дебит данной скважины в m-м пласте. По аналогии с [32] можно показать, что справедливо следующее представление для поля давления в m-м пласте:

$$p^m(x,y) = q^m \cdot p^m_{(x,y)}(1), \tag{2.49}$$

где $p^m(x,y)$ - решение **задачи 3** в односкважинной постановке с однородными граничными условиями:

$$\begin{aligned} & p^m(x,y)\Big|_{\Gamma^p_{\Omega^m_i}} = 0, i = 1,..,K^m_p \\ & \left.\frac{\partial p^m(x,y)}{\partial n^m}\right|_{\Gamma^q_{\Omega^m_j}} = 0, \ j = 1,..,K^m_q \end{aligned} \quad (2.50)$$

Это следует из того, что здесь также как и в [32] рассматривается установившаяся фильтрация, однако в отличие от [32] дебиты на каждый пласт q^m неизвестны.

Таким образом, (2.49) отражает тот факт, что решение $p^m(x,y)$ можно представить в виде произведения дебита с данного пласта на множитель $p^m_{(x,y)}(1)$, не зависящий от величины дебита скважины (является функцией взаимного расположения скважины, границ пласта и полей, проницаемости, мощности).

Данное представление следует из линейности уравнения (2.45). Рассмотрим семейство решений в зависимости от дебита q^m: $p^m\left(x,y,q^m\right)$. А именно рассмотрим два решения: $p^m_1 = p^m\left(x,y,q^m\right)$ и $p^m_2 = p^m\left(x,y,\nu q^m\right)$ соответствующим дебитам на m-м пласте q^m и νq^m и удовлетворяющим однородным граничным условиям на естественных границах пласта. Рассмотрим функцию $p^m_0 = p^m_2 - \nu p^m_1$. Можно показать, что данная функция тождественно равна нулю. Действительно: на внешней границе давление равно нулю. Дебит на скважине равен так же нулю:

$$q^m_0 = \lambda^m_0 \oint_{\Gamma_{w^m}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p^m_0}{\partial n} \cdot dl = \lambda^m_0 \left(\oint_{\Gamma_{w^m}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p^m_2}{\partial n} \cdot dl - \nu \oint_{\Gamma_{w^m}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p^m_1}{\partial n} \cdot dl \right) = \nu q^m - \nu q^m = 0 .$$

Так как функция $p_0 \equiv 0$ удовлетворяет данному решению, а решение данной задачи является единственным, то $p_2 = \nu p_1$. Поэтому, $p^m\left(x,y,\nu q^m\right) = \nu p^m\left(x,y,q^m\right)$. Отсюда: $p^m\left(x,y,q^m\right) = q^m \cdot p^m\left(x,y,1\right)$.

Решение $p^m\left(x,y,1\right)$ по аналогии с [32] назовем базисным решением. $p^m\left(x,y,1\right) \equiv p^m_{(x,y)}(1)$ - есть решение **задачи 3** в предположении однородных условий на внешних по отношению к скважине границах и задании на данной скважине условия единичного дебита:

$$\begin{aligned} & \lambda^m_0 \oint_{\Gamma_{w^m}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p^m}{\partial n^m} \cdot dl = 1 \\ & p^m(x,y)\Big|_{\Gamma_{w^m}} = p^1_w + \Delta^m \end{aligned} . \quad (2.51)$$

Представление функции давления для многоскважинной системы

Обобщим предыдущий случай и рассмотрим структуру решения **задачи 3** на случай многоскважинной системы, состоящей из *N* скважин, и неоднородных граничных условий.

Покажем, что решение **задачи 3** для m-го пласта имеет вид:

$$p^m(x,y) = p_{res}^m(x,y) + \sum_{i=1}^{N} p_{(x,y)i}^m(1) \cdot q_i^m, \qquad (2.52)$$

где $p_{res}^m(x,y)$ - функция, удовлетворяющая уравнению (2.45) и граничным условиям (2.46) на естественной границе m-го пласта, а также условию нулевого дебита на скважинах на m-ом пласте:

$$\begin{aligned} &\lambda_0^m \oint_{\Gamma_{w_j^m}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p_{res}^m}{\partial n^m} \cdot dl = 0, \\ &p_{res}^m(x,y)\Big|_{\Gamma_{w_j^m}} = p_{w\_j}^1 + \Delta_j^m, \;\; j = 1,..,N \end{aligned} . \qquad (2.53)$$

Таким образом функция $p_{res}^m(x,y)$ представляет собой внешнее поле давления, не зависящее от производительности скважин и определяемое граничными условиями на естественной границе пласта.

Функции $p_{(x,y)i}^m(1)$ - также удовлетворяют уравнению (2.45) и определяются аналогично предыдущему пункту, таким образом, чтобы на естественной границе пласта были заданы однородные граничные условия, а на скважинах условия следующего типа:

$$\begin{aligned} &\lambda_0^m \oint_{\Gamma_{w_j^m}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p_{(x,y)i}^m(1)}{\partial n} = \delta_{ij} \\ &p^m(x,y)\Big|_{\Gamma_{w_j^m}} = p_{w\_j}^m, \; j = 1,..,N \end{aligned} , \qquad (2.54)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Представление (2.52) вытекает из принципа суперпозиции: уравнение (2.45) является линейным, поэтому, так как $p_{res}^m(x,y)$ и $p_{(x,y)i}^m(1)$ являются его решениями, то и их линейная комбинация также удовлетворяет исходному уравнению (2.45). По определению функций $p_{res}^m(x,y)$ и $p_{(x,y)i}^m(1)$ выполняются и граничные поставленной задачи для каждого из M пластов. Действительно, удовлетворение условий на естественной границе пласта следует из определения функции $p_{res}^m(x,y)$ и однородности граничных условий для $p_{(x,y)i}^m(1)$. Удовлетворение условий на скважинах также очевидно:

$$\lambda_0^m \oint_{\Gamma_{w_j^m}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p^m(x,y)}{\partial n} \cdot dl = \lambda_0^m \oint_{\Gamma_{w_j^m}} \left[k^m h^m \cdot \frac{\partial}{\partial n} p_{res}^m(x,y) \cdot dl \right] + \lambda_0^m \oint_{\Gamma_{w_j^m}} \left[k^m h^m \cdot \frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=1}^{N} p_{(x,y)i}^m(1) \cdot q_i^m \cdot dl \right].$$

Первое слагаемое равно нулю по определению функции $p_{res}^m(x,y)$ (2.53). Второе слагаемое по определению (2.54):

$$\lambda_0^m \oint\limits_{\Gamma_{w_j^m}} k^m h^m \cdot \frac{\partial p^m(x,y)}{\partial n} \cdot dl = q_i^m \delta_{ij}, \quad i, j = 1,..,N \,.$$

Представление (2.52) доказано.

Структура решения задачи о поле давления в многоскважинной многопластовой системе

Таким образом, структура решения задачи о поле давления в многоскважинной многопластовой системе имеет вид (2.52) для каждого из M пластов. Однако сами дебиты по скважинам на каждом из пластов q_j^m неизвестны, известны лишь суммарные дебиты по каждой из скважин q_j. Поэтому решения **задачи 3** и **задачи 4** взаимозависимы.

Введем следующие обозначения:

$$G_{ij}^m = p_{(x,y)i}^m (1)\Big|_{\Gamma_{w_j^m}} . \tag{2.55}$$

С учетом данных обозначений выразим забойные давления по скважинам в m-го пласте:

$$p_{wf\_i}^m \equiv p^m(x,y)\Big|_{\Gamma_{w_i^m}} = p_{res}^m(x,y)\Big|_{\Gamma_{w_j^m}} + \sum_{j=1}^{N} G_{ij}^m \cdot q_j^m . \tag{2.56}$$

Условия (2.47), связывающие между собой различные пласты многопластовой системы выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{m=1}^{M} q_j^m = q_j, \quad j = 1,..,N \\ p_{wf\_j}^m \equiv p_{wf\_j}^1 + \Delta_j^m, \quad m = 1,..,M \end{array} , \tag{2.57}$$

где $p_{wf\_j}^m$ - определяются по формуле (2.56).

Таким образом, в системе (2.56)-(2.57) содержится $N(M+1)$ неизвестных: по M неизвестных на каждой из N скважин – дебиты с каждого из пластов q_j^m, а также забойные давления на первый пласт $p_{wf\_j}^1 \equiv p_{wf\_j}$ многопластовой системы (Δ_j^m считаются известными).

Для определения забойных давлений и дебитов необходимо решить систему уравнений, отражающих условия (2.57):

$$\hat{L} \cdot \vec{x} = \vec{b}, \tag{2.58}$$

где $\vec{x}$- вектор неизвестных, имеющий размерность $N(M+1)$ и следующую структуру: $\vec{x} = \left(q_1^1,..,q_N^1, q_1^2,..,q_N^2,...,q_1^M,..,q_N^M, p_{wf\_1},..,p_{wf\_N}\right)^T$, вектор $\vec{b}$ - вектор, имеющий следующую структуру $\vec{b} = \left(p_{res\_1}^1 - \Delta_1^1,.., p_{res\_N}^1 - \Delta_N^1,..., p_{res\_1}^M - \Delta_1^M,.., p_{res\_N}^M - \Delta_N^M, q_{w1},.., q_{wN}\right)^T$, $p_{res\_i}^m \equiv p_{res}^m(x,y)\Big|_{\Gamma_{w_j^m}}$ - пластовое давление i-ой скважины на m-м пласте, q_{wi} - суммарный дебит i-ой скважины, матрица $\hat{L}$ имеет следующий вид:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\hat{G}^1 & 0 & ... & 0 & \hat{E}_N \\ 0 & -\hat{G}^2 & ... & 0 & \hat{E}_N \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -\hat{G}^m & \hat{E}_N \\ \hat{E}_N & \hat{E}_N & ... & \hat{E}_N & \hat{O}_N \end{pmatrix}, \tag{2.59}$$

где $\hat{E}_N$ - единичная матрица $N \times N$, $\hat{O}_N$ - матрица $N \times N$ из нулей, $\hat{G}^m$ - матрица, описывающая взаимовлияние скважин в m-м пласте, ее элементами являются: $G_{ij}^m = p_{(x,y)j}^m(1)\Big|_{\Gamma_{wi}^q}$.

Коэффициенты G_{ij}^m могут быть получены с использованием уже построенных и доступных в отечественной и зарубежной литературе моделей производительности скважин различного заканчивания в однопластовых залежах [108, 125, 137], либо оценены независимо. Величину $p_{res\_i}^m \equiv p_{res}^m(x,y)\Big|_{\Gamma_{wj}^m}$ - назовем пластовым давлением для данной скважины. Это есть значение давления на скважине, при условии равенства нулю дебита всех скважин. Оно может быть получено из дополнительных соображений – карт изобар, если имеет место мощный аквифер, то $p_{res\_i}^m$ можно оценить как давление в аквифере. Если i-ая скважина не работает на m-ый пласт - $P_{mj} = 0$, то соответствующая $(mN + i)$ строка и столбец матрицы $\hat{L}$ будут обнулены.

Оценка внешнего поля пластового давления

Решение задачи 3 и задачи 4 (2.58)-(2.59) не является самосогласованным вследствие отсутствия данных о пластовом давлении $p_{res\_i}^m$. Рассмотрим способы оценки данного поля.

Из формулы (2.56) следует, что дебиты скважин в m-ом пласте могут быть выражены в соответствии со следующей формулой:

$$\vec{q}^m = \hat{D}^m \cdot \vec{d}^m, \tag{2.60}$$

где $\vec{q}^m = \left(q_1^m,..,q_N^m\right)^T$ - вектор дебитов скважин на данный пласт, $\vec{d}^m = \left(d_1^m,..,d_N^m\right)^T$ - вектор депрессий по скважинам на данный пласт: $d_i^m = \left(p_{wf\_i}^1 + \Delta_i^m\right) - p_{res}^m$, матрица $\hat{D}^m$ - есть обратная к матрице $\hat{G}^m$:

$$\hat{D}^m = \left[\hat{G}^m\right]^{-1}. \tag{2.61}$$

Результат (2.60) для каждого пласта многопластовой системы аналогичен результату, полученному при рассмотрении однопластовой системы в [32]. Отличие заключается в том, что ни вектор депрессий $\vec{d}^m$, ни вектор дебитов $\vec{q}^m$ по скважинам для m-го пласта неизвестны. Для их нахождения необходимо решить систему уравнений (2.58).

Для многих практически важных случаев внешнее поле пластового давления может быть аппроксимировано одним значением. Как будет показано ниже, пластовое давление в замкнтутых системах может быть найдено в соответствие с формулой (2.133), из которой следует, что среднее пластовое давление в m-ом пласте на установившемся режиме выражается через забойные давления скважин следующим образом:

$$p_{res}^{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{m} \cdot \left(p_{wf\_j}^{1} + \Delta_{j}^{m}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{m}}. \qquad (2.62)$$

Таким образом, если подставить в систему (2.58) в качестве $p_{res\_i}^{m}$ выражения (2.62), то неизвестными останутся только забойные давления и дебиты с каждого из пластов, а сама задача их нахождения станет самосогласованной.

Практическая важность решения задачи в озвученной постановке заключается в определении эффективности разработки многопластовой залежи единой сеткой скважин, оценке эффективности выработки каждого из пластов, определении оптимальной плотности сетки скважин, соотношения числа нагнетательных и добывающих скважин и типа их заканчивания.

2.3. Производительность одиночной многопластовой скважины

В данном параграфе рассматривается производительность одиночной многопластовой скважины (скважины, вскрывающей несколько гидродинамически изолированных неоднородных пластов) на различных режимах.

2.3.1. Установившаяся фильтрация

Рассмотрим производительность скважины, вскрывающей M неоднородных гидродинамически изолированных пластов на установившемся режиме. Пусть известен общий дебит скважины $q = \sum_{j=1}^{M} q^{j}$, где q^{j} - дебит с j-го пласта. Из формул (2.58), (2.59) получим выражение для дебита с каждого из пластов:

$$q^{j} = \frac{D^{j}}{\sum_{m=1}^{M} D^{m}} \left(q + \sum_{m=1}^{M} D^{m} \left[p_{res}^{m} - p_{res}^{j} - \left(\Delta^{m} - \Delta^{j}\right) \right] \right). \qquad (2.63)$$

Из (2.63) видно, что поток с каждого пласта определяется двумя слагаемыми: составляющая общего дебита скважины и межпластовые перетоки (первое и второе слагаемые в скобках соответственно).

Забойное давление выражается следующим образом:

$$p_{wf}^{1} = \frac{q + \sum_{m=1}^{M} D^{m}\left(p_{res}^{m} - \Delta^{m}\right)}{\sum_{m=1}^{M} D^{m}}. \quad (2.64)$$

Таким образом, если пластовые давления p_{res}^{m} отличаются друг от друга на величину перепада гидростатического давления Δ^{m} так же как и забойные давления, то слагаемое, отвечающее за межпластовые перетоки нивелируется, а дебит скважины будет выражаться пропорционально коэффициентам продуктивности каждого из пластов:

$$q^{j} = \frac{q \cdot D^{j}}{\sum_{m=1}^{M} D^{m}}. \quad (2.65)$$

При этом забойное давление примет вид:

$$p_{wf}^{1} = \frac{q}{\sum_{m=1}^{M} D^{m}} + p_{res}^{1}, \quad (2.66)$$

где $\sum_{m=1}^{M} D^{m}$ - общий суммарный коэффициент продуктивности системы.

Описанная выше модель производительности многопластовой скважины подходит для описания ее работы только в случае высокой проницаемости коллектора, когда для оценки потенциала скважины можно пренебречь переходными процессами неустановившейся фильтрации. Для более сложного случая рассмотрения нестационарной фильтрации необходим учет неустановившегося режима.

2.3.2. Неустановившаяся фильтрация

Простановка задачи

Рассмотрим модель производительности скважины на неустановившемся режиме. Пусть скважина вскрывает M гидродинамически изолированных пластов. В каждом из пластов фильтрация описывается с помощью уравнения (2.10). Пласты характеризуются полями проницаемости $k(x,y)$, пористости $\varphi(x,y)$ и мощности $h(x,y)$. Пусть на внешних границах каждого из пластов задано постоянное давление или условие отсутствия перетока:

$$p^{m}\Big|_{\Gamma_m^p} = p_e^{m}, \ \frac{\partial p^{m}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_m^q} = 0. \quad (2.67)$$

Начальное условие для каждого из пластов:

$$p^{m}(x,y,t)\Big|_{t=0} = p_0^{m}. \quad (2.68)$$

Отметим, что по описанным выше причинам начальные и граничные условия должны быть согласованы, поэтому при задании на границе пласта условия постоянного давления следует, что $p_0^m = p_e^m$.

Поставим задачу смоделировать работу реальной скважины с учетом взаимодействия пласта со скважиной. В общем случае при движении жидкости в стволе скважины забойное давление и дебит не являются постоянными во времени: $p_{wf} = p_{wf}(t)$, $q = q(t)$, однако они связаны между собой зависимостью вида $p_{wf} \equiv p_{wf}^1 = f(q)$ [100], [103] («кривая эффективности лифта»). Поэтому условие на скважине будем моделировать следующим образом:

$$p_{wf}(t) = f\left(\sum_{m=1}^{M} q^m(t)\right),\ p_{wf}^m(t) = p_w^1(t) + \Delta^m. \qquad (2.69)$$

Следует отметить, что получение аналитического решения уравнений, описывающих взаимодействие пласта со скважиной, характеризующейся зависимостью $p_w = f(q)$ затруднено, и возможно лишь в случае относительно простого вида функции $f(q)$. При этом пласт либо однороден, либо неоднородность имеет относительно простой характер. Например, в работе [76] было получено аналитическое решение задачи о взаимодействии пласта со скважиной в предположении о линейной связи забойного давления и дебита, а в работе [86] была аналитически решена задача о взаимодействии нескольких пластов многопластовой системы при задании постоянного давления или дебита на скважине: $p_w = const$ или $q = const$.

В работе [101] для решения задачи взаимодействия пласта со скважиной на установившемся режиме предложен метод узлового анализа (nodal analysis). В работах [128], [145] авторами был расширен метод узлового анализа для применения в нестационарном случае. Это позволило моделировать работу скважины с зависимостью дебита от забойного давления произвольного вида на неустановившемся режиме.

С учетом ограничений существующих подходов для моделирования технологических операций на скважинах в данной работе расширен метод узлового анализа на случай работы многопластовой системы на неустановившемся режиме с учетом неодновременного ввода объектов в эксплуатацию.

Отличительной особенностью метода узлового анализа является его универсальность: с его помощью можно моделировать работу скважины с различными системами заканчивания на каждом из вскрываемых ею пластов (ГРП, горизонтальный ствол и т.д.) с использованием полученных ранее решений для однопластовых систем [97], [102], [108], [125], [138], [142]. Так же можно моделировать работу скважины, вскрывающей неоднородные пласты, используя соответствующие решения для однопластового случая [34].

Расширение метода узлового анализа на многопластовый случай

Применение узлового анализа как метода для оптимизации системы добычи описано в работе [101]. В частности в данной работе решена задача взаимодействия системы «пласт-скважина» на установившемся режиме. Для этого на графике «дебит-забойное давление» построены кривая эффективности лифта, характеризующая скважину и индикаторная диаграмма (Inflow Performance Relationship, IPR) [103], характеризующая пласт. Точка пересечения данных кривых есть решение – забойное давление и дебит, которыми будет обладать рассматриваемая система на установившемся режиме (см.рис. 2.3).

В работе [145] метод узлового анализа расширен на нестационарный случай. При этом кривая эффективности лифта остается постоянной, а кривая притока из пласта со временем меняется («неустановившаяся индикаторная диаграмма»). Такой подход вполне правомерен при описании нестационарных процессов в пласте и скважине: это связано с тем, что реакция ствола на изменение дебита происходит гораздо быстрее, чем реакция пласта [76]. Во время неустановившегося режима коэффициент продуктивности зависит от времени. На рис. 2.3 точки пересечения кривой эффективности лифта и кривых притока характеризуют дебит и забойное давление, которые будут наблюдаться в процессе нестационарного взаимодействия пласта со скважиной в разные моменты времени.

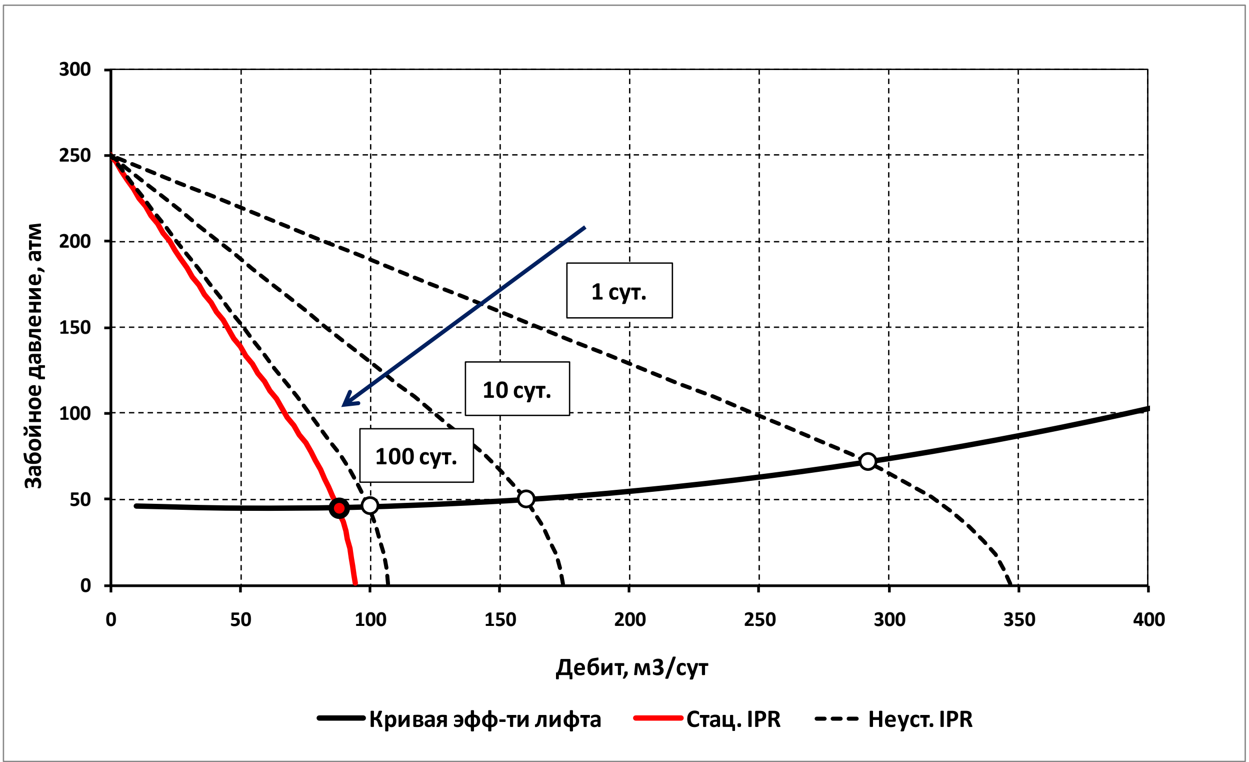


рис. 2.3. Узловой анализ

В работе [128] приведены примеры использования нестационарного узлового анализа для уточнения параметров пласта по данным неустановившегося режима на новых скважинах.

Рассмотрим использование метода узлового анализа при моделировании взаимодействия нескольких пластов со скважиной. Пусть многопластовая система задается векторами пластовых давлений, проницаемостей, пористостей каждого из пластов и т.д. По аналогии [145] построим набор неустановившихся индикаторных диаграмм для различных периодов времени. Для этого для каждого момента времени найдем решение уравнения (2.10), заменив наперед неизвестное условие (2.69), на условие постоянного забойного давления для каждого из пластов: $p_w^m = p_w^1 + \Delta^m = const$, где p_w^m - забойное давление m-го пласта в некоторый момент времени t_j. Из решения уравнения (2.10) найдем дебит каждого из пластов $q^m\left(t_j, p_w^m\right)$ и их сумму. Набор неустановившихся индикаторных диаграмм строится при варьировании забойного давления p_{w_k} и времени t_j: алгоритм приведен на рис. 2.4.

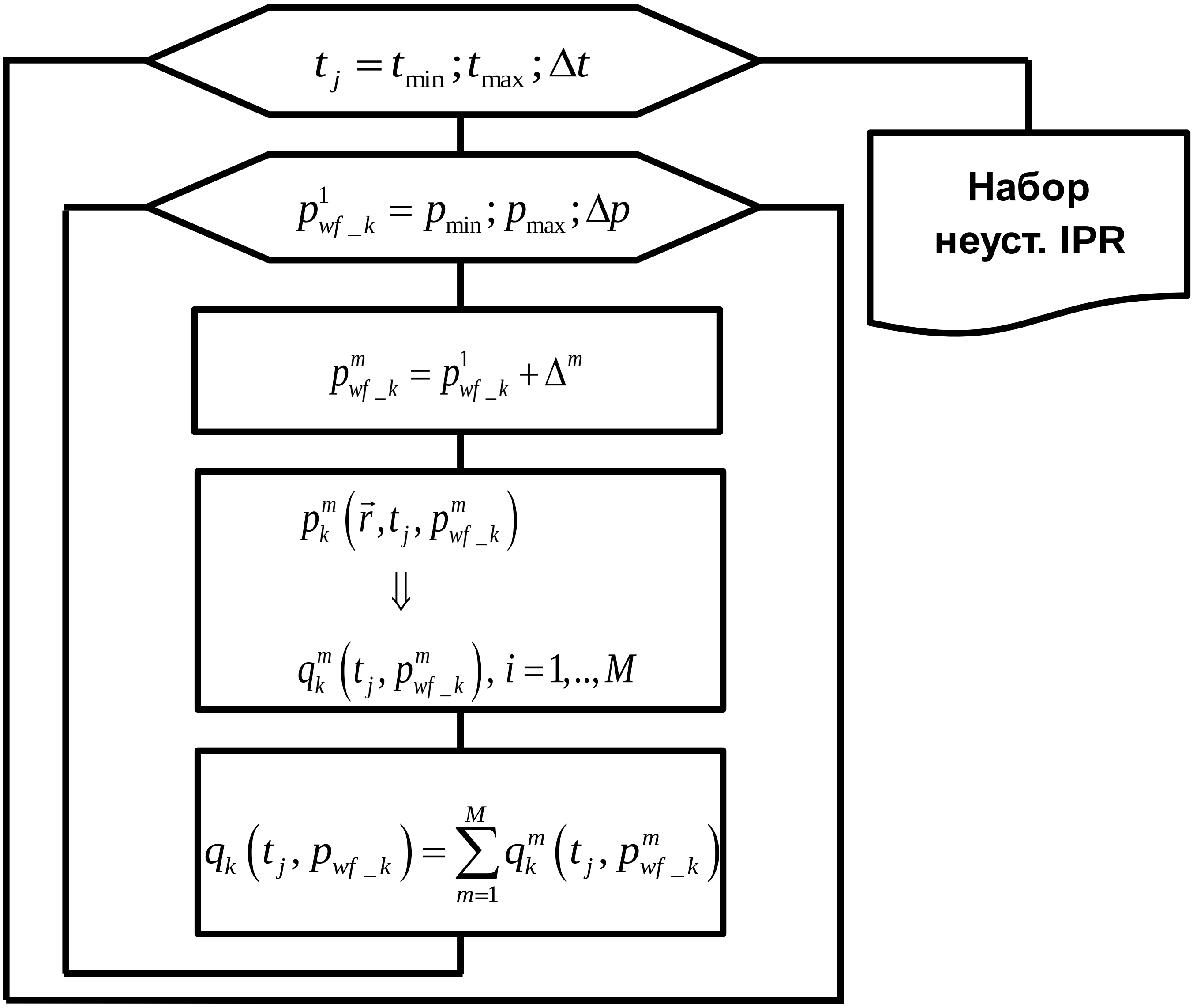


рис. 2.4. Алгоритм построения неустановившихся индикаторных диаграмм для многопластовой системы

Разные пласты многопластовой системы в общем случае обладают различными пластовыми давлениями и проводимостями, поэтому точка пересечения индикаторной диаграммы с осью ординат (с осью «забойное давление»), при которой дебит системы равен нулю, будет находиться между максимальными и минимальными значениями пластовых давлений. Это давление в случае установившегося режима можно вычислить из условия равенства нулю общего дебита из формулы (2.64):

$$p_{w\_0}^{1} = \frac{\sum_{m=1}^{M} D^m \left(p_{res}^m - \Delta^m \right)}{\sum_{m=1}^{M} D^m}. \tag{2.70}$$

Например, для скважины, находящейся в центре круговых пластов, имеем:

$$p_{w\_0}^{1} = \frac{\sum_{m=1}^{M} \frac{k^m h^m}{\mu^m p_D^m} \left(p_{res}^m - \Delta^m \right)}{\sum_{m=1}^{M} \frac{k^m h^m}{\mu^m p_D^m}}, \tag{2.71}$$

где p_D^m - безразмерное давление, учитывающее характер и геометрию фильтрационного потока m-го пласта, при плоскорадиальной фильтрации (граница скважины круговая) $p_D^m = \ln\left(\frac{r_e^m}{r_w^m}\right) + s^m$, r_e^m - радиус m-го пласта, r_w^m - эффективный радиус скважины на m-ом пласте, s^m - добавочный скин-фактор.

На неустановившемся режиме индикаторные диаграммы в общем случае будут пересекать ось ординат в различных точках в разные моменты времени. Это можно объяснить следующим образом. В общем случае пласты имеют разные фильтрационно-емкостные свойства, сжимаемости, а пластовые жидкости имеют различные вязкости. Поэтому в соответствии с принципом псевдостационарных состояний [10], [80] на неустановившемся режиме можно считать, что каждый пласт в данный момент обладает своим коэффициентом продуктивности, зависящим от времени: $D^m = D^m(t)$. Поэтому из формулы (2.70) следует, что и величина $p_{w\_0}^{1}$ также зависит от времени.

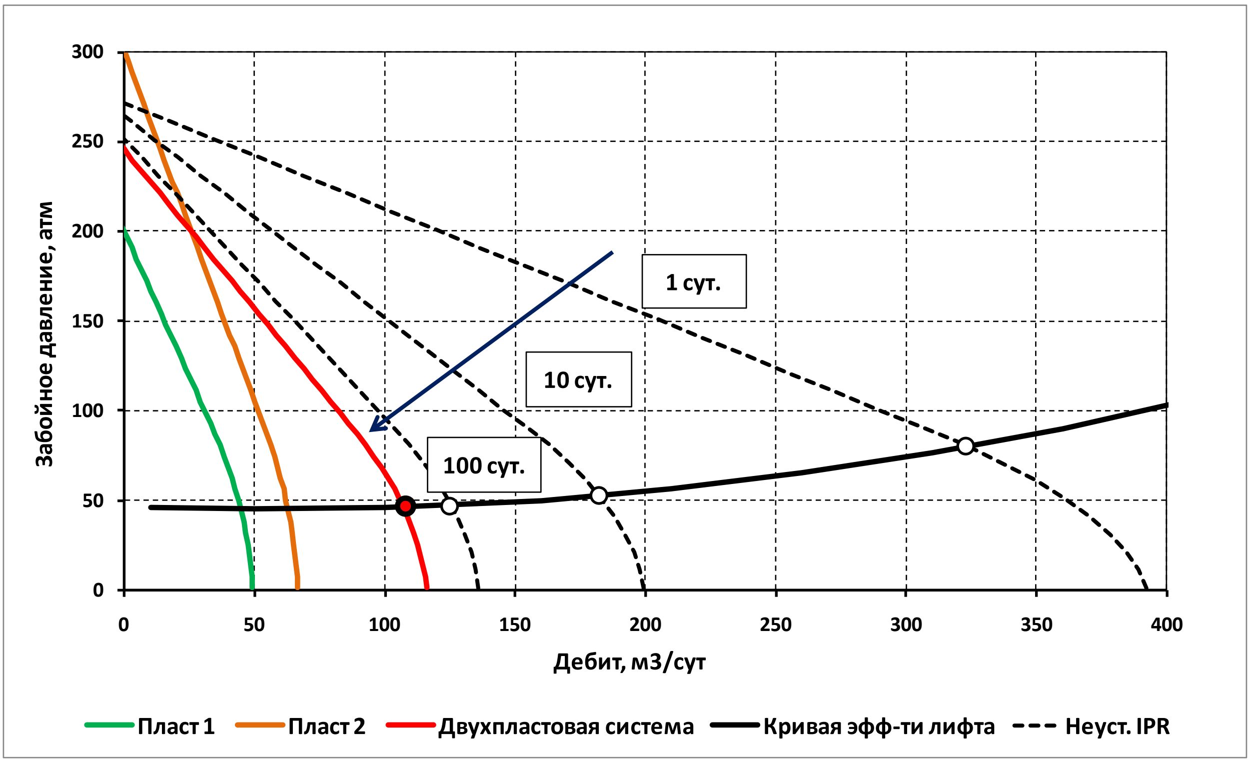


рис. 2.5. Индикаторные диаграммы для двухпластовой системы

На рис. 2.5 изображены индикаторные диаграммы двухпластовой системы и каждого из двух пластов в отдельности. Из индикаторных диаграмм видно, что давление пластов различно. Вследствие различных проводимостей точка пересечения неустановившейся индикаторной диаграммы двухпластовой системы с осью ординат изменяется во времени, стремясь к стационарному значению.

2.3.3. Моделирование приобщения нового пласта

Рассмотрим применение предлагаемого подхода для моделирования приобщения нового пласта. Приобщение – операция, проводимая для вовлечения в разработку пластов, с которых до настоящего момента не велась добыча. Обычно приобщение осуществляется как просто доперфорацией продуктивного интервала, так и дополнительным проведением гидроразрыва пласта (ГРП). На рис. 2.6 схематически изображено приобщение пласта (пласт №2). С основного пласта (пласт №1) ведется добыча, поэтому в нем есть воронка депрессии, в пласте №2 на момент приобщения поле давления не возмущено.

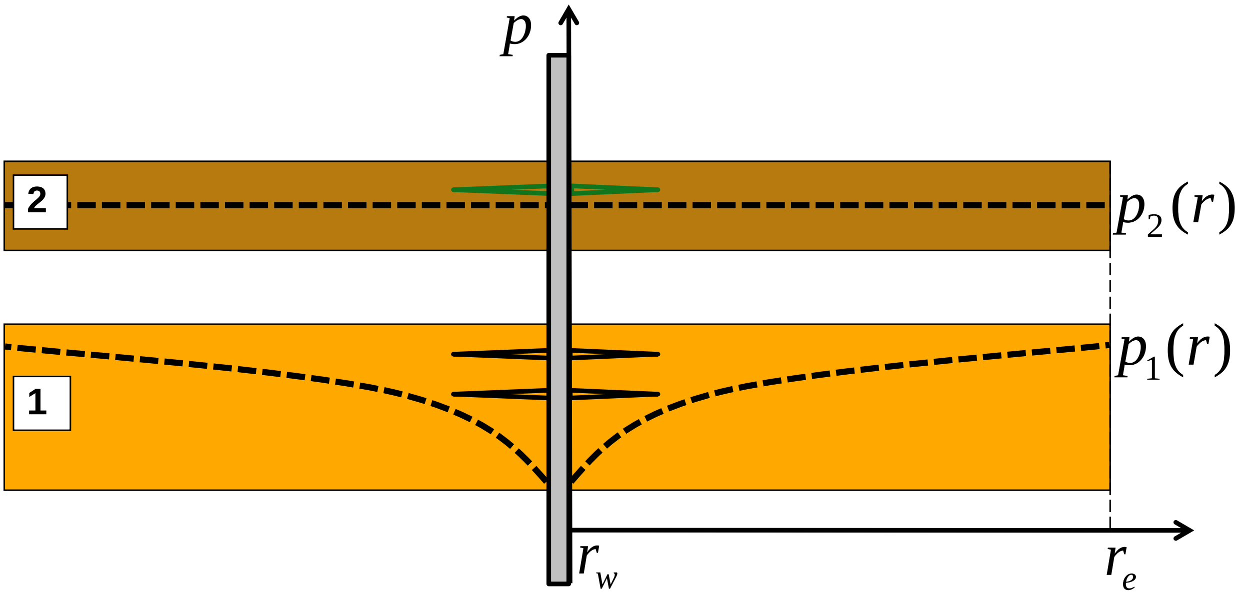


рис. 2.6. Приобщение нового пласта

Рассмотрим систему, состоящую из двух пластов (рис. 2.6). Пусть в данный момент времени скважина работает на пласт 1 с забойным давлением p_w. Обозначим дебит, соответствующий решению уравнения пьезопроводности (2.10) с забойным давлением p_w через $q_i\left(p_w, t\right)$, где i – номер пласта. Пласты начинают разрабатывать с разницей во времени в Δt, то есть пласт №2 начинает разрабатываться через время Δt. Пусть в результате приобщения система перешла на новое забойное давление p'_w.Уравнение (2.10) линейно, поэтому справедлив принцип суперпозиции [69] для каждого из пластов. В соответствии с данным принципом дебит скважины после приобщения второго пласта будет:

$$q_0\left(t+\Delta t, p'_w\right) = q_1\left(t+\Delta t, p_w\right) + q_1\left(\Delta t, p^1_{res} + p'_w - p_w\right) + q_2\left(\Delta t, p'_w + \Delta\right), \qquad (2.72)$$

Построим в координатах «дебит-забойное давление» набор неустановившихся индикаторных диаграмм по алгоритму, изображенному на рис. 2.4: $q_{ij} = q_0\left(t+\Delta t_i, p'_{w\_j}\right)$. Изобразим в этих же координатах кривую эффективности лифта. Точки пересечения данной кривой с неустановившимися индикаторными диаграммами – есть искомое решение.

На рис. 2.7 изображены динамики дебита скважины и забойного давления после приобщения. Изначально скважина работала на один пласт с дебитом 145 м^3/сут и забойным давлением 30 атм. После проведения приобщения меняется как забойное давление, так и дебит. При этом в начальный момент времени дебит из основного пласта ниже своего значения до проведения технологической операции, так как забойное давление после приобщения возрастает. Это объясняется тем что, кривая эффективности лифта монотонно растет в устойчивой области, а, следовательно, при увеличении дебита скважины забойное давление также увеличивается. Следует отметить, что в низкопроницаемых пластах процессы перераспределения давлений и изменения дебитов вследствие приобщения занимают длительное время. Данное обстоятельство необходимо учитывать при расчете потенциала скважины, определении дополнительной добычи и эффективности мероприятия.

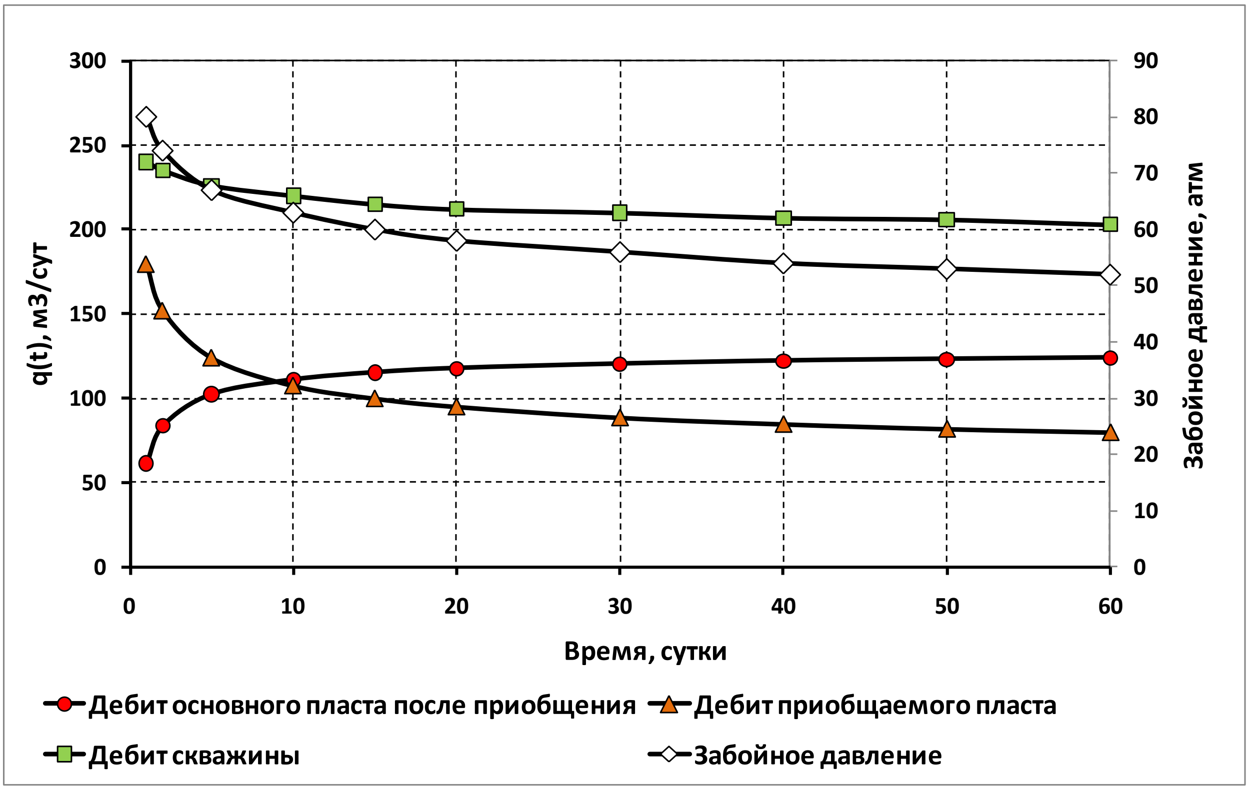
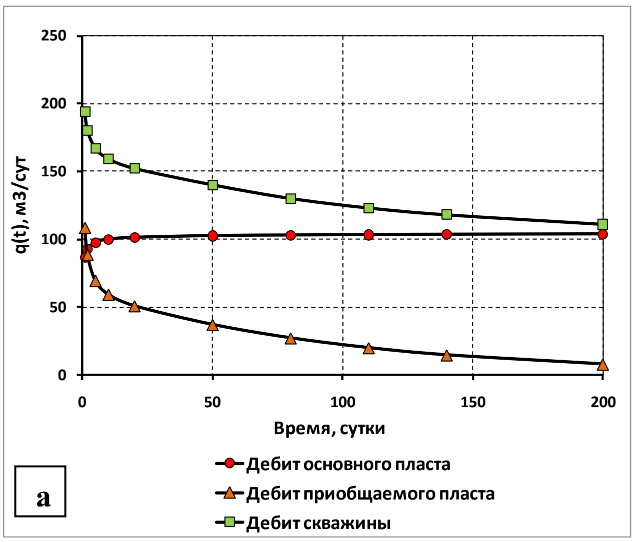


рис. 2.7. Динамика дебита и забойного давления после приобщения

На практике приобщаемые пласты зачастую маломощны/низкопроницаемы, также бывает, что на этих пластах не сформирована система поддержания пластового давления (ППД) (новый пласт будет постепенно истощаться). В таких случаях возникает вопрос о целесообразности приобщения: окупит ли дополнительная добыча нефти затраты на проведение геолого-технического мероприятия (ГТМ), а также издержки, связанные с простоем скважины на время ГТМ.



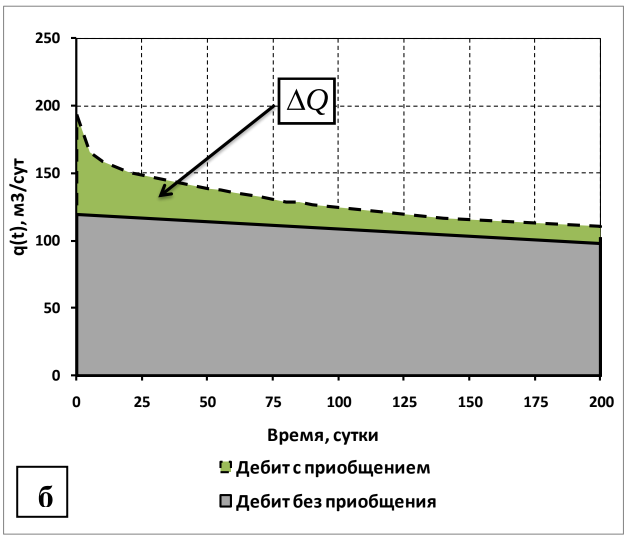


рис. 2.8. Динамика дебита и дополнительной добычи давления после приобщения

На рис. 2.8 изображены динамики дебита скважины и отдельно с пластов (а), а также дополнительной добычи (б) после приобщения пласта. Добыча с нового пласта ведется в режиме истощения, поэтому его дебит быстро падает. Однако за рассматриваемый период вследствие приобщения мы имеем дополнительную накопленную добычу ΔQ - данная величина является мерой экономической эффективности ГТМ. Ее можно оценить следующим образом:

$$\Delta Q = \int_0^T \left[q_0(\tau) - q' \cdot \left(1 - u(\tau)\right) \right] d\tau \,, \tag{2.73}$$

где $(0, T)$ - анализируемый интервал времени, $q_0(\tau)$ - рассчитанный дебит скважины после приобщения, q' - остановочный дебит скважины, $u(\tau)$ - коэффициент падения базовой добычи.

2.3.4. Аналитическая модель работы многопластовой скважины

В данном разделе разработана аналитическая модель производительности многопластовой скважины с заданием двух типов граничных условий: (а) линейной связи забойного давления и дебита и (б) с учетом эффекта послепритока. Первое из граничных условий позволяет моделировать работу многопластовой скважины с учетом кривой эффективности лифта. Второе из условий позволяет построить модель глушения многопластовой скважины, связав коэффициент послепритока с параметрами компоновки скважины и свойствами жидкости глушения.

Рассмотрим скважину, находящуюся в центре *M* круговых пластов. Каждый пласт является однородным и изотропным и характеризуется коэффициентом пьезопроводности κ^m. Пласты являются различными по мощности h^m и обладают различными радиусами r_e^m. В соответствии с описанными выше предположениями, фильтрация в каждом из пластов предполагается плоскорадиальной и описывается следующим уравнением:

$$\frac{1}{\kappa^m} \frac{\partial p^m(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial p^m(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 p^m(r,t)}{\partial r^2} \,, \tag{2.74}$$

Взаимодействие набора пластов со скважиной

Для описания взаимодействия набора пластов со скважиной посредством построения аналитической модели аппроксимируем зависимость $p_{wf} = f(q)$ с помощью линейной функции, аналогично тому, как это сделано для однопластовой системы в работе [76]. Таким образом, условие на скважине будет выглядеть следующим образом:

$$p_{w\_i}(t) = a \cdot \sum_{m=1}^{M} q^m(t) + b + \Delta^m \,, \tag{2.75}$$

где a и b - характеризуют кривую эффективности лифта.

На внешних границах пластов задаются условия постоянного давления или отсутствия перетока:

$$p^m(r,t)\Big|_{r=r_e^m} = p_0^m,\ \frac{\partial p^m(r,t)}{\partial r}\Bigg|_{r=r_e^m} = 0. \tag{2.76}$$

Также задаются однородные начальные условия на каждый из пластов, начальные условия сопряжены с граничными условиями на внешних границах пластов:

$$p^m(r,t)\Big|_{t=0} = p_0^m. \tag{2.77}$$

Докажем разрешимость системы (2.74) - (2.77). В пространстве Лапласа уравнение (2.74) принимает вид $\frac{s}{\kappa^m}\tilde{p}^m = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{p}^m}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{p}^m}{\partial r^2}$, где $\tilde{p}^m$ - изображение в пространстве Лапласа функции $\left(p^m - p_0^m\right)$. Его решением является: $\tilde{p}^m = C_1^m \cdot I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}r\right) + C_2^m \cdot K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}r\right)$. Таким образом, для разрешимости системы необходимо найти $2M$ неизвестных. Их нахождение сводится к решению в пространстве Лапласа $2M$ линейных уравнений: M уравнений дают условия (2.76), которые в пространстве Лапласа выглядят следующим образом:

$$\tilde{p}^m\Big|_{r=r_e^m} = 0,\ \frac{\partial \tilde{p}^m}{\partial r}\Bigg|_{r=r_e^m} = 0. \tag{2.78}$$

Остальные M уравнений – это условия равенства забойных давлений на скважине в любой момент времени ($M-1$ уравнений): $\tilde{p}^i\Big|_{r=r_w^m} + \frac{p_0^i - \Delta^i}{s} = \tilde{p}^j\Big|_{r=r_w^m} + \frac{p_0^j - \Delta^j}{s}$, $\forall i, j$ и уравнение (2.75), которое в пространстве Лапласа с учетом плоскорадиальной симметрии переходит:

$$\tilde{p}^m\Big|_{r=r_w^m} = a \cdot \sum_{m=1}^{M} 2\pi k^m h^m \lambda_0^m \left(r\frac{\partial p^m}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=r_w^m} + \frac{b + \Delta^m - p_0^m}{s}. \tag{2.79}$$

Таким образом, имеем $2M$ независимых уравнений и $2M$ неизвестных, что говорит о существовании единственного решения.

Учет влияния объема ствола скважины

Во многих практически важных случаях необходимо учитывать наличие жидкости в стволе скважины при ее работе: изменение забойного давления за счет снижения уровня жидкости в затрубе скважины. Данный эффект носит название «послепритока» или эффекта влияния объема ствола скважины [117, 150]. В связи с этим представляет интерес по моделированию работы многопластовой скважины с учетом эффекта послепритока.

Пусть давление в каждом из пластов многопластовой скважины описывается с помощью уравнения (2.74). На внешних границах пластов задаются условия (2.76). Также задаются начальные условия (2.77).

В соответствии с [150, 117] запишем граничное условие на скважине с учетом влияния объема ствола скважины:

$$\left.\frac{\partial p^m}{\partial r}\right|_{r=r_w^m}=\frac{q_s^m}{2\pi k^m h^m \lambda_0^m r_w^m}+\frac{C_s}{2\pi k^m h^m \lambda_0^m r_w^m}\frac{\partial p_{wf}^1}{\partial t}\ , \tag{2.80}$$

где C_s - коэффициент послепритока, учитывающий влияние объема ствола скважины.

Решение озвученной задачи ищется в пространстве Лапласа:

$$\tilde{p}^m=C_1^m\cdot I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}r\right)+C_2^m\cdot K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}r\right), \tag{2.81}$$

Константы C_1^m, C_2^m определяются из граничных условий на скважине, которые в пространстве Лапласа выглядят следующим образом, для забойных давлений по пластам и для суммарного заданного дебита q_s^0 - всего M уравнений (уравнения записаны относительно отклонения давления от начального):

$$\begin{gathered}\left.\tilde{p}^i\right|_{r=r_w^m}+\frac{p_0^i-\Delta^i}{s}=\left.\tilde{p}^j\right|_{r=r_w^m}+\frac{p_0^j-\Delta^j}{s},\ \forall i,j\ ,\\ \tilde{q}_{s1}+\tilde{q}_{s2}+...+\tilde{q}_{sM}=\frac{q_s^0}{s}\ .\end{gathered} \tag{2.82}$$

При этом будем предполагать, что забойное давление на скважине определяется следующими условиями:

$$p_w^m=\begin{cases}p_{wf\_0}+\Delta^m,\ t=0\\ \left.p^m(r,t)\right|_{r=r_w^m},\ t>0\end{cases}. \tag{2.83}$$

Условие (2.83) дает возможность задать в начальный момент времени забойное давление p_{wf_0}, отличное от начального давления в пластах, это будет необходимо ниже, при моделировании глушения скважины.

Таким образом, условие (2.80) в пространстве Лапласа выглядит следующим образом (еще M уравнений):

$$\left.\frac{\partial \tilde{p}^m}{\partial r}\right|_{r=r_w^m}=\frac{\tilde{q}_s^m}{2\pi k^m h^m \lambda_0^m r_w^m}+\frac{C_s}{2\pi k^m h^m \lambda_0^m r_w^m}\left(s\tilde{p}^m-\left(p_{wf\_0}^m-p_0^m\right)\right)\ . \tag{2.84}$$

Так как имеется $2M$ линейно независимых уравнений и $2M$ неизвестных C_1^m, C_2^m, то система разрешима и имеет единственное решение:

$$C_1^m=A_1^m\tilde{q}_s^m+B_1^m, \tag{2.85}$$

$$C_2^m=A_2^m\tilde{q}_s^m+B_2^m. \tag{2.86}$$

где приняты следующие обозначения для пласта с поддержанием постоянного давления на границе:

$$A_1^m = \left(\frac{M^m K_0\left(x_e^m\right)}{2\pi k^m h^m r_w^m \lambda_0^m s} \right),\ B_1^m = -\left(\frac{C_s M^m K_0\left(x_e^m\right)}{2\pi k^m h^m r_w^m \lambda_0^m} \left(p_{wf\_0}^m - p_0^m \right) \right), \tag{2.87}$$

$$A_2^m = -\left(\frac{M^m I_0\left(x_e^m\right)}{2\pi k^m h^m r_w^m \lambda_0^m s} \right),\ B_2^m = -\left(\frac{C_s M^m I_0\left(x_e^m\right)}{2\pi k^m h^m r_w^m \lambda_0^m} \left(p_{wf\_0}^m - p_0^m \right) \right). \tag{2.88}$$

А также для пласта с отсутствием перетока на границе:

$$A_1^m = \left(\frac{M^m K_1\left(x_e^m\right)}{2\pi k^m h^m r_w^m \lambda_0^m s} \right),\ B_1^m = -\left(\frac{C_s M^m K_1\left(x_e^m\right)}{2\pi k^m h^m r_w^m \lambda_0^m} \left(p_{wf\_0}^m - p_0^m \right) \right), \tag{2.89}$$

$$A_2^m = \left(\frac{M^m I_1\left(x_e^m\right)}{2\pi k^m h^m r_w^m \lambda_0^m s} \right),\ B_2^m = -\left(\frac{C_s M^m I_1\left(x_e^m\right)}{2\pi k^m h^m r_w^m \lambda_0^m} \left(p_{wf\_0}^m - p_0^m \right) \right). \tag{2.90}$$

В формулах (2.87)-(2.90) введены обозначения:

$$M^m = \frac{1}{I_0\left(x_e^m\right)\left(z^m K_1\left(x_w^m\right) + \alpha^m K_0\left(x_w^m\right)\right) + K_0\left(x_e^m\right)\left(z^m I_1\left(x_w^m\right) - \alpha^m I_0\left(x_w^m\right)\right)}. \tag{2.91}$$

$$\alpha^m = \frac{C_s s}{2\pi k^m \lambda_0^m h^m r_w^m},\ z^m = \sqrt{\frac{s}{\kappa^m}},\ x_w^m = z^m r_w^m,\ x_e^m = z^m r_e^m,\ x^m = z^m r. \tag{2.92}$$

Неизвестные $\tilde{q}_s^m$ определяются из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} A^1 \tilde{q}_s^1 + B^1 - A^2 \tilde{q}_s^2 - B^2 = \dfrac{p_0^2 - p_0^1}{s} \\ A^2 \tilde{q}_s^2 + B^2 - A^3 \tilde{q}_s^3 - B^3 = \dfrac{p_0^3 - p_0^2}{s} \\ \qquad \qquad \dots \\ A^{M-1} \tilde{q}_s^{M-1} + B^{M-1} - A^M \tilde{q}_s^M - B^M = \dfrac{p_0^M - p_0^{M-1}}{s} \\ \tilde{q}_s^1 + \tilde{q}_s^2 + \dots + \tilde{q}_s^M = \dfrac{q_s}{s} \end{cases}. \tag{2.93}$$

где:

$$A^m = A_1^m I_0\left(x_w^m\right) + A_2^m K_0\left(x_w^m\right), \tag{2.94}$$

$$B^m = B_1^m I_0\left(x_w^m\right) + B_2^m K_0\left(x_w^m\right). \tag{2.95}$$

Примеры моделирования производительности многопластовой системы

Пусть скважина вскрывает два пласта: один большой с радиусом 250 м с поддержанием постоянного давления на границе, и второй, меньший по размеру, с радиусом – 50 м, с условием отсутствия перетока на границе. Параметры пластов и скважины даны в табл. 1. Заметим, что множители в первом столбце таблицы подобраны так, что численные значения в таблице равны соответствующим значениям в промысловых единицах.

Рассмотрим вариант, когда пласты не возмущены. Забойное давление в скважине равно начальному пластовому давлению. Начальные давления 1-го и 2-го пластов равны.

табл. 1.

	1 пласт	2 пласт
Тип границы	Поддержание давления	Непереток
Начальное пластовое давление, Па/101325	250	250
Радиус пласта, м	250	50
Скин	0	0
Пористость	0,2	0,2
Проницаемость, $(м^2)/10^{-15}$	10	10
Сжимаемость, $(1/Па)/(9,87*10^{-6})$	$5*10^{-5}$	$5*10^{-5}$
Вязкость, $(Па*с)/10^{-3}$	1,5	1,5
Давление в стволе скважины на начало работы, Па/101325	250	
Коэффициент послепритока, $(м^3/Па)*(9,87*10^{-6})$	0,01	
Дебит скважины на поверхности, $(м^3/сек)*86400$	100	
Радиус скважины, м	0,1	

На (рис. 2.9) показана динамика дебитов с разных пластов и из скважины.

рис. 2.9 Динамика дебитов с разных пластов и дебит скважины в модели постоянного дебита

В начальный момент времени дебиты с разных пластов – нулевые, так как скважина сначала работает на откачку жидкости из затруба. Затем дебиты пластов растут. Вследствие одинаковых фильтрационно-емкостных свойств динамика дебитов одинакова, но до момента, когда «волна» изменения давления дошла до границ 2-го пласта. С этого момента дебит из этого пласта начинает спадать, так как пласт непроницаем на границе – он истощается. Соответственно дебит со второго пласта растет, так как задано условие постоянного дебита на поверхности. На момент 130 часов – со второго пласта перестает поступать жидкость. Скважина переходит в режим добычи с первого пласта.

Рассмотрим, как ведет себя при этом забойное давление. На (рис. 2.10) показана динамика изменения забойного давления.

рис. 2.10. Динамика забойного давления скважины в модели постоянного дебита

Рассмотрим динамику логарифмической производной изменения давления, чтобы лучше выявить характерные отличия динамики забойного давления двухпластовой системы от соответствующей динамики однопластовой.

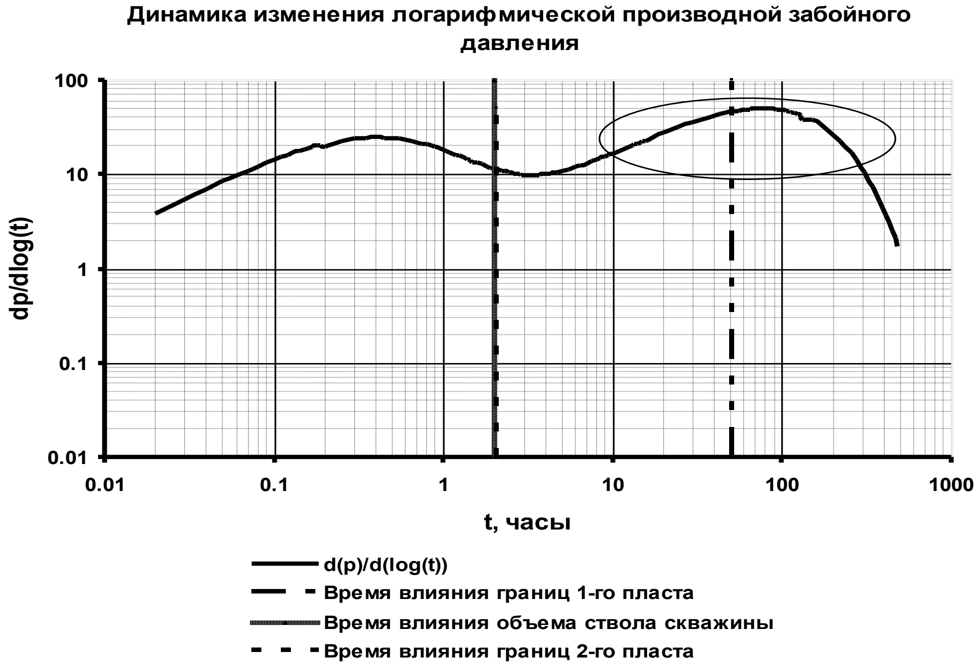


рис. 2.11. Динамика логарифмической производной изменения забойного давления скважины в модели постоянного дебита

Заметим, что в динамике производной наблюдается характерный максимум, который свидетельствует о наличии замкнутого пласта в двухпластовой системе. Это связано с наличием восходящего участка в динамике логарифмической производной изменения забойного давления скважины, вскрывающей пласт с замкнутыми границами (когда «волна» возмущения давления доходит до границ данного пласта), а также с наличием нисходящего участка в динамике логарифмической производной изменения забойного давления скважины, вскрывающей пласт с поддержанием постоянного давления на границе. Так как пласты имеют одинаковые фильтрационно-емкостные свойства, то «волна» давления доходит до границ 1-го и 2-го пласта в разное время – сначала до границ 2-го пласта (он меньше), а затем до границ 1-го, поэтому мы видим характерный максимум. Если бы непроницаемый пласт был больше проницаемого, то логарифмическая производная имела бы характерный минимум (сначала падение, затем рост).

На (рис. 2.12) показаны профили давления в 1-ом и 2-ом на момент времени 300 часов. Видно, что замкнутый пласт истощился – среднее пластовое давление в нем равно забойному.

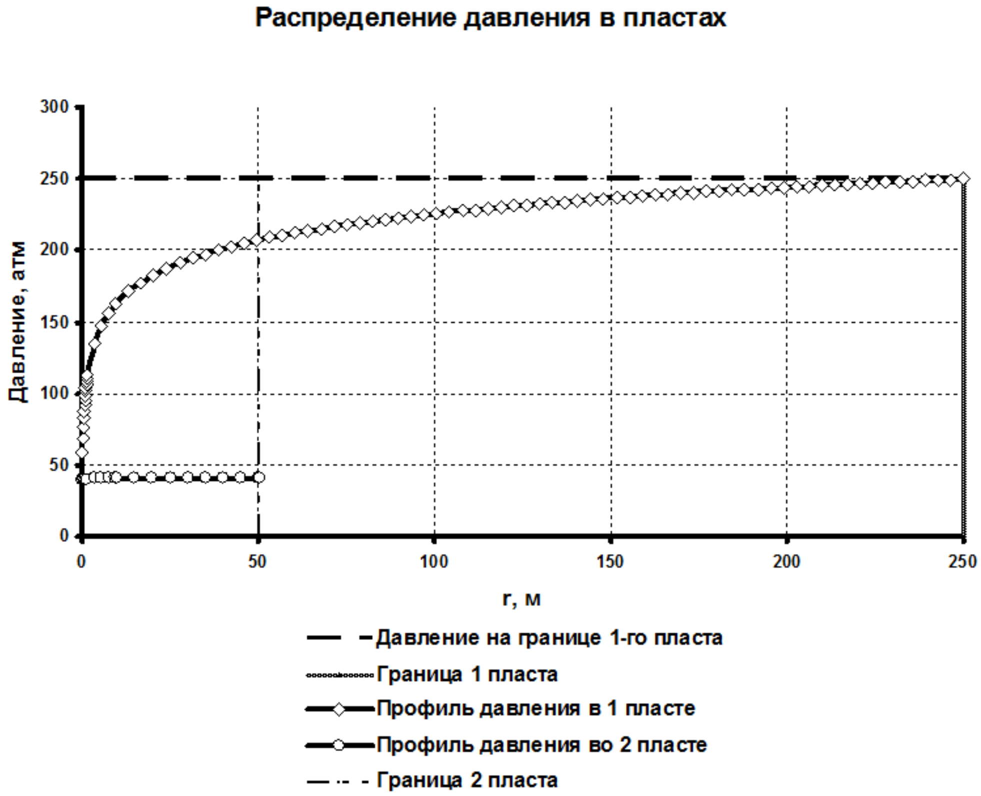


рис. 2.12. Профили давления пластов на момент времени 300 часов в модели постоянного дебита

Рассмотрим модель постоянного давления для двухпластовой системы с такими же параметрами. Пусть величина забойного давления равна забойному давлению в модели постоянного дебита на установившемся режиме, а именно – 36,5 атм. Ниже, на (рис. 2.13) даны зависимости дебита с разных пластов от времени.

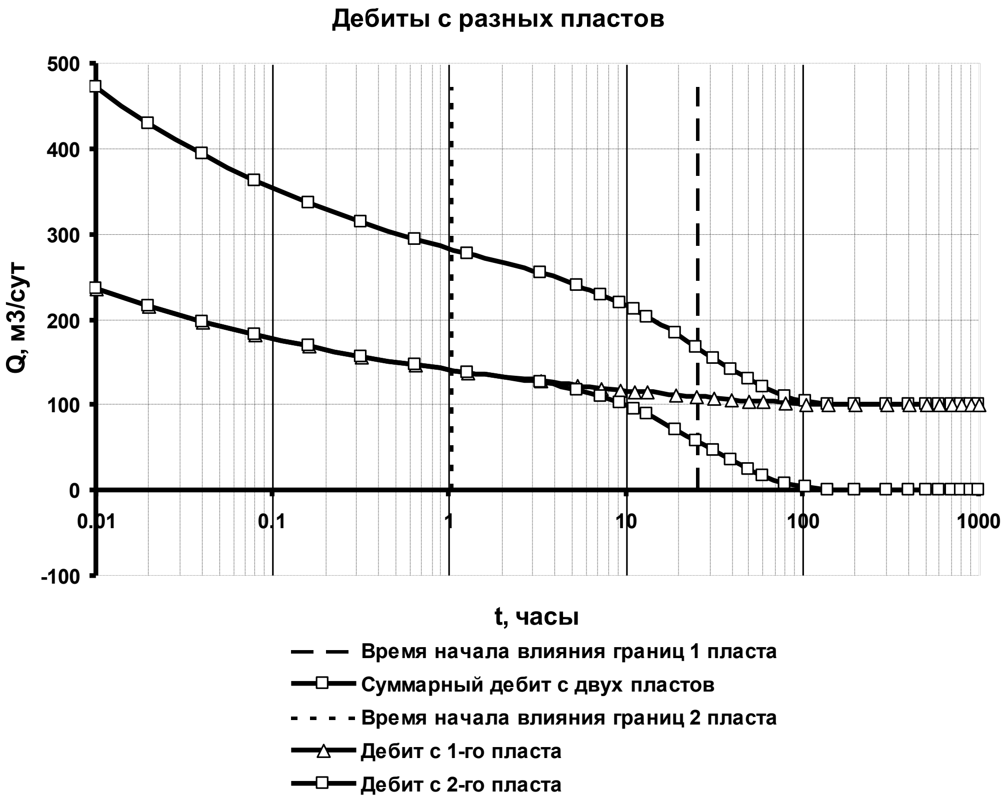


рис. 2.13. Динамика дебитов с разных пластов и дебит скважины в модели постоянного давления

Заметим, что в начальный момент времени, то есть при t=0, функция забойного давления имеет разрыв первого рода, а поэтому функция дебитов с пластов (так как это производные давления) имеют разрыв 2-го рода. Также необходимо отметить, что в модели постоянного давления некорректно говорить об эффекте послепритока, так как предполагается, что давление в стволе скважины меняется мгновенно и не связано с откачкой жидкости из затруба.

2.3.5. Моделирование глушения скважины

Глушение – это операция подачи в ствол скважины жидкости, для уравновешивания столбом этой жидкости растущего забойного давления. Операция глушения скважины является одной из самых распространенных. Скважины глушат при замене насосов, при проведении различных видов ремонтно-изоляционных работ (РИР) и других видах геолого-технологических мероприятий (ГТМ).

Обычно жидкость глушения подается в режиме циркуляции через насосно- компрессорные трубы (НКТ). Однако, в ряде случаев (не удается сбить клапан, засорение НКТ и т.д.) жидкость глушения закачивается через затруб (пространство между НКТ и эксплуатационной колонной). В зависимости от глубины спуска погружного насосного оборудования скважину глушат в один или несколько циклов. При этом в последнем случае объем первой пачки выбирают равным объему ствола скважины от забоя до приема насоса (либо объему от забоя до определенного расстояния от верхних дыр перфорации). Как правило, первую пачку жидкости глушения закачивают в режиме циркуляции и дожидаются ее оседания на забой скважины. На следующем этапе рассматриваемой технологической операции закачкой 2-го цикла добиваются полной замены скважинной жидкости жидкостью глушения. При интенсивном поглощении в первом цикле зачастую применяют блокирующие составы [23], препятствующие фильтрации скважинной жидкости в пласт. Если плотность жидкости глушения недостаточна и скважина продолжает работать даже после полной замены столба жидкости, то жидкость утяжеляют путем добавления в ствол скважины некоторого объема более тяжелого раствора. И, наоборот, при интенсивном поглощении плотность жидкости глушения облегчают.

Основные параметры глушения – это плотность и объем цикла. Важно точно подобрать данные параметры, так как ошибка в любом из них ведет либо к загрязнению призабойной зоны пласта (ПЗП) при больших объемах поглощения, либо к газо- и нефте- проявлениям на поверхности при недостаточном объеме и/или плотности жидкости глушения.

Плотность жидкости глушения оценивают в соответствии с геометрией компоновки скважины. Как правило, расчет выполняют таким образом, чтобы высота столба жидкости глушения уравновешивала пластовое давление:

$$\rho_{жг} = \frac{\left(p_0 + \Delta p(t)\right)(1+\alpha)}{gH}. \tag{2.96}$$

где p_0 - давление в ПЗП в момент ее остановки, $\Delta p(t)$ - изменение давления в ПЗП от времени, g - ускорение свободного падения, H - глубина залегания пласта (по вертикали), α - коэффициент безопасности работ, он зависит от глубины скважины, газосодержания нефти, коэффициента продуктивности и т.д., обычно он изменяется в пределах 0.05 – 0.10 дл.ед.

Для скважин, вскрывающих один пласт, легко найти требуемую плотность жидкости глушения, предварительно оценив давление в ПЗП на конец глушения с помощью существующих методик [117]. Однако при глушении скважин, эксплуатирующих несколько объектов с различными фильтрационно-емкостными свойствами и пластовыми давлениями возникает ряд трудностей. Во-первых, зачастую разность между пластовыми давлениями объектов, вскрываемых скважиной, отлична от гидростатической. Например, в случае одновременной эксплуатации двух объектов, разность пластовых давлений: $\Delta P = p_2 - p_1 \neq \rho g h$, где p_1, p_2 - давления в первом и втором пласте соответственно. А во-вторых, данная разность вследствие различных фильтрационно-емкостных свойств соответствующих пластов, является переменной во времени величиной: $\Delta P = \Delta P(t) = p_{2,0} + \Delta p_2(t) - p_{1,0} - \Delta p_1(t)$. Как следствие при глушении возникает повышенный расход технологических жидкостей, засорение ПЗП, велика вероятность газо-, нефте- проявлений.

Традиционный подход к решению данной проблемы заключается в расчете плотности жидкости глушения на максимальное (для всех объектов многопластовой системы) давление в ПЗП, что приводит к необходимости использования более тяжелых растворов. Недостатками применения растворов большой плотности являются высокая стоимость используемых солей, отрицательное воздействие на фильтрационные свойства ПЗП, а также их коррозионная активность.

В представленной работе плотность жидкости глушения вычисляется с помощью формулы (2.96), причем для оценки давления на конец глушения используется математическая модель работы многопластовой скважины, построенная в предыдущем разделе. При этом считается, что жидкость подается мгновенно, создавая давление в стволе скважины, отличное от давления в призабойной зоне.

Оценка поглощения при глушении

При проведении операции глушения на забое скважины задают давление, отличное от давления в ПЗП. Вследствие чего возникает поток жидкости в пласт или – при недостаточной плотности закачиваемой жидкости – из пласта. Рассмотрим способ оценки объема поглощения жидкости при глушении скважины.

Динамику забойного давления и дебитов в каждой из пластов будем описывать с помощью описанной в предыдущем разделе модели. Моделирование подачи жидкости глушения в ствол скважины сводится к «мгновенному» изменению забойного давления, что требует задания начального вида (2.83), где

$$p_{w\_0} = \rho_{жг} g h_{жг}. \tag{2.97}$$

где $h_{жг}$ - высота столба жидкости глушения, является функцией геометрических характеристик компоновки скважины и объема жидкости глушения плотностью $\rho_{жг}$.

На рис. 2.13 изображена динамика дебита жидкости и забойного давления при заливке в ствол скважины, вскрывающей невозмущенный пласт, некоторого объема жидкости глушения. Видно, что по мере фильтрации жидкости из скважины в пласт забойное давление снижается (так как уровень столба жидкости также уменьшается), при этом скорость фильтрации в пласт также понижается из-за понижения забойного давления.

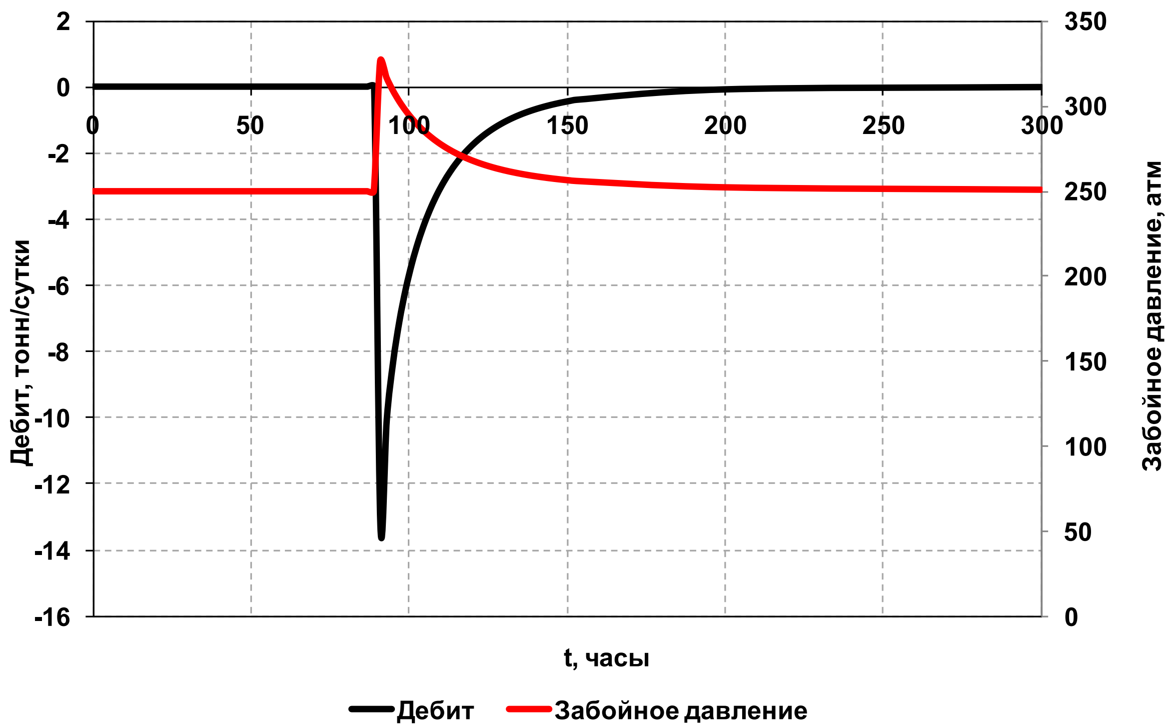


рис. 2.14. Динамика дебита и забойного давления при глушении скважины, вскрывающей невозмущенный пласт

Обобщим построенную модель на случай глушения скважины после длительной работы N пачками жидкости глушения. С помощью принципа суперпозиции можно смоделировать различные режимы работы скважины, в том числе и глушение скважины после продолжительной работы несколькими циклами. Пусть скважина работала до остановки с дебитом q_s. В данный момент времени скважину остановили и начали глушение. В общем случае параметры каждого из циклов глушения различны. В такой постановке технологическая операция описывается тремя векторами: $\vec{V}_{жг}=\left(V_1,V_2,...,V_N\right)^T$, $\vec{\rho}_{жг}=\left(\rho_1,\rho_2,...,\rho_N\right)^T$ и $\vec{t}_{жг}=\left(t_1,t_2,...,t_N\right)^T$, где t_i - время заливки i-ой порции жидкости глушения, объемом V_i и плотностью ρ_i, N – количество подаваемых порций жидкости глушения.

Обозначим решение для построенной в предыдущем разделе модели работы скважины как $P\left(q_s,R,\rho_{жг},V_{жг},t\right)$ - для забойного давления и $M\left(q_s,R,\rho_{жг},V_{жг},t\right)$ - для массового дебита. В скобках записаны основные параметры, от которых зависит данное решение – остановочный дебит, совокупность параметров пласта и скважины - R (пористость, проницаемость, геометрические характеристики компоновки скважины и т.д.), параметры жидкости глушения, а также время подачи данной пачки глушения.

Согласно принципу суперпозиции решение для скважины, которую глушат после продолжительной работы N циклами глушения, строится как сумма соответствующих решений $M_i\left(q_s,\rho_{жг},V_{жг},t\right)$ или $P_i\left(q_s,\rho_{жг},V_{жг},t\right)$ следующим образом:

$$
\begin{gathered}
M\left(q_s,R,\vec{V}_{жг},\vec{\rho}_{жг},\vec{t}_{жг},t\right)=M_0\left(q_s,R,\rho_0,V_0,t\right)+M_1\left(-q_s,R,\rho_1,V_1,t-t_1\right)+\sum_{i=2}^{N}M_i\left(0,R,\rho_i,V_i,t-t_i\right) \\
P\left(q_s,R,\vec{V}_{жг},\vec{\rho}_{жг},\vec{t}_{жг},t\right)=P_0\left(q_s,R,\rho_0,V_0,t\right)+P_1\left(-q_sR,\rho_1,V_1,t-t_1\right)+\sum_{i=2}^{N}P_i\left(0,R,\rho_i,V_i,t-t_i\right)
\end{gathered}
\tag{2.98}
$$

На рис. 2.15 изображены динамики дебита и забойного давления при глушении скважины несколькими циклами после продолжительной работы.

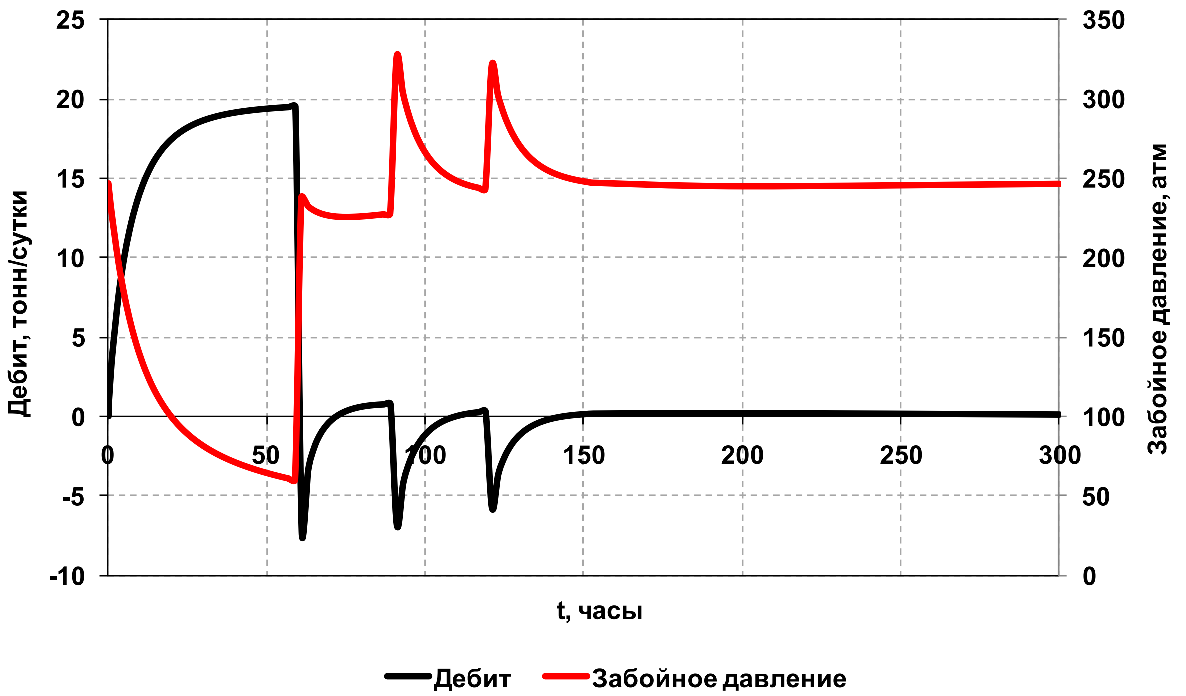


рис. 2.15 Динамика дебита и забойного давления при глушении скважины после продолжительной работы тремя циклами

Обобщим модель на случай глушения многопластовой скважины. Пусть многопластовая скважина вскрывает M пластов. Рассмотрим ее глушение N циклами после продолжительной работы. Обозначим совокупность решений для многопластовой системы через $\vec{P}$ и $\vec{M}$. Где $\vec{P}=\vec{P}\left(q_s,R_K,\rho_{жг},V_{жг},r,t\right)$ - вектор, описывающий динамику давления в данной точке каждого из пластов, $\vec{M}=\vec{M}\left(q_s,R_K,\rho_{жг},V_{жг},t\right)$ - вектор, описывающий динамику дебита для каждого из пластов многопластовой системы. Поясним: m-ая координата векторов $\vec{P}$ и $\vec{M}$ выражает соответственно давление и дебит для m-го пласта многопластовой системы, R_M - совокупность параметров многопластовой системы. Пусть M-пластовая скважина работала некоторое время с дебитом q_s, а затем, в момент времени $t_{гл}$, начали процедуру глушения N циклами, причем параметры технологической процедуры задаются векторами $\vec{V}_{жг}$, $\vec{\rho}_{жг}$ и $\vec{t}_{жг}$. Тогда решение для распределения давления и для дебитов с каждого пласта ищутся также в соответствии с принципом суперпозиции. При этом принцип суперпозиции записывается для каждой из координат векторов $\vec{P}$ и $\vec{M}$, однако в такой постановке эти координаты не являются независимыми, а связаны в соответствии с решением задачи о взаимодействии пластов многопластовой системы.

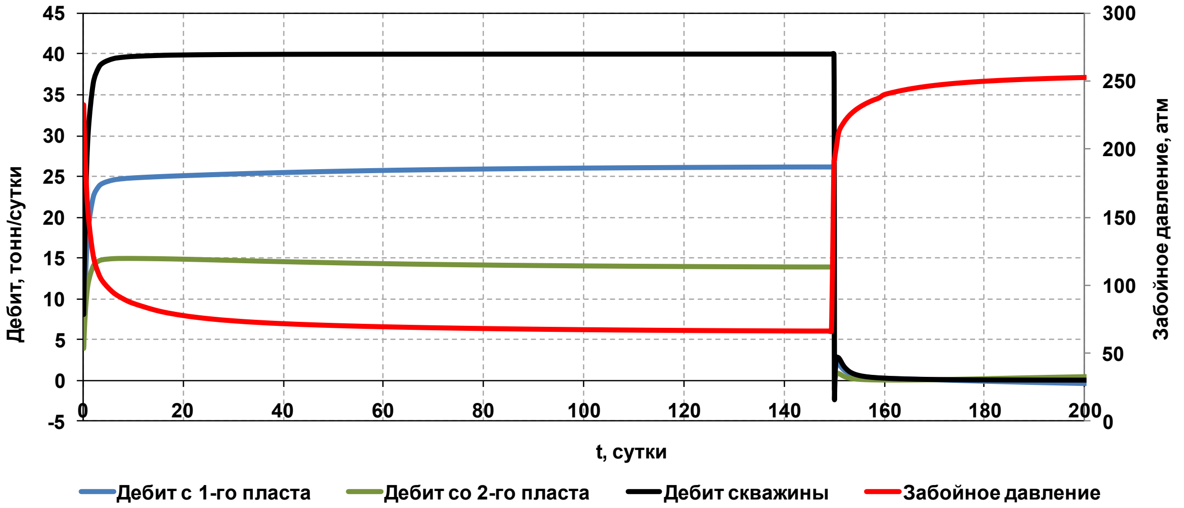


рис. 2.16. Динамика дебита с разных пластов и забойного давления при запуске, работе и глушении двухпластовой скважины

рис. 2.16 демонстрирует моделирование работы, остановки и глушения двухпластовой скважины. Скважина вскрывает пласты с различными фильтрационно-емкостными характеристиками и пластовыми давлениями.

Оптимизация процедуры глушения

Жидкость глушения из-за добавок, увеличивающих ее плотность, оказывает пагубное влияние на фильтрационно-емкостные свойства ПЗП, поэтому при проведении глушения с одной стороны, необходимо создать как можно меньший дебит в пласт, с другой – существует опасность нефте- газо- проявлений при потоке в скважину из пласта, что также недопустимо. Поэтому для оптимизации процедуры глушения необходимо минимизировать дебит, как в пласт, так и из пласта.

При оптимизации процедуры глушения варьируемыми параметрами являются векторы $\vec{V}_{жг}, \vec{\rho}_{жг}, \vec{t}_{жг}$. Нахождение оптимальных параметров глушения сводится к определению минимума следующего функционала, отражающего суммарный накопленный поток в пласт/из пласта:

$$\vec{V}^{opt}_{жг}, \vec{\rho}^{opt}_{жг}, \vec{t}^{opt}_{жг} : \; m_{\Sigma} = \int_{t_{гл}}^{T} \left| M\left(q_s, \vec{V}_{жг}, \vec{\rho}_{жг}, \vec{t}_{жг}, N, R, t\right) \right| dt \to \min . \tag{2.99}$$

где $t_{гл}$ – время начала глушения, M - массовый дебит во время глушения. Заметим, что число циклов глушения N не входит в варьируемые параметры. Очевидно, что оптимальный набор параметров глушения включает наибольшее из возможных количеств циклов глушения.

Ограничения предлагаемой модели, область ее применения

При описании модели было сделано несколько упрощений, которые необходимо пояснить для определения области применения рассматриваемого подхода. В процессе построения модели глушения было принято, что забойное давление увеличивается мгновенно в процессе подачи очередной порции жидкости глушения. Рассмотрим, в каких пределах применимо допущение модели о мгновенном изменении забойного давления. Для этого необходимо оценить времена характерных процессов, происходящих в стволе скважины и сравнить их с временами протекания соответствующих процессов в пласте.

Скорость закачки жидкости глушения в ствол скважины определяется имеющимся насосным оборудованием, а также по предельному допустимому давлению, обычно она имеет порядок $q_{зак} \sim 10^{-3}$ м^3/с. Объем скважины имеет порядок $V_{скв} \sim 10^1$ м^3. Время закачки одного цикла глушения имеет порядок $t_1 = V_{скв} / q_{зак} \sim 10^1 / 10^{-3} = 10^4$ с. Оценим время перераспределения давления в пористом пласте в соответствии со следующей формулой [76]: $t_2 = r_e^2 / \kappa$, где r_e - характерный размер пласта. Для низкопроницаемых пластов $(k = 1 \div 10 мД)$ коэффициент пьезопроводности κ имеет порядок $\sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ м^2/с и ниже, а r_e имеет порядок $\sim 10^2$. Поэтому легко получить, что время реакции пласта $t_2 \sim 10^6 c$, а $t_1 / t_2 \sim 10^{-2}$, откуда видно, что для низкопроницаемых коллекторов можно считать подачу жидкости глушения мгновенной, так как время реакции пласта на два порядка ниже времени подачи порции жидкости глушения.

2.4. Производительность многоскважинной однопластовой системы

2.4.1. Построение решения задачи о поле давления при неустановившейся фильтрации в неоднородном пласте

Данный раздел посвящен рассмотрению структуры решения задачи неустановившейся фильтрации в многоскважинной системе, состоящей из одного пласта. Фильтрация в пласте описывается с помощью уравнения (2.10):

$$\frac{h}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla\left(kh \cdot \nabla p\right), \quad , \tag{2.100}$$

На внешней границе пласта задаются условия (2.11):

$$p\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^{p}_{\Omega_i}} = p_{\Omega_i}\left(x,y\right), i=1,..,K_p$$
$$\left.\frac{\partial p\left(x,y,t\right)}{\partial n}\right|_{\Gamma^{q}_{\Omega_j}} = C\cdot u_{\Omega_j}\left(x,y\right), j=1,..,K_q, \tag{2.101}$$

На N_p скважинах задаются условия (2.13), а на N_q - условия (2.14):

$$p\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma_{wi}} = p_{w\_i}, i=1,..,N_p, \tag{2.102}$$

$$\lambda_0 \oint\limits_{\Gamma^{q}_{w_j}} kh\cdot\frac{\partial p}{\partial n}\cdot dl = q_{wj}, j=1,..,N_q$$
$$p\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^{p}_{wj}} = p_{w\_j}\left(t\right), j=1,..,N_q, \tag{2.103}$$

Также задаются начальное условие (2.12), сопряженное с граничными условиями (2.11).

$$p\left(x,y,t\right)\Big|_{t=0} = p_0\left(x,y\right). \tag{2.104}$$

Как показано выше, задача в данной постановке поставлена корректно и имеет единственное решение.

При некоторых условиях на граничные и начальные условия структура решения задачи неустановившейся фильтрации в неоднородной многоскважинной системе аналогична структуре решения задачи установившейся фильтрации, изученной в [32], с той разницей, что «базисные решения», которые рассматриваются в [32], в данном случае зависят от времени. Это является следствием линейности рассматриваемого уравнения (2.100) и его аналога на установившемся режиме [32]. Покажем это.

Представление функции давления для односкважинной однопластовой системы с постоянным дебитом

Рассмотрим **задачу 1** в специальной односкважинной однопластовой постановке, когда на естественных границах пласта заданы однородные граничные условия, а на скважине задан постоянный дебит q. Докажем следующее представление для поля давления пласте:

$$p\left(x,y,t\right) = q\cdot p_{(x,y,t)q}\left(1\right), \tag{2.105}$$

где $p\left(x,y,t\right)$ - решение задачи 1 в односкважинной постановке с однородными граничными и начальными условиями:

$$p\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^{p}_{\Omega_i}} = 0, i=1,..,K_p$$
$$\left.\frac{\partial p\left(x,y\right)}{\partial n}\right|_{\Gamma^{q}_{\Omega_j}} = 0, j=1,..,K_q. \tag{2.106}$$
$$p\left(x,y,t\right)\Big|_{t=0} = 0$$

Докажем данное представление. Рассмотрим семейство решений в зависимости от дебита q: $p\left(x,y,t,q\right)$. А именно рассмотрим два решения: $p_1 = p\left(x,y,t,q\right)$ и $p_2 = p\left(x,y,t,\nu q\right)$ соответствующим дебитам q и νq и удовлетворяющим однородным граничным условиям на естественных границах пласта. Рассмотрим функцию $p_0 = p_2 - \nu p_1$. Можно показать, что данная функция тождественно равна нулю. Действительно: на внешней границе давление равно нулю. Дебит на скважине равен так же нулю:

$$q_0 = \lambda_0 \oint_{\Gamma_w} kh \cdot \frac{\partial p_0}{\partial n} \cdot dl = \lambda_0 \left(\oint_{\Gamma_w} kh \cdot \frac{\partial p_2}{\partial n} \cdot dl - \nu \oint_{\Gamma_w} kh \cdot \frac{\partial p_1}{\partial n} \cdot dl \right) = \nu q - \nu q = 0 .$$

Так как функция $p_0 \equiv 0$ удовлетворяет данному решению, а решение данной задачи является единственным, то $p_2 = \nu p_1$. Поэтому, $p(x,y,t,\nu q) = \nu p(x,y,t,q)$. Отсюда: $p(x,y,t,q) = q \cdot p(x,y,t,1)$.

$p(x,y,t,1) \equiv p_{(x,y,t)q}(1)$ - есть решение задачи 1 в предположении однородных условий на внешних по отношению к скважине границах и задании на данной скважине условия единичного дебита:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 \oint_{\Gamma_w} kh \cdot \frac{\partial p_{(x,y,t)q}(1)}{\partial n} \cdot dl = 1 \\ &p_{(x,y,t)q}\Big|_{\Gamma_w} = p_w(t) \end{aligned} . \qquad (2.107)$$

Однако в отличии от [32] данное решение не является стационарным.

Представление (2.105) доказано.

Представление функции давления для односкважинной однопластовой системы с заданным забойным давлением

Рассмотрим **задачу 1** в специальной односкважинной однопластовой постановке когда на естественных границах пласта заданы однородные граничные условия (2.106), а на скважине задано постоянное давление p_w. Докажем следующее представление для поля давления пласте:

$$p(x,y,t) = p_w \cdot p_{(x,y,t)p}(1), \qquad (2.108)$$

Рассмотрим его решение при давлении на скважине p_{w1}: $p_1(x,y,t,p_{w1})$. Рассмотрим теперь новое давление на скважине $p_{w2} = \nu p_{w1}$. Решение при таком забойном давлении (условия на внешних границах – те же) p_2 можно выразить через p_1: $p_2(x,y,t,p_{w2}) = \nu p_1(x,y,t,p_{w1})$ - равенство верно вследствие линейности уравнения: так как p_1 удовлетворяет этому уравнению, то и p_2 ему также удовлетворяет. При этом выполняется граничное условие на скважине: давление p_{w2}. Представление (2.108) доказано. Решение $p_{(x,y,t)q}(1) \equiv p(x,y,t,1)$ - есть решение задачи 1 в предположении однородных условий на внешних по отношению к скважине границах и задании на данной скважине условия единичного давления:

$$p^{i}_{(x,y,t)p}\left(1\right)\Big|_{\Gamma_w}=1. \tag{2.109}$$

Построение решения задачи о поле давления при фильтрации в неоднородном пласте

Пусть имеется N_p скважин с заданным забойным давлением (2.102) и N_q скважин с заданным дебитом (2.103). Пусть $p_{res}\left(x,y,t\right)$ - решение **задачи 1** с заданными на всех скважинах условиями нулевого дебита, а на естественных границах пласта – теми же граничными условиями (2.101). То есть $p_{res}\left(x,y,t\right)$ является полем давления, изменяющимся лишь вследствие влияния границ при полном отсутствии скважин, оно удовлетворяет уравнению (2.100) и следующим граничным и начальным условиям:

$$\begin{aligned}
&p_{res}\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^{p}_{\Omega i}}=p_{\Omega i}\left(x,y\right), i=1,..,K_p\\
&\left.\frac{\partial p_{res}\left(x,y,t\right)}{\partial n}\right|_{\Gamma^{q}_{\Omega j}}=C\cdot u_{\Omega j}\left(x,y\right),\ j=1,..,K_q\\
&\lambda_0\oint\limits_{\Gamma^{q}_{wi}}kh\cdot\frac{\partial p_{res}}{\partial n}\cdot dl=0,\ \ i=1,..,N_p\\
&p_{res}\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^{p}_{wi}}=p_{w_i}\left(t\right),\ j=1,..,N_p \qquad .\\
&\lambda_0\oint\limits_{\Gamma^{q}_{wi}}kh\cdot\frac{\partial p_{res}}{\partial n}\cdot dl=0,\ j=1,..,N_q\\
&p_{res}\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^{p}_{wj}}=p_{w_j}\left(t\right),\ j=1,..,N_q\\
&p_{res}\left(x,y,t\right)\Big|_{t=0}=p_0\left(x,y\right)
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Заметим, что $p_{w\_i}\left(t\right)$ и $p_{w\_j}\left(t\right)$ - в общем случае неизвестны, условия, в которые входят данные величины, отражают лишь, тот факт, что давление в каждой точке границы скважины является одинаковым.

Здесь предположим, что начальные и граничные условия согласованы таким образом, что функция $p_{res}\left(x,y,t\right)$ не зависит от времени: $p_{res}\left(x,y,t\right)=p_{res}\left(x,y\right)$. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы начальное условие $p_0\left(x,y\right)$ из (2.100), (2.110) было решением уравнения установившейся фильтрации, то есть решением уравнения вида:

$$\nabla\left(kh\cdot\nabla p_0\right)=0. \tag{2.111}$$

С граничными условиями:

$$
\begin{aligned}
&p_0\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^p_{\Omega i}} = p_{\Omega i}\left(x,y\right), i=1,..,K_p \\
&\left.\frac{\partial p_0\left(x,y,t\right)}{\partial n}\right|_{\Gamma^q_{\Omega j}} = C\cdot u_{\Omega j}\left(x,y\right),\ j=1,..,K_q \\
&\lambda_0 \oint\limits_{\Gamma^q_{wi}} kh\cdot\frac{\partial p_0}{\partial n}\cdot dl = 0,\ \ i=1,..,N_p \\
&p_0\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^p_{wi}} = p_{w\_i},\ j=1,..,N_p \\
&\lambda_0 \oint\limits_{\Gamma^q_{wi}} kh\cdot\frac{\partial p_0}{\partial n}\cdot dl = 0,\ j=1,..,N_q \\
&p_0\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^p_{wj}} = p_{w\_j},\ j=1,..,N_q
\end{aligned}
\quad . \qquad (2.112)
$$

К решению данного уравнения должно стремиться решение уравнения (2.100) на больших временах. Здесь давления p_{w_i} и p_{w_j} - предполагаются постоянными, к ним должны стремиться соответствующие значения при решении уравнения (2.100) с граничными и начальными условиями (2.110) на больших временах.

При таким образом заданном начальном условии – из решения задачи (2.111), (2.112) – решение задачи (2.100), (2.110) не зависит от времени, так как решение задачи (2.100), (2.110) – описывает процесс перераспределения поля давления до некоторого стационарного значения, совпадающего с решением задачи (2.111), (2.112). Однако, если начальное условие совпадает со стационарным распределением поля давления, то решение данной задачи также будет стационарным. Покажем это. Обозначим через p_1 решение задачи (2.111), (2.112). Однако, отсюда следует, что p_1 - есть решение задачи (2.100), (2.110). Действительно: p_1 - удовлетворяет уравнению (2.100), а также граничным условиям (2.110) (дебиты на скважинах нулевые, а забойные давления есть постоянные значения по границе скважины, независящие от времени), p_1 также удовлетворяет начальному условию (2.110) по построению. Вследствие единственности решения задачи (2.100), (2.110) p_1 - является искомым полем. Поэтому: $p_0 = p_{res} = p_1\left(x,y\right)$.

Предположение о том, что начальное условие $p_0\left(x,y\right)$, есть решение стационарной задачи (2.111), (2.112) является естественным и соответствует современным представлениям о процессах, сопровождающих формирование месторождений нефти. Данное предположение отражает естественное допущение, что переходные процессы перераспределения давления при формировании месторождения на момент начала его разработки завершились.

Рассмотрим скважины с заданным на их границе условиями постоянного давления (2.102). Введем обозначение: $d_i = \left(p_{w\_i} - p_{res}\big|_{\Gamma_{w_i}}\right)$ - депрессия на i-ой скважине $i=1,..,N_p$. Будем рассматривать семейство решений $p_p\left(x,y,t,d_i\right)=p^i_{(x,y,t)p}\left(d_i\right)$ уравнения (2.100) с однородными граничными условиями на естественных границах пласта и граничными условиями на скважинах:

$$\begin{aligned}
&p^i_{(x,y,t)p}\Big|_{\Gamma^p_{wi}}=d_i,\\
&p^i_{(x,y,t)p}\Big|_{\Gamma^p_{wj}}=0,\ j\neq i,\ \ j=1,..,N_p\\
&\lambda_0\oint_{\Gamma^q_{wj}} kh\cdot\frac{\partial p^i_{(x,y,t)p}}{\partial n}\cdot dl=0,\ j=1,..,N_q\\
&p^i_{(x,y,t)p}\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^p_{wj}}=p_{wj}\left(t\right),\ j=1,..,N_q
\end{aligned}\quad. \tag{2.113}$$

И с однородным начальным условием. То есть $p^i_{(x,y,t)p}\left(d_i\right)$ - решение уравнения (2.100) с однородными начальными и граничными условиями, при этом на всех скважинах из числа N_p (с заданными давлениями на границе) кроме i-ой заданы нулевые давления, а на всех скважинах из числа N_q (с заданными дебитами) заданы дебиты равные нулю. На i-ой скважине при этом задано забойное давление d_i.

Теперь рассмотрим скважины с заданными дебитами N_q. По аналогии с тем как это было сделано выше, рассмотрим семейство решений уравнения (2.100) $p_q\left(x,y,t,q_{wj}\right)=p^j_{(x,y,t)q}\left(q_{wj}\right)$ со следующими граничными и начальными условиями:

$$\begin{aligned}
&p^j_{(x,y,t)q}\Big|_{\Gamma^p_{wi}}=0,\ i=1,..,N_p\\
&\lambda_0\oint_{\Gamma^q_{wj}} kh\cdot\frac{\partial p^j_{(x,y,t)q}}{\partial n}\cdot dl=q_{wj}\\
&p^j_{(x,y,t)q}\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^p_{wj}}=p_{wj}\left(t\right)\\
&\lambda_0\oint_{\Gamma^q_{wi}} kh\cdot\frac{\partial p^j_{(x,y,t)q}}{\partial n}\cdot dl=0, i\neq j, i=1,..,N_q\\
&p^j_{(x,y,t)q}\left(x,y,t\right)\Big|_{\Gamma^p_{wi}}=p_{wi}\left(t\right), i\neq j, i=1,..,N_q\\
&p^j_{(x,y,t)q}\Big|_{t=0}=0
\end{aligned}\quad. \tag{2.114}$$

То есть $p^j_{(x,y,t)q}\left(q_{wj}\right)$ - это решение уравнения (2.100) с однородными начальными и граничными условиями, при этом на всех скважинах из числа N_p (с заданными давлениями на границе) заданы нулевые давления, а на всех скважинах из числа N_q (с заданными дебитами) кроме j-ой скважины заданы нулевые дебиты. На j-ой скважине при этом задан постоянный дебит q_{wj}.

Выразим общее решение уравнения (2.100) с граничными условиями на естественной границе пласта (2.101), граничными условиями (2.102), (2.103) на скважинах, а также с начальным условием (2.104), то есть решение **задачи 1** (в общей постановке) с учетом доказанных выше представлений:

$$p(x,y,t)=\sum_{i=1}^{N_p} d_i \cdot p^i_{(x,y,t)p}(1)+\sum_{j=1}^{N_q} q_{wj}\cdot p^j_{(x,y,t)q}(1)+p_{res}(x,y), \tag{2.115}$$

где $p^i_{(x,y,t)p}(1)$ и $p^j_{(x,y,t)q}(1)$ - зависят от координат и от времени.

И действительно – данная функция – есть линейная комбинация решений уравнения (2.100), а, следовательно, также является его решением. При этом данная функция удовлетворяет начальным условиям и условиям на естественной границе пласта, а также условиям на скважинах в силу определения соответствующих базисных решений и функции $p_{res}(x,y)$.

Теперь найдем решение **задачи 2**. Для начала выразим значение депрессии $d_i=\left(p(x,y,t)-p_{res}(x,y)\right)\Big|_{\Gamma^p_{wi}}$, $i=1,..,N_p$ на каждой из скважин, на которых задано давление на границе, тогда по определению решений:

$$d_i=\left[\sum_{j=1}^{N_p} d_j\cdot p^j_{(x,y,t)p}(1)+\sum_{j=1}^{N_q} q_{wj}\cdot p^j_{(x,y,t)q}(1)\right]_{\Gamma^p_{wi}}=\sum_{j=1}^{N_p} d_j\cdot p^j_{(x,y,t)p}(1)\Big|_{\Gamma^p_{wi}}=\sum_{i=1}^{N_p} d_j\cdot\delta_{ji}=d_i. \tag{2.116}$$
$$i=1,..,N_p$$

Аналогично выразим депрессию на скважинах с заданным дебитом $i=1,..,N_q$:

$$d_i=\left[\sum_{j=1}^{N_p} d_j\cdot p^j_{(x,y,t)p}(1)+\sum_{j=1}^{N_q} q_{wj}\cdot p^j_{(x,y,t)q}(1)\right]_{\Gamma^p_{wi}}=\sum_{j=1}^{N_p} d_j\cdot p^j_{(x,y,t)p}(1)\Big|_{\Gamma^p_{wi}}+\sum_{j=1}^{N_q} q_{wj}\cdot p^j_{(x,y,t)q}(1)\Big|_{\Gamma^q_{wi}}. \tag{2.117}$$
$$i=1,..,N_q$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}G^p_{ij}(t)=p^j_{(x,y,t)p}(1)\Big|_{\Gamma^p_{wi}}\\ G^q_{ij}(t)=p^j_{(x,y,t)q}(1)\Big|_{\Gamma^q_{wi}}\end{gathered}. \tag{2.118}$$

С учетом данных обозначений (2.117) примет следующий вид:

$$d_i=\sum_{j=1}^{N_p} d_j\cdot G^p_{ij}(t)+\sum_{j=1}^{N_q} q_{wj}\cdot G^q_{ij}(t). \tag{2.119}$$
$$i=1,..,N_q$$

Теперь выразим дебиты на скважинах. Найдем дебиты на скважинах с заданным забойным давлением $i=1,..,N_p$:

$$q_{wi}=\lambda_0\oint\limits_{\Gamma_{wi}^p} kh\cdot\frac{\partial p(x,y,t)}{\partial n}\cdot dl=\sum_{j=1}^{N_p} d_i\cdot\lambda_0\oint\limits_{\Gamma_{wi}^p} kh\cdot\frac{\partial p^j_{(x,y,t)p}(1)}{\partial n}\cdot dl+$$
$$+\sum_{j=1}^{N_q} q_{wj}\cdot\lambda_0\oint\limits_{\Gamma_{wi}^p} kh\cdot\frac{p^j_{(x,y,t)q}(1)}{\partial n}\cdot dl+\lambda_0\oint\limits_{\Gamma_{wi}^p} kh\cdot\frac{p_{res}}{\partial n}\cdot dl\,. \qquad (2.120)$$
$$i=1,..,N_p$$

Последний член равен нулю по определению функции p_{res}. Обозначим:

$$\begin{aligned} D_{ij}^p(t)&=\lambda_0\oint\limits_{\Gamma_{wi}^p} kh\cdot\frac{\partial p^j_{(x,y,t)p}(1)}{\partial n}\cdot dl\\ D_{ij}^q(t)&=\lambda_0\oint\limits_{\Gamma_{wi}^p} kh\cdot\frac{p^j_{(x,y,t)q}(1)}{\partial n}\cdot dl \end{aligned}\,. \qquad (2.121)$$

С учетом этой замены получим для дебита скважин с заданным забойным давлением:

$$\begin{aligned} q_{wi}&=\sum_{j=1}^{N_p} d_i\cdot D_{ij}^p(t)+\sum_{j=1}^{N_q} q_{wj}\cdot D_{ij}^q(t)\\ i&=1,..,N_p \end{aligned}\,. \qquad (2.122)$$

Аналогично для скважин с заданным дебитом получим:

$$q_{wi}=\sum_{j=1}^{N_p} d_i\cdot\lambda_0\oint\limits_{\Gamma_{wi}^p} kh\cdot\frac{\partial p^j_{(x,y,t)p}(1)}{\partial n}\cdot dl+\sum_{j=1}^{N_q} q_{wj}\cdot\lambda_0\oint\limits_{\Gamma_{wi}^p} kh\cdot\frac{p^j_{(x,y,t)q}(1)}{\partial n}\cdot dl=$$
$$=\sum_{j=1}^{N_q} q_{wj}\cdot\lambda_0\oint\limits_{\Gamma_{wi}^p} kh\cdot\frac{p^j_{(x,y,t)q}(1)}{\partial n}\cdot dl=\sum_{j=1}^{N_q} q_{wj}\cdot\delta_{ji}=q_{wi}\,. \qquad (2.123)$$
$$i=1,..,N_q$$

Матричное представление

Рассмотрим решение задачи 2 в матричном представлении. Мы имеем неоднородный пласт, который характеризуется функциями $\kappa=\kappa(x,y)$, $k=k(x,y)$, $h=h(x,y)$. Фильтрация описывается уравнением (2.100). Граничные условия на естественных границах пласта и на скважинах описываются соотношениями (2.110). Как было сказано выше, высокую практическую актуальность имеет решение **задачи 2**. Представим его в матричном виде.

Пусть депрессия на скважинах описывается вектором депрессий: $\vec{d}=\left(d_1,..,d_{N_p},d_{N_p+1}(t),..,d_{N_p+N_q}(t)\right)^T$. Где i-ая координата отражает депрессию на i-ой скважине. Причем первые N_p координат данного вектора отражают депрессию на скважинах с заданным давлением на границе и постоянны (заданы по условию задачи), а следующие N_q координат отражают депрессию на скважинах с заданным дебитом, они неизвестны (их необходимо определить), размерность вектора - $N=N_p+N_q$ равна количеству скважин.

Аналогичным образом вводится вектор дебитов скважин: $\vec{q}=\left(q_{w(1)}(t),..,q_{w\left(N_p\right)}(t),q_{w\left(N_p+1\right)},..,q_{w\left(N_p+N_q\right)}\right)^T$.

Тогда согласно (2.116) - (2.123) решение **задачи 2** для депрессии можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_{N_p} \\ d_{N_p+1}(t) \\ d_{N_p+2}(t) \\ ... \\ d_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ G^p_{N_p,1} & G^p_{N_p,2} & ... & G^p_{N_p,N_p} & G^q_{N_p,N_p+1} & G^q_{N_p,N_p+2} & ... & G^q_{N_p,N} \\ G^p_{N_p+1,1} & G^p_{N_p+1,2} & ... & G^p_{N_p+1,N_p} & G^q_{N_p+1,N_p+1} & G^q_{N_p+1,N_p+2} & ... & G^q_{N_p+1,N} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ G^p_{N,1} & G^p_{N,2} & ... & G^p_{N,N_p} & G^q_{N,N_p+1} & G^q_{N,N_p+2} & ... & G^q_{N,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_{N_p} \\ q_{w\left(N_p+1\right)} \\ q_{w\left(N_p+2\right)} \\ ... \\ q_{w(N)} \end{pmatrix} \qquad (2.124)$$

$N=N_p+N_q$

где:

$$G^p_{ij}(t)=p^j_{(x,y,t)p}(1)\Big|_{\Gamma^p_{wi}}$$
$$G^q_{ij}(t)=p^j_{(x,y,t)q}(1)\Big|_{\Gamma^q_{wi}}.$$

Выражение (2.124) можно также представить в следующем упрощенном виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{d}_p \\ \vec{d}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{G}^p & \hat{G}^q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{d}_p \\ \vec{q}_q \end{pmatrix}, \qquad (2.125)$$

где $\hat{1}$ - единичная матрица, размером $N_p \times N_p$, $\hat{0}$ - нулевая матрица, размером $N_p \times N_q$,

$\hat{G}^p=\begin{pmatrix} G^p_{1,1} & ... & G^p_{1,N_p} \\ ... & ... & ... \\ G^p_{N_q,1} & ... & G^p_{N_q,N_p} \end{pmatrix}$, $\hat{G}^q=\begin{pmatrix} G^q_{1,1} & ... & G^q_{1,N_q} \\ ... & ... & ... \\ G^q_{N_q,1} & ... & G^q_{N_q,N_q} \end{pmatrix}$, $\vec{d}_p=\left(d_1,...,d_{N_p}\right)^T$ - вектор заданных давлений на границе скважин N_p, $\vec{q}_q=\left(q_{w(1)},...,q_{w(Nq)}\right)^T$ - вектор заданных дебитов на скважинах с заданным дебитом N_q, $\vec{d}_q(t)=\left(d_1(t),...,d_{Nq}(t)\right)^T$ - вектор искомых давлений на границе скважин с заданным дебитом N_q.

Аналогичным образом выразим **задачи 2** для дебитов:

(2.116) - (2.123) решение **задачи 2** для депрессии можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dots \\ q_{N_p}(t) \\ q_{N_p+1} \\ q_{N_p+2} \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^p_{1,1} & D^p_{1,2} & \dots & D^p_{1,N_p} & D^q_{1,N_p+1} & D^q_{1,N_p+2} & \dots & D^q_{1,N} \\ D^p_{2,1} & D^p_{2,2} & \dots & D^p_{2,N_p} & D^q_{2,N_p+1} & D^q_{2,N_p+2} & \dots & D^q_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^p_{N_p,1} & D^p_{N_p,2} & \dots & D^p_{N_p,N_p} & D^q_{N_p,N_p+1} & D^q_{N_p,N_p+2} & \dots & D^q_{N_p,N} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_{N_p} \\ q_{w(N_p+1)} \\ q_{w(N_p+2)} \\ \dots \\ q_{w(N)} \end{pmatrix} \tag{2.126}$$

$N = N_p + N_q$

где:

$$D^p_{ij}(t) = \lambda_0 \oint\limits_{\Gamma^p_{wi}} kh \cdot \frac{\partial p^j_{(x,y,t)p}(1)}{\partial n} \cdot dl$$

$$D^q_{ij}(t) = \lambda_0 \oint\limits_{\Gamma^p_{wi}} kh \cdot \frac{p^j_{(x,y,t)q}(1)}{\partial n} \cdot dl.$$

Выражение (2.126) можно также представить в следующем упрощенном виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{q}_p \\ \vec{q}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{D}^p & \hat{D}^q \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{d}_p \\ \vec{q}_q \end{pmatrix}, \tag{2.127}$$

где $\hat{1}$ - единичная матрица, размером $N_q \times N_q$, $\hat{0}$ - нулевая матрица, размером $N_q \times N_p$,

$\hat{D}^p = \begin{pmatrix} D^p_{1,1} & \dots & D^p_{1,N_p} \\ \dots & \dots & \dots \\ D^p_{N_p,1} & \dots & D^p_{N_p,N_p} \end{pmatrix}$, $\hat{D}^q = \begin{pmatrix} D^q_{1,1} & \dots & D^q_{1,N_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ D^q_{N_p,1} & \dots & D^q_{N_p,N_q} \end{pmatrix}$, $\vec{q}_p(t) = \left(q_{w(1)}(t), \dots, q_{w(Nq)}(t)\right)^T$ - вектор искомых дебитов на скважинах с заданным давлением N_p.

2.4.2. Производительность скважин многоскважинной системы на псевдоустановившемся режиме

Коэффициенты G_{ij} и D_{ij} - являются функциями времени и испытывают сильное изменение в процессе неустановившегося режима. Однако с некоторого момента времени, данные коэффициенты меняются слабо [137]. Такой режим работы скважин носит название псевдоустановившийся, а соответствующие коэффициенты будем обозначать G^{ss}_{ij} и D^{ss}_{ij}.

Предположим, что на всех скважинах заданы постоянные забойные давления. Рассмотрим подходы к оценке внешнего поля давления $p_{res}(x,y)$. Во многих практически важных случаях поле $p_{res}(x,y)$ может быть оценено одним значением. При наличии мощного аквифера, за величину данного поля можно взять значение давления в аквифере. Если рассматривать замкнутые системы, то есть такие фильтрационные системы, на внешних границах которых заданы условия отсутствия перетока, то значение поля $p_{res}(x,y)$ можно оценить из метода материального баланса [20].

Динамика среднего пластового давления в замкнутых системах

Рассмотрим многоскважинную однопластовую систему, состоящую из N скважин с заданными забойными давлениями $p_{w\_1},..,p_{w\_N}$. В соответствии с полученным видом решения (2.60) на псевдоустановившемся режиме имеем для дебитов скважин:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}\left(p_{w\_j} - p_{res\_j}\right),\ j=1,..,N\ , \tag{2.128}$$

где $p_{res\_j} = p_{res}(x,y)\big|_{\Gamma_{w_j}}$.

Теперь в соответствии с озвученным выше предположением: $p_{res\_j} \equiv \overline{p}_{res}$, $\forall j=1,..,N$. Получаем:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}\left(p_{wf\_j} - \overline{p}_{res}\right),\ j=1,..,N\ . \tag{2.129}$$

Предположим, что на внешних границах фильтрационной системы заданы условия отсутствия перетока – система замкнута. Таким образом, общий приток жидкости в фильтрационную систему осуществляется через скважины:

$$q_0 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}\left(p_{wf\_j} - \overline{p}_{res}\right). \tag{2.130}$$

С другой стороны среднее пластовое давление выражается следующим образом [20]:

$$\overline{p}_{res}(t) = \overline{p}_{res}^{0} + \frac{1}{V_{por}C_t}\int_0^t q_0(\tau)\,d\tau\ , \tag{2.131}$$

где $\overline{p}_{res}^{0} = \overline{p}_{res}(0)$, C_t - общая сжимаемость системы, $V_{por} = \int_V \phi dV$ - поровый объем системы.

Продифференцируем уравнение (2.131) и подставим в него уравнение (2.130). Получим:

$$\dot{\overline{p}}_{res}(t) = \frac{1}{V_{por}C_t}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}\left(p_{wf\_j} - \overline{p}_{res}(t)\right)\right]. \tag{2.132}$$

Решением данного уравнения с учетом начальных условий есть:

$$\dot{\overline{p}}_{res}(t) = \left[\overline{p}_{res}^{0} - \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss} p_{wf\_j}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}}\right]\cdot\exp\left[-\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}}{V_{por}C_t}\right)\cdot t\right] + \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss} p_{wf\_j}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}}\ . \tag{2.133}$$

Введем следующие обозначения: $\overline{p}_{res}^{ss} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss} p_{wf\_j}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}}$, $\lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}}{V_{por}C_t}$. Получим:

$$\dot{\bar{p}}_{res}(t) = \left[\bar{p}^0_{res} - \bar{p}^{ss}_{res}\right] \cdot \exp\left[-\lambda \cdot t\right] + \bar{p}^{ss}_{res}. \tag{2.134}$$

Видно, что функция давления стремится к стационарному значению $\bar{p}^{ss}_{res}$, а коэффициент λ определяет скорость установления стационарного давления, при этом он не зависит от давлений на скважинах и является характеристикой самой фильтрационной системы.

На практике применение формулы не ограничено только замкнутыми системами. При рассмотрении участков больших месторождений возможно выделить зону вокруг рассматриваемой скважины, ограничив область таким образом, чтобы в нее входили скважины со значениями недиагональных коэффициентов D_{ij} больших заранее определенного значения: $D_{ij} \geq D^0$ (оценки коэффициентов D_{ij} можно получить из решения уравнения Лапласа, как это показано в следующей главе).

Время протекания псевдоустановившегося режима в системе заводнения

Определим время протекания псевдоустановившегося режима в системе заводнения. Его начало определяется концом неустановившегося режима. Время протекания неустановившегося режима можно по результатам численных экспериментов оценить [86]:

$$t_{tr} = 0.1\frac{A}{\kappa}, \tag{2.135}$$

где A - площадь рассматриваемого участка, κ - коэффициент пьезопроводности.

Конец псевдоустановившегося режима можно оценить следующим образом. Будем искать время, когда дебит добывающей скважины станет составлять какую-то часть от дебита на установившемся режиме. Из анализа модели (2.134) можно предложить следующую формулу для определения искомого времени для *j*-ой скважины:

$$t_{pss(j)} = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\left(\bar{p}^{ss}_{res} - \bar{p}^0_{res}\right)\cdot\sum_{i=1}^{N} D^{ss}_{ij}}{\sum_{i=1}^{N} D^{ss}_{ij}\cdot\left(p_{w\_j} - \bar{p}^0_{res}\right)}\right) \tag{2.136}$$

где $\Delta = \dfrac{q_j(t) - q^{ss}_j}{q^{ss}_j}$ - отношение отличия дебита в данный момент от дебита на установившемся режиме к дебиту на установившемся режиме.

Для пятиточечной схемы разработки формула (2.136) в случае одинаковых параметров нагнетательных и добывающих скважин будет выглядеть следующим образом:

$$t_{pss} = \frac{A}{4\pi\kappa}p_{D(pat)}\ln\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\Delta\bar{P}}{\Delta p}\right), \tag{2.137}$$

A - площадь элемента симметрии, κ - коэффициент пьезопроводности.

Запишем выражение (2.137) в промысловых единицах для случая, когда нам необходимо узнать время, спустя которое дебит скважины будет составлять 1% от дебита на установившемся режиме:

$$t_{pss} = 9.21 \cdot 10^{-7} \frac{A}{\kappa} p_{D(pat)} \ln\left(100 \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta p}\right) \tag{2.138}$$

здесь κ - выражается в $м^2/с$, A - в $м^2$, t_{pss} - в сутках.

Производительность скважин многоскважинной системы на псевдоустановившемся режиме

Используя (2.60) и полученное выше выражение для динамики пластового давления, динамику производительности многопластовой системы на псевдоустановившемся режиме можно описать следующим образом:

$$\vec{q} = \hat{D}_{ss} \cdot \left(\vec{d}_{ss} + \vec{d}_i \cdot e^{-\lambda t}\right), \\ \lambda = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}}{V_{por} C_t}, \tag{2.139}$$

где коэффициенты матрицы $\hat{D}_{ss}$ уже постоянны и не зависят от времени, V_{por} - поровый объем пласта, $\vec{d}_{ss} = \left(p_{res\_ss} - p_{w\_1}, .., p_{res\_ss} - p_{w\_N}\right)^T$ - вектор депрессий относительно установившегося среднего пластового давления p_{res_ss}, определяемого формулой (2.123), $\vec{d}_i = \left(p_{res\_ss} - p_{res\_0}, .., p_{res\_ss} - p_{res\_0}\right)^T$ - вектор разницы между начальным средним пластовым давлением и установившимся средним пластовым давлением.

2.4.3. Оценка эффекта от интенсификации добычи

Нерегулярные системы разработки

В данном разделе также получены выражения для оценки эффекта от интенсификации добычи нефти (ИДН) на скважинах с учетом влияния интерференции окружающих скважин. Такого рода мероприятия, интенсифицирующие добычу, весьма часто проводятся на практике. При оценке эффективности этих операций, как правило, используют формулу Дюпюи в применении к интенсифицируемой скважине, считая пластовое давление неизменным. В настоящей работе показано, что это приближение справедливо лишь на отрезке времени, определяемом концом неустановившегося и началом псевдоустановившегося режима и является некорректным для использования в многоскважинной системе, так как завышает эффект от ИДН.

Переход к стационарному состоянию происходит в псевдоустановившемся режиме, когда определяющим становится влияние скважин друг на друга. В результате интерференции скважин дебит соседних скважин уменьшается, поэтому суммарный эффект от интенсификации скважины оказывается меньше, чем эффект, определяемый только по скважине, подвергнутой воздействию. Рассмотрим количественные оценки этих эффектов, полученные с помощью уравнений, описывающих псевдоустановившийся режим в многоскважинных системах и основанные на решении задачи распределения давления в неоднородном пласте, полученном выше.

Обозначим через ΔQ_{ss}^{i} эффект от ИДН в долгосрочном периоде с учетом интерференции скважин. Через ΔQ_{inst}^{i} обозначим эффект от ИДН, рассчитанный с помощью односкважинной модели. С учетом полученных выше решений, можно показать, что эффект от ИДН в долгосрочном периоде ΔQ_{ss}^{i} связан с эффектом от ИДН ΔQ_{inst}^{i} следующим образом:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta Q_{ss}^{i}}{\Delta Q_{inst}^{i}} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss} \cdot \sum_{j=1}^{N} D_{ji}^{ss}}{D_{ii}^{ss}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}\right)}, \tag{2.140}$$

где D_{ij}^{ss} - коэффициенты $\hat{D}_{ss}$.

Рассмотрим пример идентификации добывающей скважины в системе заводнения, состоящей из одной нагнетательной (**I1**) и четырех добывающий скважин (**P1**, **P2**, **P3**, **P4**) (рис. 2.17). Будем считать, что все скважины работают в прямоугольном замкнутом пласте с постоянным забойным давлением на установившемся режиме. Для наглядности будем предполагать пласт однородным.

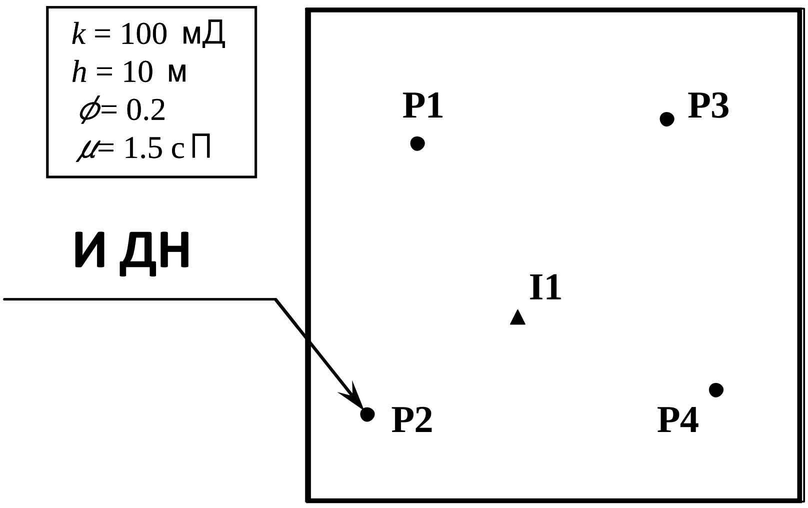


рис. 2.17. Система разработки из четырех добывающих (**P1**, **P2**, **P3**, **P4**) и одной нагнетательной (**I1**) скважин

В многоскважинной системе изменение режима работы одной скважины с целью увеличения ее производительности затрагивает не только саму эту скважину, но и ее соседей. Для примера, рассмотрим прирост добычи от уменьшения забойного давления на скважине **P2** в системе разработке, изображенной на рис. 2.18.

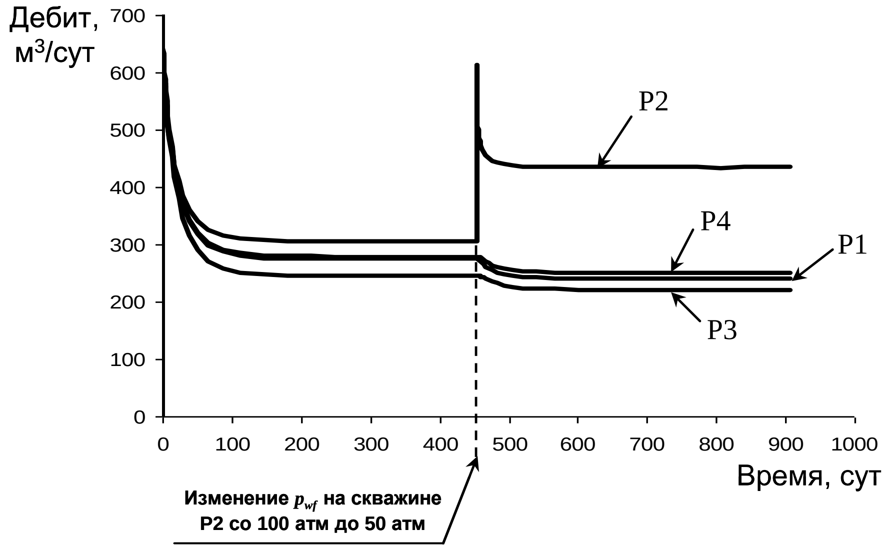


рис. 2.18. Динамика дебитов соседних добывающих скважин до и после оптимизации режима работы скважины Р2 (результаты численного гидродинамического моделирования)

На рис. 2.18 приведена динамика дебитов добывающих скважин до и после изменения режима работы скважины Р2, полученная с помощью численных расчетов. Увеличение дебита за счет снижения забойного давления на рассматриваемой скважине сопровождается постепенным снижением добычи по окружающим скважинам за счет изменения уровня среднего пластового давления (режим работы нагнетательной скважины не менялся).

Сравнение динамики общей добычи по участку с учетом и без учета падения дебита за счет интерференции представлено на рис. 2.19. Как видно из графика если при расчете прироста от оптимизации учитывать изменение уровней добычи по соседним скважинам (или по участку в целом), то эффект оказывается меньше, чем при использовании односкважинного подхода.

Кроме того, становится очевидным, что при расчете эффекта от геолого-технологических мероприятий на скважине (ГТМ) следует всегда указывать временные рамки, в которых производится оценка эффекта. Точками 0 и 1 на рис. 2.19 отмечены моменты времени непосредственно до и после изменения забойного давления на скважине **Р2**. Рабочая точка 2 соответствует окончанию неустановившегося режима на **Р2**. В дальнейшем изменение среднего пластового давления по участку начинает сказывать на дебитах всех остальных скважин, что приводит к их уменьшению и заметному сокращению эффекта от оптимизации режима работы скважины **Р2** в долгосрочном периоде, на стационарном режиме – точка 3 для анализируемой скважины, точка 4 – в целом по участку. Прирост дебита для скважины в этот момент может быть рассчитан с использованием формулы (2.140).

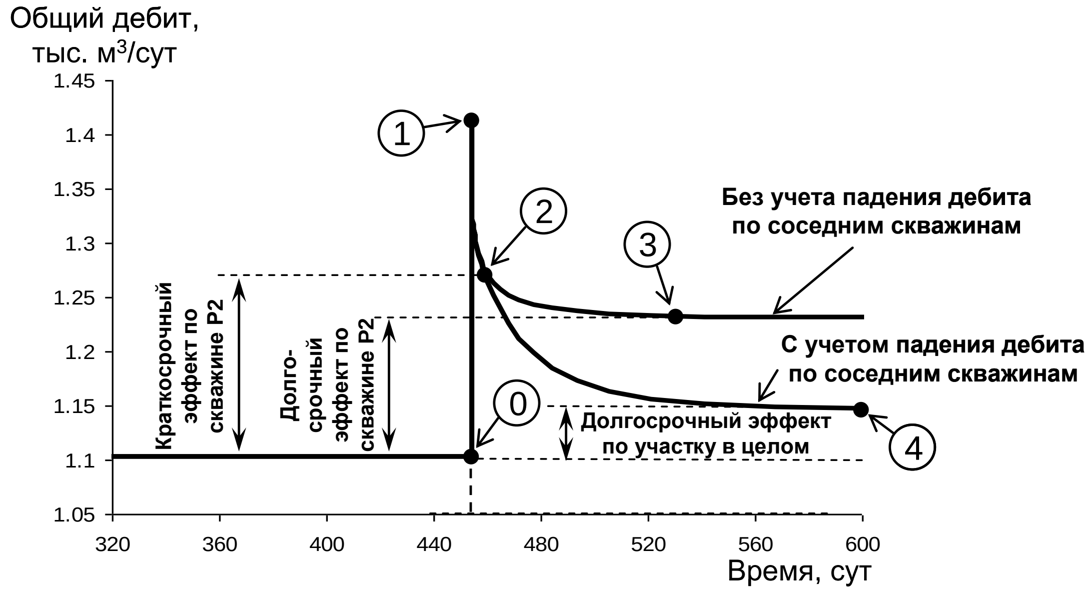


рис. 2.19. Динамика общей добычи по участку до и после интенсификации скважины **Р2** с учетом и без учета интерференции скважин

Регулярные системы разработки

Приближенные формулы для расчета прироста дебита скважины после интенсификации, а также коэффициента падения прироста дебита, ε, показывающего, во сколько раз статический прирост дебита (эффект в долгосрочном периоде) окажется меньше мгновенного прироста (эффекта в краткосрочном периоде), можно получить на основе уравнений, приведенных ниже.

Предположим, что на одной из добывающих скважин в системе разработки (обозначим ее индексом k) осуществили интенсификацию путем изменения забойного давления на величину ...

В краткосрочном периоде, пренебрегая изменением интегрального пластового давления в системе, мгновенный прирост дебита на этой скважине (и в системе в целом) ΔQ_{inst} согласно соотношению составит:

$$\Delta Q_{inst} = \frac{\partial Q_k^P}{\partial p_{wf,k}^P} \Delta p_{wf,k}^P = -\frac{2\pi k_o h}{\mu_o B_o} J_{D,k}^P \, \Delta p_{wf,k}, \tag{2.141}$$

где $J_{D,k}^P$ - безразмерный коэффициент продуктивности добывающей скважины.

В долгосрочном периоде, с учетом изменившегося интегрального пластового давления, статический прирост дебита на k-той скважине ΔQ_{stat} будет равен

$$\Delta Q_{ss} = \frac{dQ_k^P}{dp_{wf,k}^P} \Delta p_{wf,k}^P = -\frac{2\pi k_o h}{\mu_o B_o} J_{D,k}^P \, \Delta p_{wf,k} \left(1 - \frac{\Delta \overline{p}}{\Delta p_{wf,k}}\right), \tag{2.142}$$

где $\Delta \overline{p}$ - изменение среднего пластового давления.

Предположим, что на всех добывающих скважинах забойное давление одинаковое и равно p_{wf}^P, и на всех нагнетательных скважинах забойное давление также одинаковое и равно p_{wf}^I. Тогда выражение для интегрального пластового давления примет вид:

$$\bar{p} = \alpha p_{wf}^{I} + \left(1-\alpha\right) p_{wf}^{P}, \qquad (2.143)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{M_T} \dfrac{\sum_{i=1}^{N_P} J_{D,i}^{P}}{\sum_{j=1}^{N_I} J_{D,j}^{I}}}. \qquad (2.144)$$

С учетом (2.143) выражение (2.142) можно записать в следующем виде:

$$\Delta Q_{ss} = -\frac{2\pi k_o h}{18.42 \mu_o B_o} J_{D,k}^{P} \Delta p_{wf,k} \alpha . \qquad (2.145)$$

Таким образом, коэффициент падения прироста дебита после интенсификации ε, показывающий, во сколько раз статический прирост дебита (эффект в долгосрочном периоде) меньше мгновенного прироста (эффекта в краткосрочном периоде), будет равен

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_{ss}}{\Delta Q_{inst}} = \alpha . \qquad (2.146)$$

В случае если в системе разработки все добывающие и нагнетательные скважины имеют один и тот же коэффициент продуктивности (т.е. $J_{D,i}^{P} = J_{D,j}^{I}$, $i = 1..N_P$, $j = 1..N_I$), то выражение (2.146) с учетом определения (2.144) примет вид:

$$\varepsilon = \frac{M_T}{P/I + M_T}, \qquad (2.147)$$

где $P/I \equiv \dfrac{N_P}{N_I}$ – отношение количества добывающих и нагнетательных скважин в системе, M_T – соотношение подвижностей вытесняющего агента и нефти [119], [120]. Зависимость коэффициента падения прироста суммарного дебита после интенсификации от соотношения подвижностей для различных систем разработки показана на рис. 2.20. Из приведенного графика видно, что, например, для $M_T = 1$ снижение мгновенного прироста от интенсификации добывающей скважины в долгосрочном периоде составит в пятиточечной системе разработки ($P/I = 1$) 50%, в семиточечной ($P/I = 2$) – 33%, в девятиточечной ($P/I = 3$) – 25%. Такое уменьшение эффекта от интенсификации происходит за счет уменьшения интегрального пластового давления и влияния изменения режима работы интенсифицируемой скважины на окружающие скважины.

Предположим, что система разработки настраивается таким образом, чтобы фильтрационное сопротивление в ней было минимально (так должно быть, исходя из принципа минимума диссипации энергии). Это может происходить, например, за счет образования спонтанных техногенных трещин гидравлического разрыва пласта (трещин «авто-ГРП»). Можно показать, что при этом будет верно следующее соотношение:

$$P / I = \sqrt{M_T} \ . \tag{2.148}$$

Таким образом, для «идеальной» системы разработки, пропускная способность (продуктивность) которой максимальна, коэффициент падения прироста дебита после интенсификации будет равен

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{M_T}}} . \tag{2.149}$$

Зависимость коэффициента падения прироста дебита от соотношения подвижностей в случае «идеальной» системы разработки приведена на рис. 2.20 в виде пунктирной линии. Заметим, что ε в этом случае зависит только от M_T.

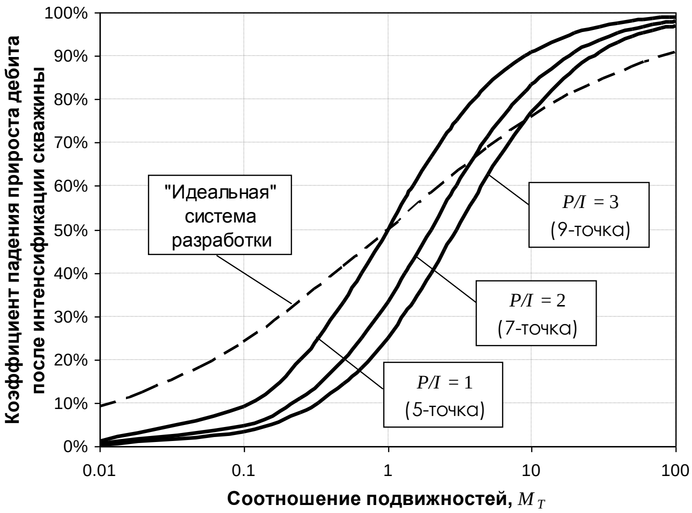


рис. 2.20. Зависимость коэффициента падения прироста суммарного дебита после интенсификации от соотношения подвижностей воды и нефти для различных систем разработки, а также для «идеальной» системы разработки с максимальной пропускной способностью

3. Численно-аналитические методы идентификации параметров неоднородного пласта

3.1. Оценка взаимовлияния скважин друг на друга, определение слабодренируемых участков

3.1.1. Постановка задачи

В данном разделе рассмотрим метод идентификации параметров неоднородной пористой среды, основанный на полученном выше псевдостационарном приближении (2.139) решения **задачи 2** в однопластовой постановке (2.124), (2.126).

Пусть на всех скважинах заданы забойные давления: $N = N_p$. В матричном представлении решение **задачи 2** можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ \dots \\ q_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1,1}^{ss} & \dots & D_{1,N}^{ss} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{N,1}^{ss} & \dots & D_{N,N}^{ss} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} p_{w\_1} - p_{res\_ss} \\ \dots \\ p_{w\_1} - p_{res\_ss} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{res\_0} - p_{res\_ss} \\ \dots \\ p_{res\_0} - p_{res\_ss} \end{pmatrix} \cdot e^{-\lambda t} \right),$$
$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} D_{ij}^{ss}}{V_{por} C_t}. \tag{3.1}$$

Элементы D_{ij}^{ss} матрицы (индекс «ss» в дальнейшем будем опускать понимая под D_{ij} и G_{ij} их установившийся значения) отражает то какое влияние на дебит *i*-ой скважины оказывает изменение давления на *j*-ой скважине.

В общем случае коэффициенты матрицы $\hat{D}_{ss}$ отражают неоднородность пористой среды, в которой происходит фильтрация. Основная мысль предлагаемого метода по идентификации параметров пористой среды заключается в уточнении коэффициентов рассматриваемых матриц из данных эксплуатации скважин. Имея в распоряжении данные об элементах матрицы $\hat{D}_{ss}$ становится возможным делать предсказания о взаимовлиянии скважин друг на друга, а также прогнозы при изменении способов эксплуатации и режимов работы скважин.

На скважинах заданы постоянные давления p_{w_i}. Выше было показано, что фильтрацию в такой системе можно представить в виде (3.1). Пусть мы имеем следующие временные ряды, характеризующие информацию о наблюдении за фильтрационной системой:

$$\left\{ q_i\left(t_j\right) \right\}_{j=1}^{K_i}, \left\{ p_{wfi}\left(t_j\right) \right\}_{j=1}^{K_i}, i = 1,..,N. \tag{3.2}$$

где K_i - количество точек-замеров дебита по i-ой скважине. $\left\{ q_i\left(t_j\right) \right\}_{j=1}^{K_i}$, $\left\{ p_{wfi}\left(t_j\right) \right\}_{j=1}^{K_i}$ - дебит и забойное давление *i*-ой скважины в момент времени t_j.

Необходимо найти коэффициенты матрицы $\hat{D}_{ss}$, такие, чтобы они доставляли минимум следующей целевой функции:

$$E(q) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{K_j} \omega_j^i\left(t_j\right) \cdot \left(q_i\left(t_j\right) - q_{i[\hat{D}]}\left(t_j, p_{wfi}\left(t_j\right)\right) \right)^2,$$
$$D_{ij} : E(q) \xrightarrow{\quad} \min, \quad i, j = 1,..,N, \tag{3.3}$$

где $q_{i[\hat{D}]}$ - расчетные дебиты, ω_j^i - весовые коэффициенты, равные нулю, если i-ая скважина работает на неустановившемся режиме в момент времени t_j и единице в обратном случае:

$$\omega_j\left(t_j\right)=\begin{cases}0, \ t_j < t_{pss} \\ 1, \ t_j \ge t_{pss}\end{cases}, \tag{3.4}$$

где t_{pss} - время наступления псевдоустановившегося режима. Это время можно оценить, зная закрепленные проницаемости на скважинах. Если эти значения известны с большой погрешностью, то их также можно уточнить из данных неустановившегося режима. Методы такого уточнения изучаются в следующей главе. Таким образом заданный вектор весовых коэффициентов нивелирует зависимость целевой функции от данных эксплуатации на неустановившемся режиме.

3.1.2. Регуляризация решения обратной задачи

Задача в озвученной выше постановке крайне неустойчива и неединственна. В данном разделе описаны методы по дополнительной регуляризации решения обратной задачи идентификации элементов матрицы $\hat{D}_{ss}$ по данным нормальной эксплуатации.

Анализ временных рядов на разных интервалах

Для регуляризации поставленной выше задачи в работе предлагается разделить идентификацию диагональных и недиагональных элементов матрицы $\hat{D}_{ss}$. Идентификацию диагональных элементов предлагается производить на неустановившемся режиме, а недиагональные элементы определять в процессе псевдоустановившегося режима с учетом уже определенных диагональных элементов. При идентификации параметров пласта по данным работы скважины на неустановившемся режиме достаточно использовать соответствующую односкважинную модель, так как на данном режиме остальные скважины системы не влияют на данную скважину. Таким образом задача (3.3) решается в два этапа: на первом этапе уточняются диагональные элементы:

$$\begin{gathered}F_i\left(q\right)=\sum_{j=1}^{K_j}\eta_j^i\left(t_j\right)\cdot\left(q_i\left(t_j\right)-q_{i[1]}\left(t_j\right)\right)^2, \ i=1,..,N, \\ D_{ii}:F_i\left(q\right)\longrightarrow\min, \ \ i=1,..,N,\end{gathered} \tag{3.5}$$

где $q_{i[1]}$ - вычисленные значения для односкважинных моделей, η_j^i - весовые коэффициенты равные единице при работе скважины на неустановившемся режиме и нулю в обратном случае; на втором этапе уточняются недиагональные элементы (3.1). Предлагаемая схема идентификации параметров многоскважинной фильтрационной системы является более устойчивой, так как определение диагональных элементов является независимым и производится с помощью относительно простых односкважинных моделей, имеющих меньшую размерность вектора неизвестных параметров.

Начальное приближение для искомых коэффициентов

В качестве первого приближения для коэффициентов матрицы $\hat{D}_{ss}$ возьмем решение упрощенной задачи для установившейся фильтрации, где в качестве проницаемости и пористости целесообразно взять средние ожидаемые значения. Будем предполагать, что все скважины являются вертикальными и имеют круглую форму. Трещины ГРП будем учитывать через скин-фактор [142].

Поставим эту задачу:

Будем искать решение уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 . \tag{3.6}$$

Граничные условия на скважинах:

$$p\big|_{\Gamma_{wi}^p} = p_{w\_i} . \tag{3.7}$$

Будем также предполагать, что пласт имеет форму круга, его границы достаточно удалены от скважин, так, что можно полагать их местоположение в центре данного пласта:

$$p\big|_{\Gamma_{\Omega}^p} = p_e . \tag{3.8}$$

Решение такой задачи для единичной скважины можно приближенно представить в следующем виде:

$$p\left(r_i\right) = p_e - \frac{q_{wi}}{2\pi k_0 \lambda_0 h} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right), \tag{3.9}$$

где r_e - радиус пласта, $q_{wi} = \lambda_0 k_0 h \oint\limits_{\Gamma_{wi}} \frac{\partial p}{\partial n} \cdot dl$ - дебит i-ой скважины, r_i - расстояние от i-ой скважины до соответствующей точки пласта.

Теперь рассмотрим N таких скважин. В соответствии с принципом суперпозиции давление в произвольной точке пласта будет следующим:

$$p\left(r_j\right) = p_e - \frac{1}{2\pi k_0 \lambda_0 h} \sum_{i=1}^{N} q_{wi} \ln\left(\frac{r_e}{r_{ij}}\right), \tag{3.10}$$

где r_{ij} - расстояние от i-ой скважины до r_j-ой точки пласта.

Очевидно, что давление на скважинах выражается следующим способом:

$$d_i = p_{wi} - p_e = -\frac{1}{2\pi k_0 \lambda_0 h} \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{N} q_{wj} \ln\left(\frac{r_e}{r_{wij}}\right) - \frac{1}{2\pi k \lambda_0 h} q_{wi} \ln\left(\frac{r_e}{r_{wi}}\right), \tag{3.11}$$

где r_{wij} - расстояние между i-ой и j-ой скважинами.

С учетом скин-факторов, если скважины стимулированы:

$$d_i = p_{wi} - p_e = -\frac{1}{2\pi k_0 \lambda_0 h} \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{N} q_{wj} \ln\left(\frac{r_e}{r_{wij}}\right) - \frac{q_{wi}}{2\pi k \lambda_0 h}\left(\ln\left(\frac{r_e}{r_{wi}}\right) + s_i\right), \tag{3.12}$$

где s_i - скин-фактор i-ой скважины.

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_N \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\pi k_0 \lambda_0 h}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & s_2 \end{pmatrix}\right) \equiv \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{N1} & \dots & G_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{w1} \\ \dots \\ q_{wN} \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

где $a_{ij} = \ln\left(\frac{r_e}{r_{wij}}\right)$, $G_{ij} = -\frac{1}{2\pi k_0 \lambda_0 h}\left(a_{ij} - \delta_{ij} s_j\right)$. Мы видим, что коэффициенты матрицы $\hat{G}_{ss}$, как следовало ожидать, зависят только от расстояния между скважинами.

Найдем обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} q_{w1} \\ \dots \\ q_{wN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{N1} & \dots & G_{NN} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{N1} & \dots & D_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_N \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Элементы данной матрицы и будут служить первым приближением при поиске уточненных параметров, назовем их D_{ij}^0.

Верхние и нижние пределы изменения $D_{ij}^{\max}$ и $D_{ij}^{\min}$ найдем исходя из возможных изменений проницаемости на рассматриваемом участке $k^{\min}$ и $k^{\max}$, а также из максимальных и минимальных значений скин-фактора $s^{\min}$ и $s^{\max}$.

Если мы рассматриваем пласт, в котором из данных геофизических исследований (ГИС) или из данных гидродинамических исследований (ГДИ) известны данные о закрепленной на скважинах проницаемости и мощности, то в качестве начального приближения исходя из приближенного решения задачи нахождения стационарного поля давления при фильтрации в неоднородном пласте могут выступать следующие коэффициенты:

$$a_{ij} = \ln\left(\frac{r_e}{r_{wij}}\right),\ G_{ij} = -\frac{a_{ij}}{2\pi k_{ij}\lambda_0 h_{ij}} - \frac{1}{2\pi\lambda_0}\frac{\delta_{ij}s_j}{\delta_{ij}k_j \cdot \delta_{ij}h_j}, \tag{3.15}$$

где $k_{ij} = \frac{k_i + k_j}{2}$, $h_{ij} = \frac{h_i + h_j}{2}$. Соответствующие коэффициенты матриц получим из нахождения обратной матрицы: $\hat{D} = \hat{G}^{-1}$. Здесь также можно оценить максимальные и минимальные значения, которые могут принимать каждый из коэффициентов матрицы $\hat{D}$, путем нахождения элементов матрицы $\hat{G}$ для максимальных и минимальных значений проницаемости дифференциально по каждой из скважин:

$$\begin{aligned} G_{ij}^{\max} &= -\frac{a_{ij}}{2\pi k_{ij}^{\max}\lambda_0 h_{ij}^{\max}} - \frac{1}{2\pi\lambda_0}\frac{\delta_{ij}s_j^{\max}}{\delta_{ij}k_j^{\max} \cdot \delta_{ij}h_j^{\max}}, \\ G_{ij}^{\min} &= -\frac{a_{ij}}{2\pi k_{ij}^{\min}\lambda_0 h_{ij}^{\min}} - \frac{1}{2\pi\lambda_0}\frac{\delta_{ij}s_j^{\min}}{\delta_{ij}k_j^{\min} \cdot \delta_{ij}h_j^{\min}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.1.3. Примеры идентификации степени взаимовлияния скважин для выявления слабодренируемых зон

Рассмотрим систему скважин, работающих с постоянным забойным давлением. Эффект перехода скважин на другое забойное давление будем моделировать с помощью принципа суперпозиции. Рассмотрим следующее решение задачи о поле давления при фильтрации в неоднородном пласте: $p\left(x, y, t, p_{w1}^0, p_{w2}^0, .., p_{wK}^0, .., p_{wN}^0\right)$. Пусть в моменты времени $\left\{t_m\right\}_{m=1}^M$ на первых k скважинах меняется забойное давление $\left\{p_{wi}^m\right\}_{m=1}^M$, $i=1,..,K$ (скважины всегда можно переномеровать таким образом). Тогда решение исходной задачи можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}\bar{p}\left(x, y, t\right) = p\left(x, y, t, p_{w1}^0, p_{w2}^0, .., p_{wK}^0, .., p_{wN}^0\right) + \\ + \sum_{m=1}^{M} p_m\left(x, y, t-t_m, p_{w1}^m - p_{w1}^{m-1}, p_{w2}^m - p_{w2}^{m-1}, .., p_{wK}^m - p_{wK}^{m-1}, 0, .., 0\right)\end{gathered}, \qquad (3.17)$$

при этом начальные и граничные условия для p_m однородны.

Пример 1

Рассмотрим пример многосважинной системы, изображенный на рис. 3.1. Из данных динамики дебитов и забойных давлений уточним коэффициенты матрицы $\hat{D}_{ss}$. На рис. 3.1 изображены недиагональные элементы матрицы $\hat{D}_{ss}$ в виде отрезков разной относительной длины, отображающих величину того или иного коэффициента. Очевидно, что чем большее значение имеет данный коэффициент, тем более сильное влияние оказывают друг на друга данные скважины.

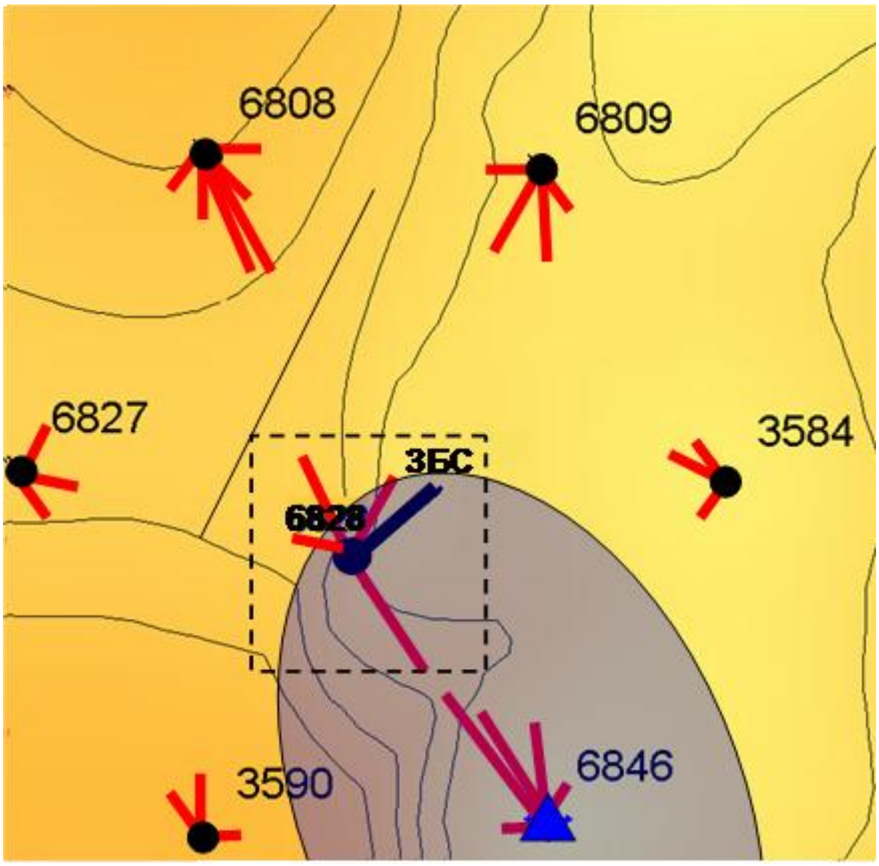


рис. 3.1. Многоскважинная система пример 1

На скв. 6828 резко выросла обводненность и на ней было решено провести зарезку бокового ствола (ЗБС). На рис. 3.1 показано направление второго ствола. Однако, как видно из рисунка нагнетательная скважина 6846, с которой пришел фронт воды, так хорошо взаимодействует и со скв. 6809, несмотря на большое расстояние между ними. Отсюда можно сделать вывод, что направление второго ствола выбрано неверно, и, скорее всего на скважине также будет большая обводненность. Данное предположение подтвердилось по факту вывода на режим второго ствола (см. рис. 3.2): при остановочной обводненности в 90 %, запускная обводненность составила 83 % и быстро выросла.

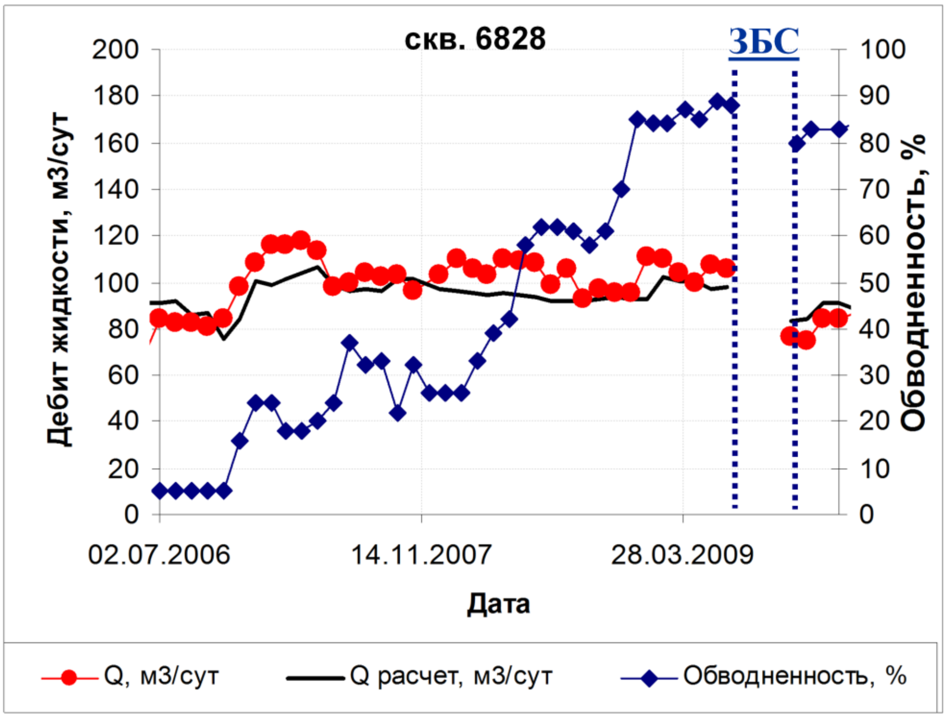


рис. 3.2. Сравнение расчетной и фактической динамики дебита для скв. 6828 пример 1

Пример 2

Рассмотрим второй пример. На рис. 3.3 изображена многоскважинная система. Аналогично предыдущему случаю были найдены и графически представлены коэффициенты матрицы $\hat{D}_{ss}$. Видно, что скважина 5578 резко обводнилась (см. рис. 3.4). Причем, судя по коэффициентам $\hat{D}_{ss}$, причина обводнения - нагнетательная скважина 3200. Из рисунка также видно, что скважина 3200 хорошо взаимодействует со скважинами 3199 и 5577. При этом остальные нагнетательные скважины системы нагнетают воду относительно равномерно. На скважине сделали также ЗБС, причем было выбрано верное направление – от фронта нагнетаемых скважиной 3200 вод. Это подтвердилось и по результатам вывода второго ствола на режим: при остановочной обводненности в 92 % запускная обводненность второго ствола составила около 10 %.

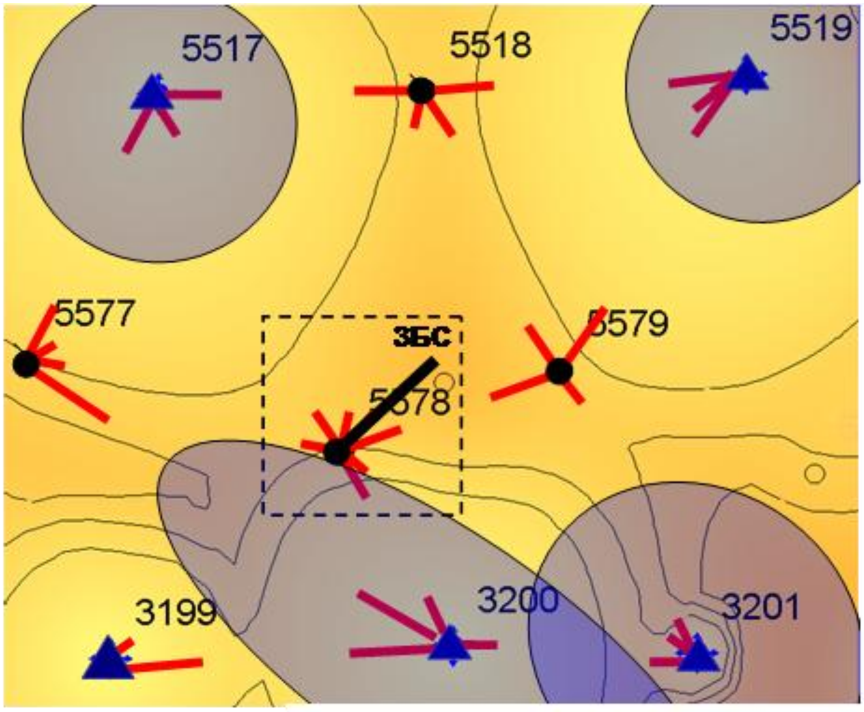


рис. 3.3. Многоскважинная система пример 2

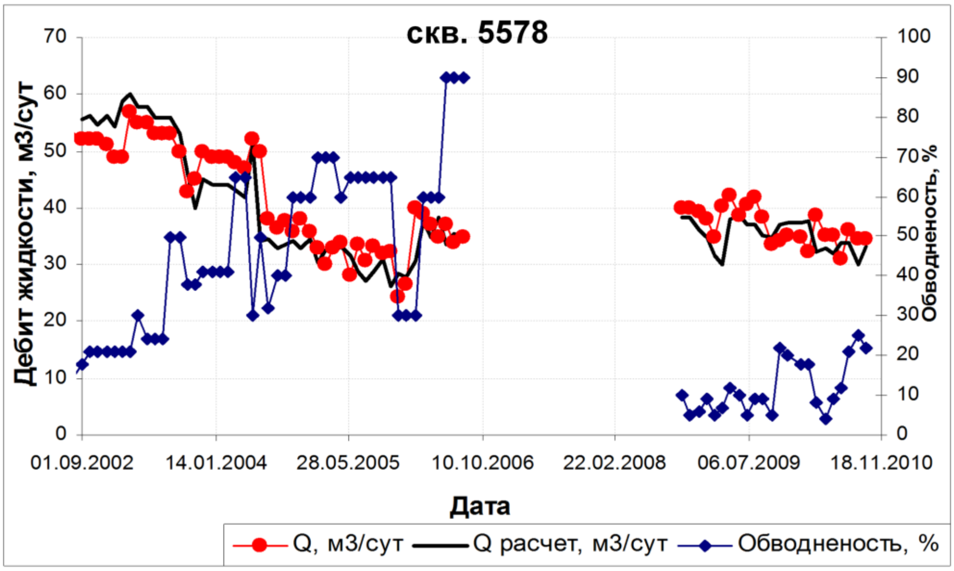


рис. 3.4. Сравнение расчетной и фактической динамики дебита для скв. 6828 пример 1

Представленные примеры демонстрируют подходы по идентификации слабодренируемых невырабатываемых участков залежи по результатам анализа данных нормальной эксплуатации с помощью предлагаемого в данной работе метода. Однако область применения рассматриваемого подхода гораздо выше. Идентификация коэффициентов матрицы $\hat{D}_{ss}$ дает возможность сделать корректный прогноз эффективности геолого-технологических мероприятий, определить оптимальный режим разработки участка месторождения, определить проблемные участки и т.д.

3.2. Идентификация параметров неоднородного расчлененного коллектора

В разделе предложена модель для описания строения неоднородного расчлененного коллектора, а также модель расчета производительности скважины в таком коллекторе. Модель позволяет адекватно объяснить эффект сверхпадения дебита новых скважин, разрабатывающих данные пласты. На основе разработанных выше алгоритмов представлен подход к определению гидропроводностей связанной и несвязанной частей пласта, разрабатываемого заводнением. Способ основан на комбинировании результатов исследований продуктивного пласта на неустановившемся режиме с данными о работе скважины на установившемся режиме. Предлагается метод прогнозирования производительности новых скважин, планируемых к бурению.

При заводнении низкопроницаемых пластов не редка ситуация, когда только часть продуктивного горизонта простирается от добывающей до нагнетательной скважины, а оставшаяся часть коллектора выклинивается в межскважинное пространство и вскрывается только одним типом скважин. Работа новых добывающих скважин в данных пластах отличается высоким темпом снижения добычи жидкости, а при остановке для ремонта нагнетательных скважин, их разрядка занимает длительное время (см. рис. 3.5, рис. 3.6).

При разработке таких коллекторов возникает ряд проблем:

1. Значения пусковых дебитов новых скважин, определенных с помощью совместного применения модели системы однородный пласт-скважина [72] и карты проницаемости (построенной по результатам гидродинамических исследований скважин (ГДИС), данных анализа керна, данных нормальной эксплуатации и т.д.), с необходимой точностью согласуются с фактическими данными. Однако расчетный темп снижения добычи существенно выше фактического (см. рис. 3.5).

2. Невозможно своевременно разделить влияние на снижение производительности скважины уменьшения пластового давления из-за несформированной системы поддержания пластового давления (ППД) во время разбуривания участка и пониженных по сравнению с прогнозом эффективных фильтрационных свойств неоднородной среды. Это может привести к ошибочным решениям по ускорению перевода нагнетательных скважин (без отработки на нефть), что сказывается на эффективности разработки в целом.

3. Отсутствие физически содержательных аналитических моделей для интерпретации сверхлимитного падения дебита скважин ведет к проблемам в планировании добычи от участков, вводимых в разработку. Кроме того, использование традиционного подхода планирования темпа падения на основании статистики работы скважин прилегающих зон недопустимо, вследствие сильных отличий фильтрационно-емкостных свойств участков, разрабатываемых в текущий период и участков планируемых к бурению.

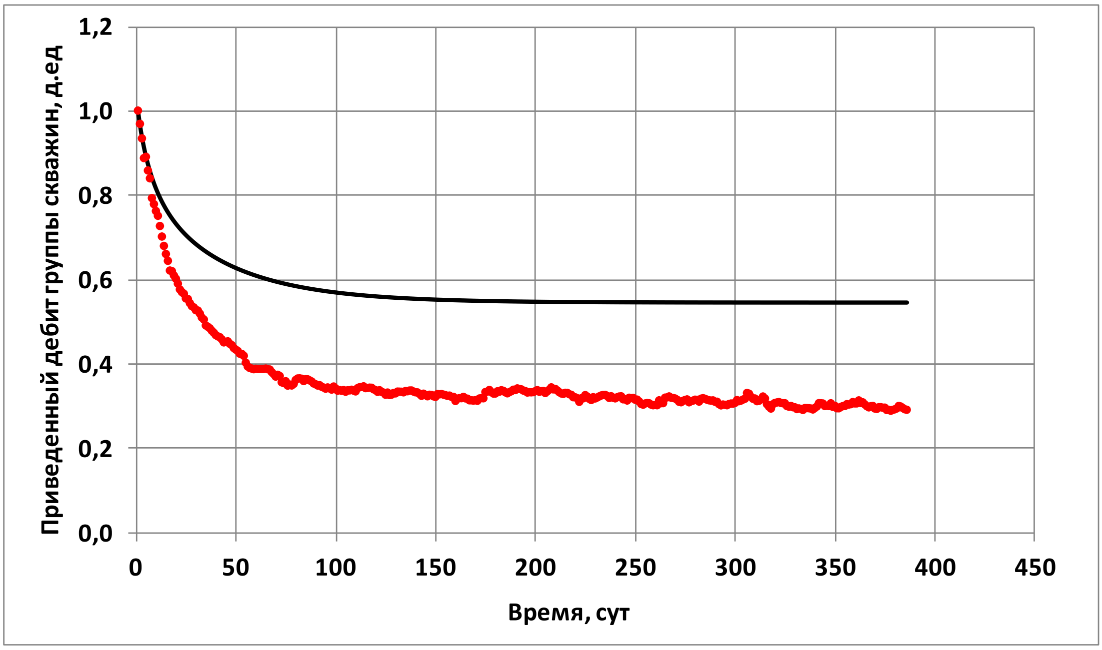


рис. 3.5. Сравнение фактического и рассчитанного темпов падения жидкости группы новых скважин:

- фактические данные;

- расчетная динамика с помощью модели работы скважины в однородном изотропном пласте.

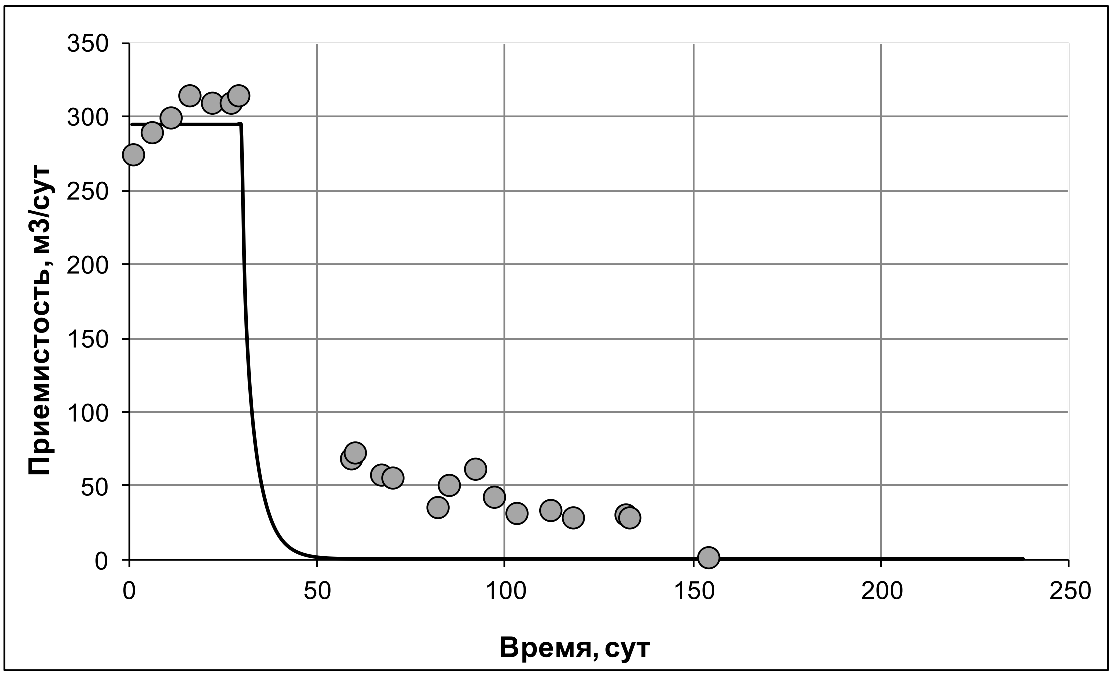


рис. 3.6. Пример снижения приемистости нагнетательной скважины после ее остановки:

- фактические данные;

- расчетная динамика с помощью модели работы скважины в однородном изотропном пласте.

3.2.1. Описание статистических характеристик неоднордного расчлененного коллектора

Предполагается, что высокое снижение дебитов новых скважин, а также длительная разрядка нагнетательных скважин связана с присутствием изолированных прослоев – линз – песчаных тел, вскрываемых только одним типом скважин (см. рис. 3.7). Вследствие отсутствия перетока на границе линз, часть продуктивного пласта на добывающих скважинах работает на истощение, а часть продуктивного пласта на нагнетательных скважинах имеет повышенное поровое давление. Это является причиной высокого темпа снижения дебита жидкости добывающих скважин и длительной разрядки нагнетательных.

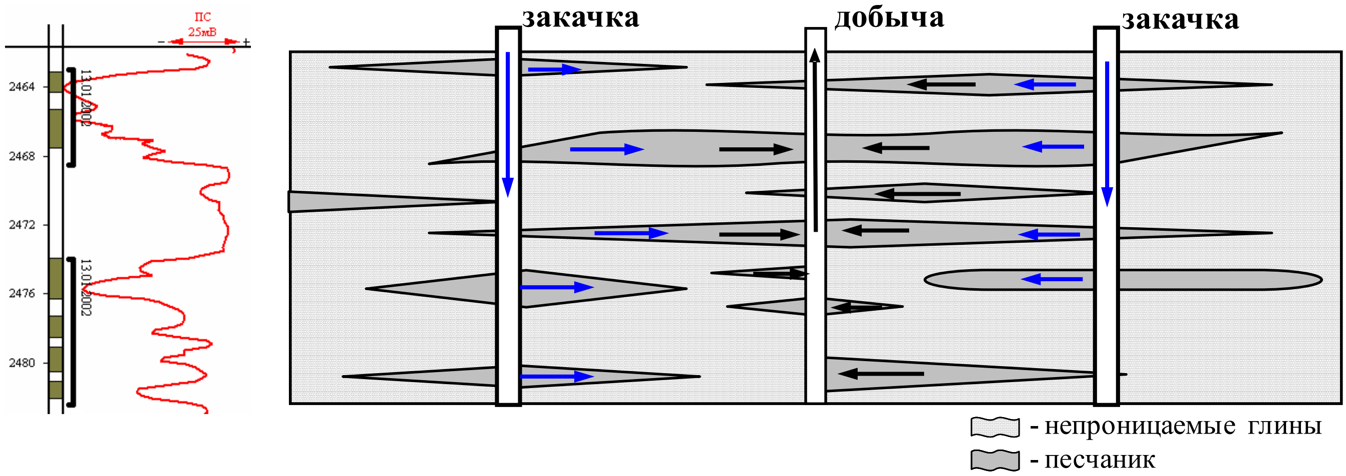


рис. 3.7. Строение неоднородного расчлененного коллектора

Описанный выше неоднородный коллектор будем моделировать совокупностью песчаных тел различного размера. Размеры песчаных тел будем описывать с помощью логнормального распределения с плотностью вероятностей $f(r)$.

Рассмотрим песчаное тело и сетку скважин (см.рис. 3.8). Для произвольной (примем для определенности - пятиточечной) системы разработки (рис. 3.8, а) существует несколько вариантов взаимного расположения скважин и песчаного тела в пределах элемента симметрии системы разработки:

0. тело не вскрывает ни одна скважина,
1. тело вскрывает одна (нагнетательная или добывающая) скважина,
2. тело вскрывает две скважины (нагнетательная и добывающая).

а.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　б.

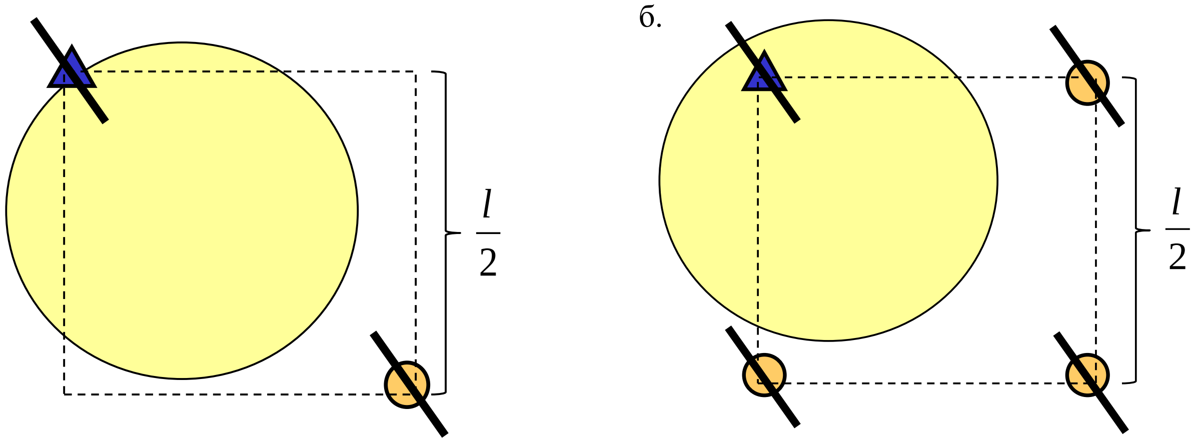


рис. 3.8. Примеры взаимного расположения сетки скважин и песчаного тела:
а. - пятиточечная система разработки;
б. - дявятиточечная система разработки.

Обозначим вероятности 0-го, 1-го и 2-го случаев через ξ_0, ξ_1 и ξ_2 соответственно. Для определения коэффициентов гидродинамической несвязности коллектора необходимо знать зависимость данных вероятностей от размера тела: $\xi_i(r)$. В общем случае, когда тела имеют сложную форму или необходим учет трещины ГРП значительной протяженности, вычисление данных вероятностей может потребовать использования метода Монте-Карло [130, 134]. В случае, когда песчаное тело имеет относительно простую форму, система разработки регулярная, а полудлина трещин ГРП много меньше среднего расстояния между скважинами, эти вероятности ξ_0, ξ_1 и ξ_2 можно вычислить аналитически.

На рис. 3.9 изображены зависимости рассматриваемых вероятностей от размера тела для плотности сетки скважин $A = 25 га / скв$. Так как три рассматриваемых случая включают все возможные события для пятиточечной системы (тело вскрывает одна, две или вообще не вскрывает ни одна из скважин), то очевидно, что: $\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 = 1$, что также отражено на графике.

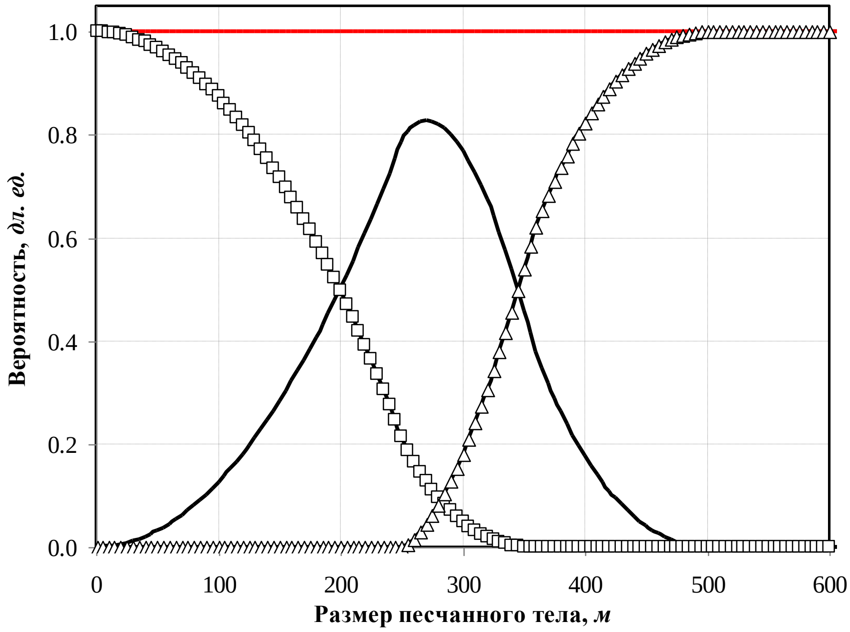


рис. 3.9. Зависимости вероятностей вскрытия и не вскрытия песчаного тела различного размера для пятиточечной системы разработки:

- Вероятность ξ_0, что тело не вскрывает ни одна скважина;

- Вероятность ξ_1, что тело вскрывает одна (нагнетательная или добывающая) скважина;

- Вероятность ξ_2, что тело вскрывают две скважины (нагнетательная и добывающая);

- $\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 = 1$.

С помощью данных величин можно вычислить вероятность для тела данного размера быть не вовлеченным в разработку (то есть быть вскрытым только нагнетательной или вообще не быть вскрытым ни одной из скважин), быть вскрытым только добывающими скважинами или одновременно всеми типами скважин. Для пятиточечной системы эти вероятности выражаются следующим образом, соответственно:

$$\begin{aligned} &\xi^{невскр}(r) = \xi_0(r) + 0.5\xi_1(r) \\ &\xi^{несв}(r) = 0.5\xi_1(r) \\ &\xi^{дрен}(r) = \xi_2(r) \end{aligned} \quad , \tag{3.18}$$

Одновременно с этим существует также вероятность появления тела данного размера. Она выражается через введенную выше функцию плотности вероятности распределения песчаных тел по размеру $f(r)$. Перемножив вероятность тела данного размера быть вскрытым добывающей и нагнетательной скважинами $\xi^{дрен}(r)$ на плотность вероятности возникновения данного тела $f(r)$, получим модифицированную плотность вероятности, отражающую функцию распределения для тел, вовлеченных в заводнение (вскрытых добывающими и нагнетательными скважинами): $f^{дрен}(r) = \xi_2(r) f(r)$. Аналогично, для пятиточки: $f^{невскр}(r) = \left[\xi_0(r) + 0.5\xi_1(r)\right] f(r)$, $f^{несв}(r) = 0,5\xi_1(r) f(r)$.

На рис. 3.10 изображены модифицированные плотности вероятностей $f^{вскр}(r)=\left[1-\xi_0(r)-0.5\xi_1(r)\right]f(r)$, $f^{дрен}(r)$, $f^{несв}(r)$ соответственно вовлеченных (тел охваченных разработкой), дренируемых тел и тел, несвязанных с системой ППД, а также плотность вероятности распределения песчаных тел по размерам $f(r)$ на примере пятиточечной системы разработки.

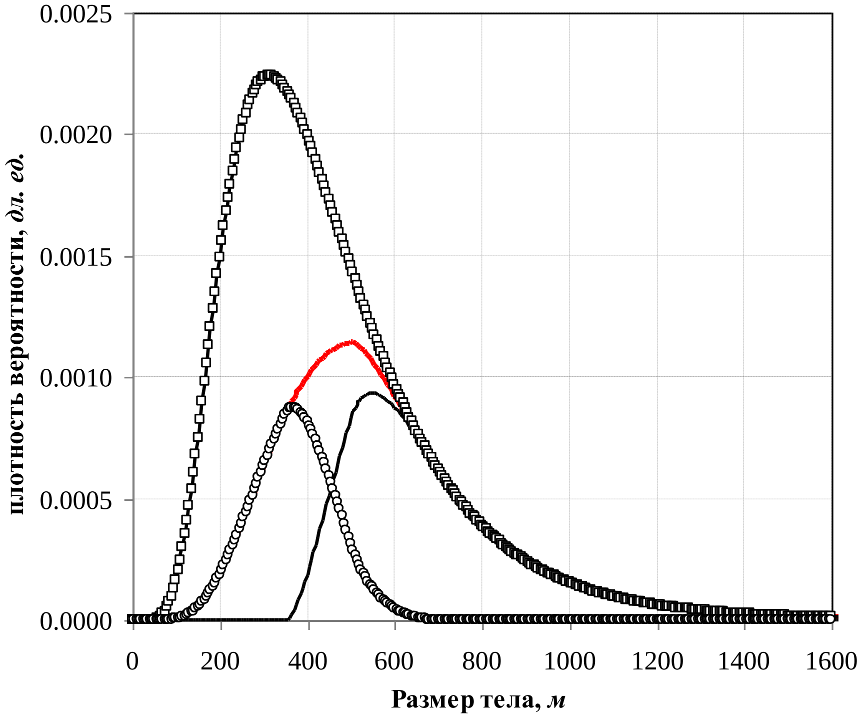


рис. 3.10. Модифицированные плотности вероятностей:

- плотность вероятности распределения песчаных тел по размерам $f(r)$;

- модифицированные плотности вероятностей $f^{вскр}(r)$;

- модифицированные плотности вероятностей $f^{дрен}(r)$;

- модифицированные плотности вероятностей $f^{несв}(r)$.

Проинтегрировав модифицированную плотность вероятностей $f^{несв}(r)$ по всем размерам тел, получим оценку средней несвязности коллектора – долю пласта, работающую на истощение:

$$K_{несв}=\frac{h_{несв}}{h}=\frac{\int_0^{+\infty} f^{несв}(r)\,dr}{\int_0^{+\infty}\left[f^{дрен}(r)+f^{несв}(r)\right]dr}, \tag{3.19}$$

Для пятиточечной системы разработки: $K_{несв}=\dfrac{\int_0^{+\infty} 0,5\xi_1(r)f(r)\,dr}{\int_0^{+\infty}\left[0,5\xi_1(r)+\xi_2(r)\right]f(r)\,dr}$.

Средний размер ограниченной линзы – полудлину несвязанного с системой ППД тела – определим с помощью следующей формулы:

$$r_{несв} = \frac{\int\limits_0^\infty r \cdot f^{несв}(r)\,dr}{\int\limits_0^\infty f^{несв}(r)\,dr}, \qquad (3.20)$$

С использованием формул (3.19) и (3.20) исходя из плотности сетки скважин и их взаимного расположения (шаблона системы заводнения) определяются статистические характеристики неоднородности коллектора: параметр связности и средняя длина несвязанного с системой ППД тела.

3.2.2. Идентификация статистических характеристик коллектора из данных эксплуатации

Идентификацию параметров неоднородного коллектора предлагается проводить из данных нормальной эксплуатации скважин (см. предыдущий раздел). Однако, как было замечено выше, решение обратной задачи в общей постановке является неединственным и крайне неустойчивым. Для регуляризации задачи с одной стороны необходимо более полное использование промысловой информации. Информацию о пластовом давлении можно получить из карт изобар, из данных исследований скважин в открытом стволе (ХРТ), карт вывода скважин на режим. Информацию о параметрах заканчивания скважины – из дизайнов и отчетов о ГРП. Данные о проницаемости проппанта известны из лабораторных исследований. С другой стороны необходимо использовать более устойчивые алгоритмы идентификации. Рассмотрим предлагаемые алгоритмы, регуляризующие решение поставленной обратной задачи.

Анализ на различных временных интервалах

Идентификацию параметров рассматриваемого коллектора предлагается проводить в два этапа: анализ производительности скважины на нестационарном режиме, когда на ее характеристики еще не влияют скважины окружения, и анализ установившегося режима. Производительность скважины на первом этапе описывается с помощью модели, работы многопластовой скважины, построенной во второй главе. При этом ввиду отсутствия информации о размерах каждого из пропластков, вскрываемых скважиной, предлагается перейти к рассмотрению двухпластовой системы, параметры которой определяются формулами (3.19) и (3.20).

Основными параметрами, уточняемыми по данным работы скважин, являются проницаемость и параметры несвязности: $K_{несв}$ и $r_{несв}$. Таким образом, на каждой из скважин необходимо найти такие параметры $k_i, K^i_{несв}, r^i_{несв}$, чтобы они доставляли минимум целевой функции:

$$F_i(q)=\sum_{j=1}^{K_j}\eta_j^i(t_j)\cdot\left(q_i(t_j)-q_{i[1]}(t_j)\right)^2,\ i=1,..,N,$$
$$k_i, K_{несв}^i, r_{несв}^i : F_i(q)\longrightarrow \min,\ \ i=1,..,N, \tag{3.21}$$

При этом вектор весовых коэффициентов η_j^i здесь равен единице, на временах отсутствия влияния скважин окружения и нулю в обратном случае.

Анализ производительности скважин на установившемся режиме производится с помощью разработанных выше моделей работы многоскважинных однопластовых систем на псевдоустановившемся режиме и необходим для однозначной идентификации интегральной связности коллектора с системой ППД $K_{несв}$. Использование данных о работе скважин на псевдоустановившемся режиме позволяет снизить число неизвестных: параметр $K_{несв}^i$ является зависимым от параметров работы скважины на псевдоустановившемся режиме и от k_i и $r_{несв}^i$ и в рамках используемой модели однозначно ими определяется.

Построение карт невязки

Для однозначного определения каждого из оставшихся параметров k_i и $r_{несв}^i$ предлагается использовать подход, изложенный в статье [130]. Суть подхода заключается в использовании графических методов для оценки устойчивости результата идентификации неизвестных характеристик.

Проведем анализ устойчивости результата идентификации параметров пласта. Для этого рассмотрим интервал изменений возможных значений искомых параметров $r_{несв}^{\min}$, $r_{несв}^{\max}$, $k^{\min}$, $k^{\max}$. Значения $r_{несв}^{\min}$, $r_{несв}^{\max}$, $k^{\min}$, $k^{\max}$ определяются из априорных предположений о пределах изменения рассматриваемых параметров на данном участке месторождения с учетом всей имеющейся информации (данные ГДИС, данные исследований керна, данные работы окружения и т.д.). Определим также числа M_r, M_k, задающие для отрезков $\left[r_{несв}^{\min}, r_{несв}^{\max}\right]$, $\left[k^{\min}, k^{\max}\right]$ равномерное разбиение с шагом соответственно: $\Delta r=\dfrac{r_{несв}^{\max}-r_{несв}^{\min}}{M_r}$, $\Delta k=\dfrac{k^{\max}-k^{\min}}{M_k}$: $r_{несв}^i=r_{несв}^{\min}+i\cdot\Delta r$, $k^j=k^{\min}+j\cdot\Delta k$, $i=1,\ldots,M_k, i=1,\ldots,M_r$. Каждой паре $\left\{r_{несв}^i, k^j\right\}$ поставим в соответствие значение функции (3.21). Полученный в результате массив графически изображается в виде трехмерной поверхности или карты (см. рис. 3.12, рис. 3.13). Это позволяет дополнительно оценить достоверность получаемых результатов, найти глобальный минимум целевой функции в исследуемой области.

На рис. 3.11.а изображен пример адаптации динамики параметров пласта. На рис. 3.12 изображена карта невязки, соответствующая данному расчету. Из карты невязки видно, что, несмотря на относительно хорошее совпадение расчетной и фактической динамик, найденные значения не соответствуют глобальному минимуму ошибки. Для нахождения глобального минимума необходимо расширить пределы поиска проницаемости $k^{\min}$. На рис. 3.13 видно, что при расширении переделов новая найденная проницаемость соответствует глобальному минимуму ошибки. При этом адаптация динамики работы скважины стала лучше (см. рис. 3.11.б), а значение вычисленной проницаемости уменьшилось в 1.5 раза.

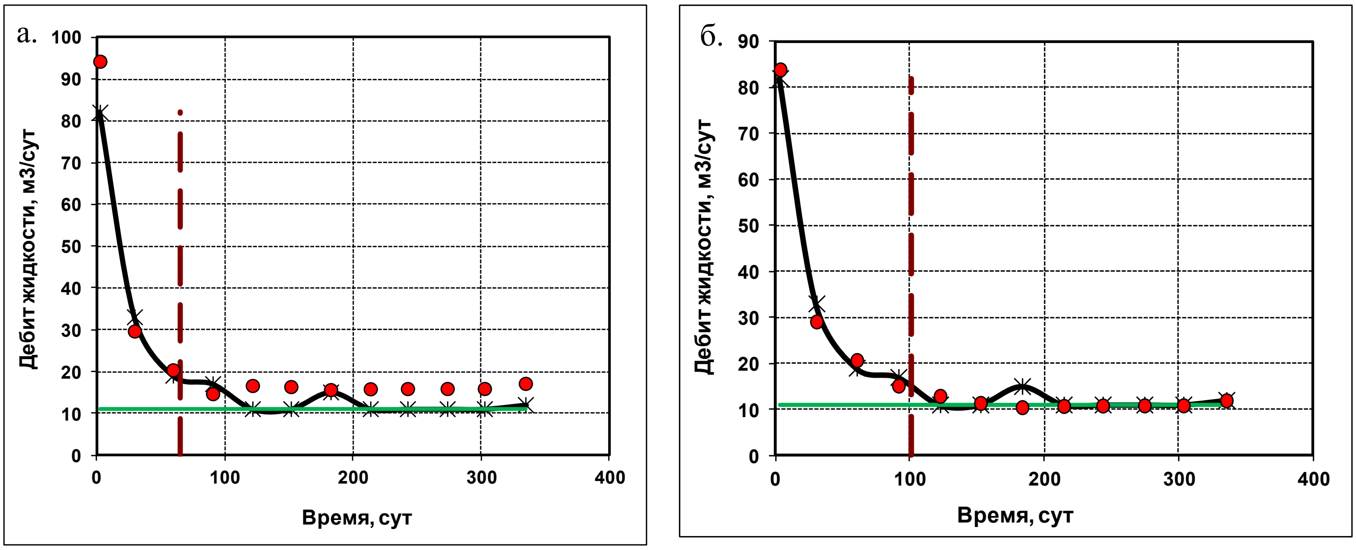


рис. 3.11. Адаптация динамики работы скважины на неустановившемся режиме после ВНР двумя способами:

- расчетная добыча жидкости, $q_{расч}$,

- фактическая добыча жидкости, $q_{факт}$,

- время начала псевдо-установившегося режима, t_{pss},

- дебит на установившемся режиме, q_{ss}.

а. б.

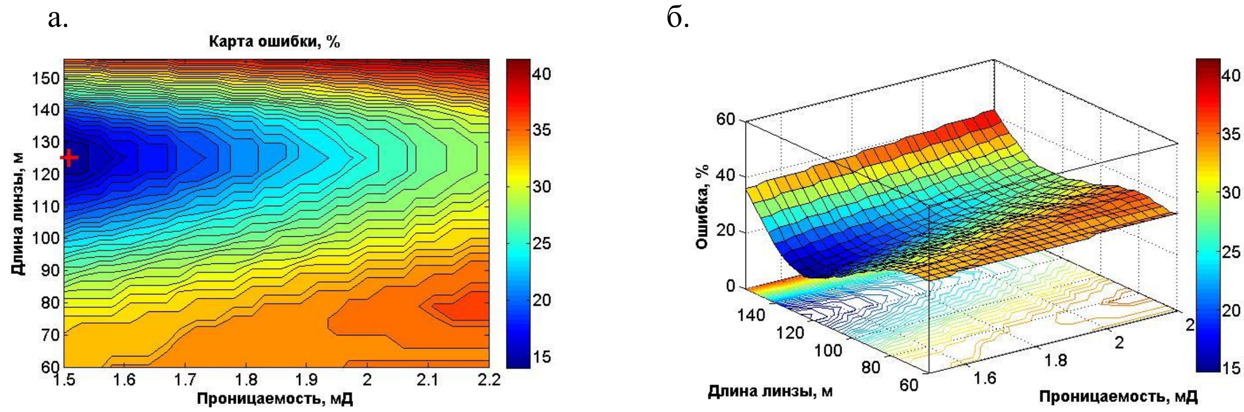


рис. 3.12. Результаты расчетов невязки между расчетной и фактической добычей, соответствующие первому способу адаптации (рис. 3.11.а):

а. структурная карта невязки;

б. поверхность невязки;

\+ - точка, соответствующая минимальному значению невязки.

а. б.

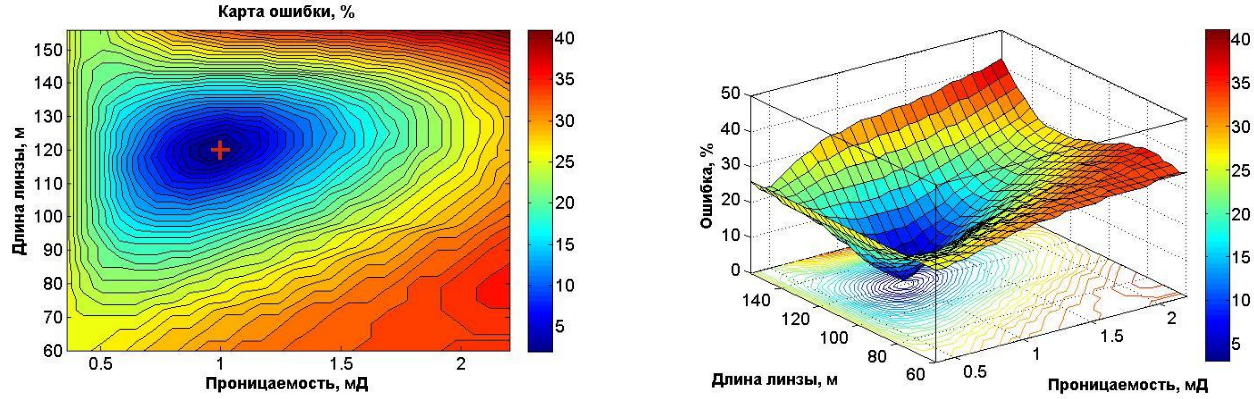


рис. 3.13. Результаты расчетов невязки между расчетной и фактической добычей, соответствующие второму способу адаптации (рис. 3.11.б):
а. структурная карта невязки;
б. поверхность невязки;
+ - точка, соответствующая минимальному значению невязки.

3.2.3. Ипользование результатов идентификации на примере месторождения Западной Сибири

В результате применения предложенного в работе подхода была проанализирована работа новых скважин (1000+ скв.) последних лет (2007-2012 гг.) на одном из крупнейших месторождений Западной Сибири. На более чем половине скважин результаты адаптации были признаны достоверными. Это позволило построить карты интегральной несвязности и прогнозировать добычные возможности адресно по каждой из планируемых к бурению скважин в рассматриваемых участках.

На рис. 3.14 изображена карта несвязности на одном из участков рассматриваемого месторождения. Виден переход от зоны с низкой несвязностью к зоне с высокой несвязностью в восточном направлении. Данная карта подтверждается геологическими соображениями: согласно геологической модели здесь наблюдается переход от прибрежных отложений, характеризующихся монолитным, однородным коллектором, к глубоководным морским, характеризующихся неоднородным развитием и повышенной расчлененностью коллектора.

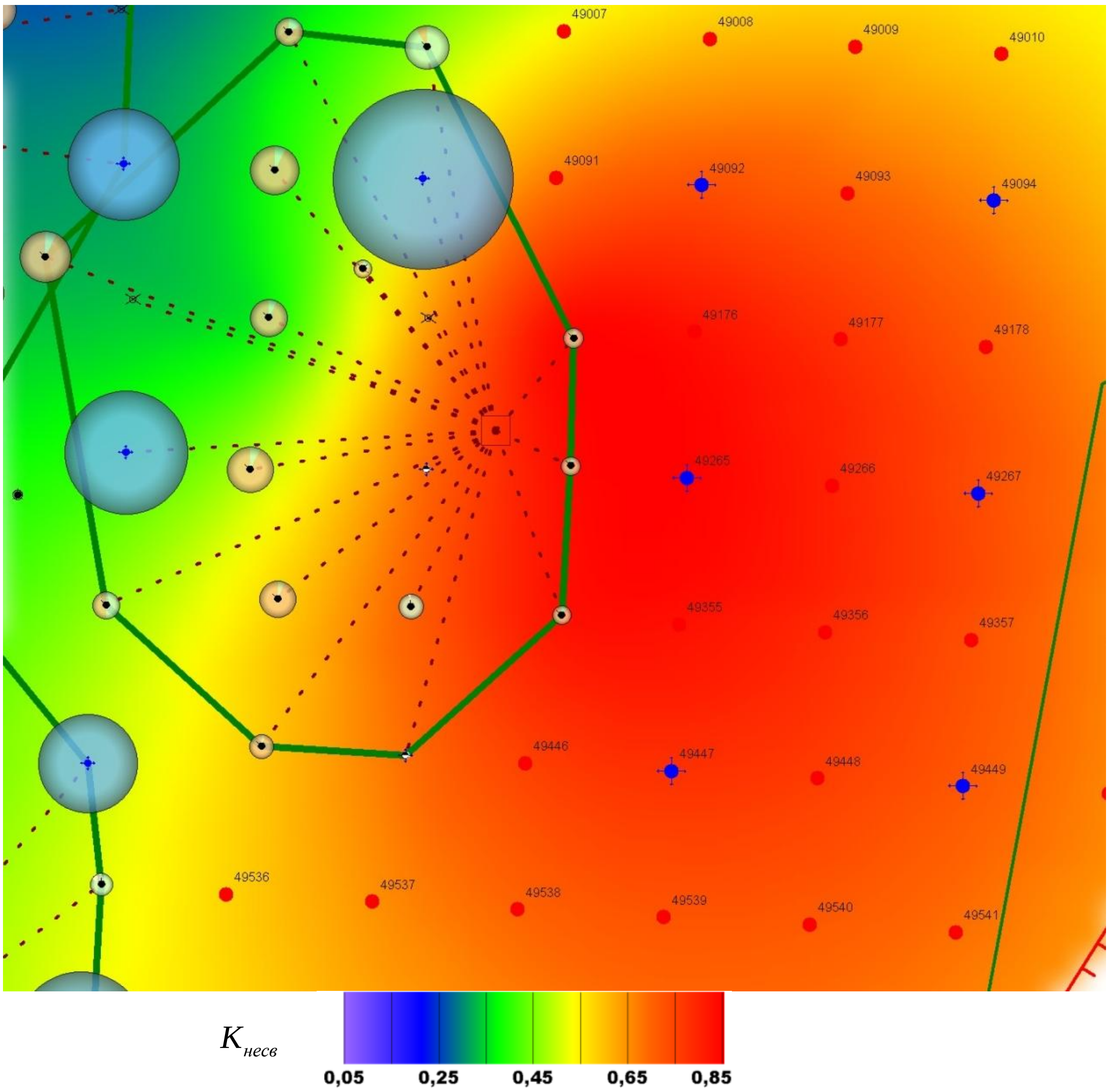


рис. 3.14. Карта интегральной несвязности

При планировании эффективности бурения необходимо учитывать не только высокие темпы снижения добычи от скважин, но и то, что в случае разработки неоднородного расчлененного коллектора извлекаемые запасы на скважину будут ниже, по сравнению с запасами, рассчитанными классическими методами. Это связано, во-первых, с тем, что часть эффективной мощности пласта выклинивается в межскважинное пространство, а во-вторых, коэффициент извлечения нефти (КИН) из несвязанной с системой ППД части коллектора гораздо ниже утвержденного целевого значения для всего пласта. Извлекаемые запасы на скважину можно оценить с использованием построенной карты $K_{несв}$ по следующей формуле:

$$RF = RF_{ист} \cdot \left(\pi \cdot r_{несв}^2 \cdot \phi \cdot s_{oi} \cdot h \cdot K_{несв}\right) + RF_{цел} \cdot \left(A \cdot h \cdot \phi \cdot s_{oi} \cdot \left(1 - K_{несв}\right)\right), \qquad (3.22)$$

где $RF_{ист}$ - КИН на истощение, $RF_{цел}$ - целевой КИН, ϕ -пористость, s_{oi} - средняя насыщенность.

Использование карт несвязности позволяет также объяснить сверхвысокие снижения продуктивности новых скважин. На рис. 3.15 изображены темпы снижения, рассчитанные с помощью применения карт несвязности, а также фактические темпы на одном из участков рассматриваемого месторождения.

На рис. 3.16 изображено сравнение фактической динамики разрядки нагнетательной скважины и расчетной динамики, определенной с помощью рассматриваемой в данной работе модели работы скважины в неоднородном расчлененном пласте с использованием карты несвязности.

Также применение рассматриваемого подхода позволяет планировать темпы снижения добычи новых скважин на новых участках месторождения с сильно отличающимися значениями проницаемости (см. рис. 3.17), и изменяющимися параметрами разработки: с отличной плотностью сетки скважин и изменением шаблона системы заводнения. Благодаря применению предлагаемого метода удается оценить потенциал уплотняющего бурения, выбрать оптимальную плотность сетки скважин, систему разработки. Решить озвученные выше задачи невозможно с использованием лишь данных о статистике работы скважин уже разрабатываемых участков.

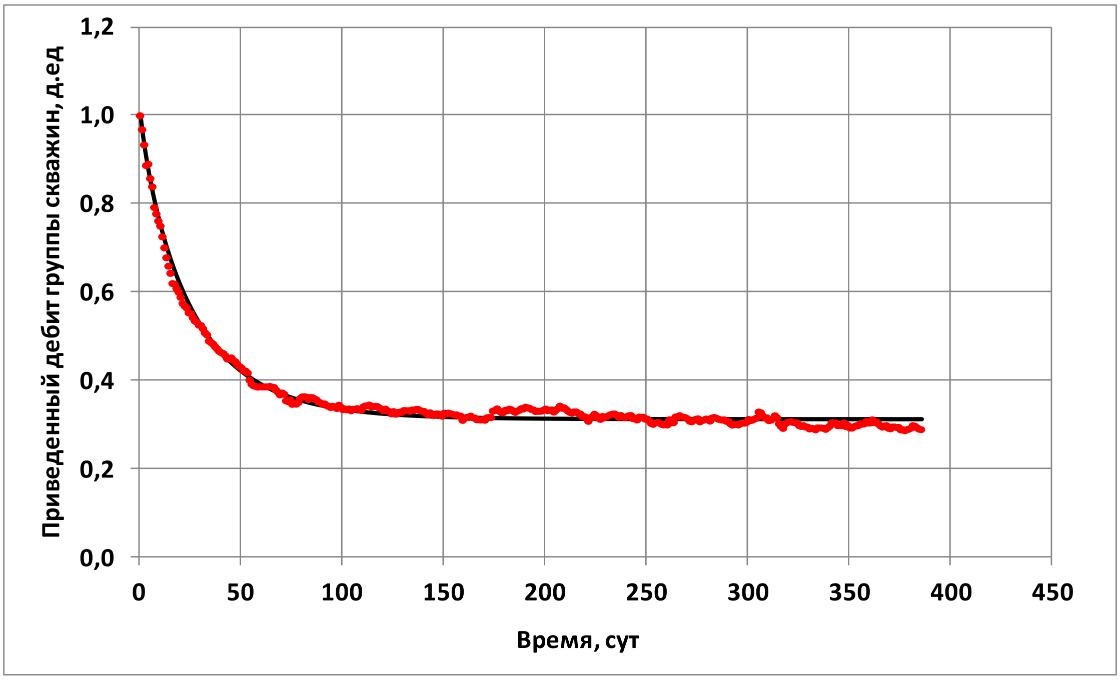


рис. 3.15. Сравнение фактического и рассчитанного темпов падения жидкости группы новых скважин:

● - фактические данные дебита скважины;

— - расчетная динамика с помощью предлагаемой модели.

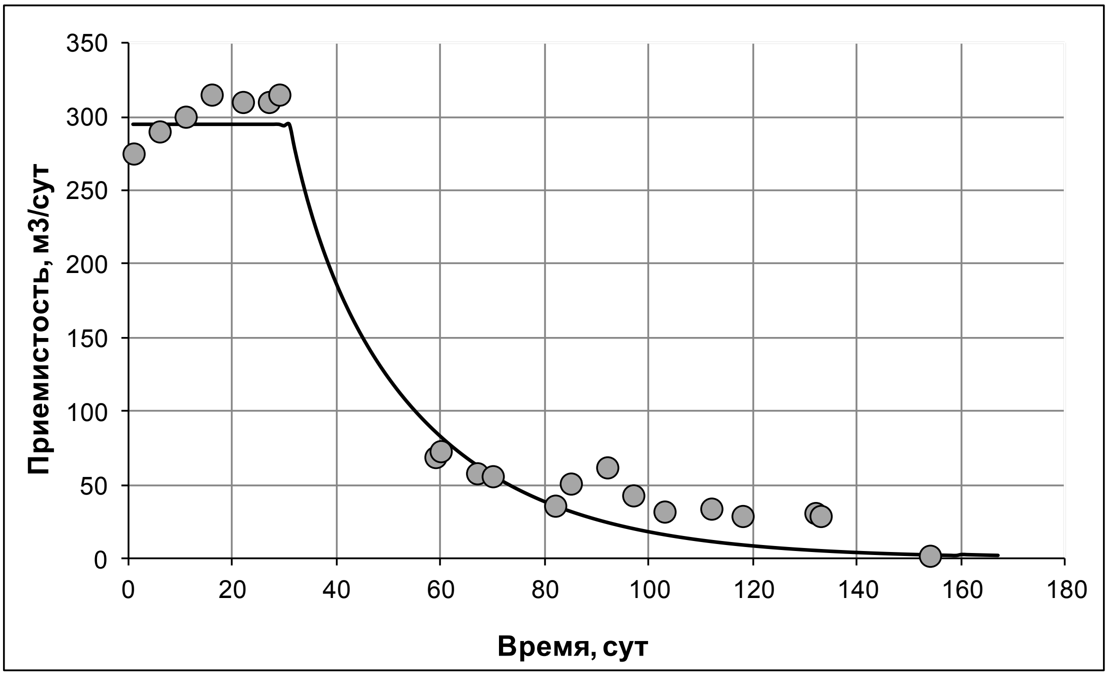


рис. 3.16. Пример снижения приемистости нагнетательной скважины после ее остановки
- фактические данные;
- расчетная динамика с помощью предлагаемой модели.

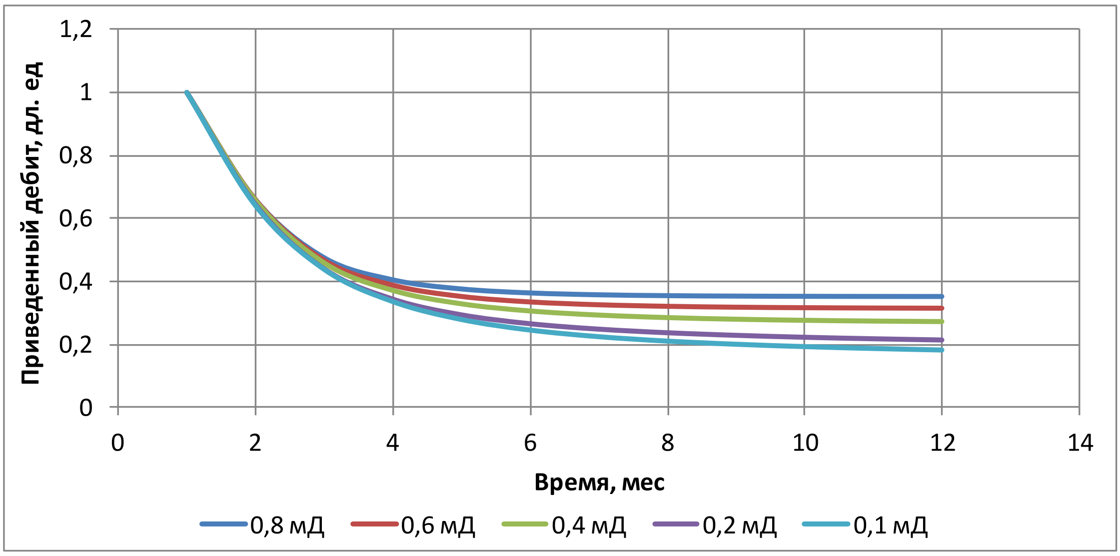


рис. 3.17. Различные темпы падения дебита жидкости новых скважин в зависимости от проницаемости планируемого к бурению участка

3.2.4. Прогноз показателей разработки неоднородного коллектора

Определение основных показателей при разработке неоднородного расчлененного коллектора

В данном разделе получены аналитические выражения для коэффициента вскрытия и коэффициента охвата сеткой скважин нефтеносных пластов с неоднородным строением коллектора. Коэффициент охвата вытеснением $K_{охв}$ является важнейшей характеристикой, отражающей эффективность планируемой и существующей систем разработки нефтяного месторождения (плотность, схему размещения и тип заканчивания скважин). Данный показатель определен как отношение нефтенасыщенного объема продуктивного пласта, охваченного процессом вытеснения, ко всему нефтенасыщенному объему пласта в выбранном расчетном контуре. Вычисление коэффициента охвата необходимо для прогнозирования целевого коэффициента извлечения нефти.

При разработке месторождения с использованием технологии вытеснения, целевой КИН рассчитывают по модифицированной формуле акад. А.Н. Крылова:

$$КИН = K_{выт} \cdot K_{охв} = K_{выт} \cdot K_{охв\_S} \cdot K_{охв\_h}, \tag{3.23}$$

где $K_{выт}$ - коэффициент вытеснения нефти закачиваемым агентом (определяется по лабораторным исследованиям керна), $K_{охв\_S}$ и $K_{охв\_h}$ - коэффициенты охвата вытеснением по площади и по мощности пласта соответственно.

На значение коэффициентов $K_{охв\_S}$ и $K_{охв\_h}$ оказывают влияние неоднородное строение залежи, вертикальная расчлененность и зональная прерывистость пластов. Если существует гидродинамическая модель месторождения, корректно воспроизводящая особенности строения залежи, то вычисление коэффициента охвата не составляет большого труда. Однако длительность адаптации, неопределенность и недостаток входных данных, необходимых для инициализации модели, могут ограничивать применение 3-D симуляторов для прогнозирования как $K_{охв}$ так и $K_{охв\_S}$, $K_{охв\_h}$.

Что касается коэффициента охвата по мощности $K_{охв\_h}$, представляющего собой отношение площади вертикального сечения, охваченного вытесняющим агентом к общей площади сечения, то для его определения можно воспользоваться аналитическими моделями, например, представленными в работах [115], [116]. Данные методы учитывают наиболее важные факторы, влияющие на $K_{охв\_h}$: соотношение подвижностей нефти и вытесняющего агента, а также степень неоднородности пласта по проницаемости.

При разработке месторождения с неоднородным строением коллектора, на величину коэффициента охвата по площади $K_{охв\_S}$ главным образом оказывает влияние схема размещения скважин. В работе [39] данный коэффициент называется коэффициентом охвата сеткой скважин и выражается следующим образом:

$$K_{охв\_S} = e^{-\alpha S^1}, \tag{3.24}$$

где α - коэффициент снижения охвата дренированием с увеличением удельной площади на скважину, S^1 - удельная плотность проектной сетки, *га/скв*.

Коэффициент α можно также выразить как $\alpha = \frac{w^2}{d^2}$, где w - средняя доля неколлектора по площади нефтяного пласта, *дл. ед.*, d - шаг хаотической изменяемости свойств пласта, *м*.

Недостатки данного эмпирического метода заключаются в сложности определения параметров, входящих в формулу. Значение доли неколлектора w сильно зависит от результатов интерпретации данных ГИС на скважине (алгоритма выделения коллектора). Шаг хаотической изменяемости свойств пласта d является трудно формализуемым параметром.

Существуют также методы оценки коэффициента охвата сеткой скважин с помощью анализа данных геофизических исследований (ГИС) группы скважин: «метод kh-ratio» [147] и «метод Стайлса» (Stiles) [94]. В рассматриваемых работах обсуждается применение методов для анализа потенциала уплотняющего бурения. Основные недостатки представленных методов заключаются в неопределенности при построении зависимости “связность/расстояние между скважинами” вызванной большим разбросом получаемых с помощью предлагаемых алгоритмов точек.

В данной работе, предлагается алгоритм определения коэффициента охвата сеткой и коэффициента вскрытия нефтеносных пластов. При эксплуатации неоднородного коллектора, могут существовать тела, не вскрытые ни одной или вскрытые лишь нагнетательной скважиной, поэтому $K_{охв\_S} \le K_{вскр\_S}$. Где $K_{вскр\_S}$ - коэффициент вскрытия запасов сеткой скважин, учитывающий полноту вовлечения эксплуатационного объекта в разработку. Данный показатель определяют так [49]:

$$K_{вскр\_S} = 1 - \frac{V^*}{V}, \tag{3.25}$$

V^* - суммарный объем не вовлеченных в разработку (невскрытых добывающими скважинами) нефтенасыщенных песчаных тел в пределах рассматриваемого участка, V - общий объем песчаных тел.

Покажем, как оценить основные показатели разработки месторождения с использованием информации о распределении песчаных тел по размерам $f(r)$, параметры которого уточняются из данных нормальной эксплуатации с помощью разработанных в предыдущем разделе алгоритмов.

Определение коэффициента вскрытия и коэффициента охвата сеткой скважин с помощью полученного распределения песчаных тел

В предыдущем пункте были определены модифицированные плотности вероятности $f^{вскр}(r)$, $f^{дрен}(r)$, $f^{несв}(r)$ соответственно вовлеченных, дренируемых тел и тел, несвязных с системой ППД, а также плотность вероятности распределения песчаных тел по размерам $f(r)$ (см. рис. 3.10). Аналогично (3.19), проинтегрировав модифицированную плотность вероятностей

$f^{вовл}(r)$ по всем размерам тел, получим оценку коэффициента вскрытия нефтеносного пласта сеткой скважин:

$$K_{вскр\_S} = \int_0^{+\infty} f^{вскр}(r)dr, \tag{3.26}$$

Для пятиточки: $K_{вскр\_S} = \int_0^{+\infty} \left[1 - \xi_0(r) - 0.5\xi_1(r)\right] f(r)dr$.

Для вычисления коэффициента охвата сеткой скважин определим долю запасов нефти, охватываемую заводнением, то есть часть песчаных тел вскрываемых как нагнетательными, так и добывающими скважинами:

$$K_{охв\_S} = \int_0^{+\infty} f^{дрен}(r)dr, \tag{3.27}$$

Для пятиточки: $K_{охв\_S} = \int_0^{+\infty} p_2(r) f(r)dr$.

Средняя несвязность коллектора с системой поддержания пластового давления определена в (3.19).

Зависимость коэффициентов вскрытия и охвата сеткой от плотности сетки скважин

Рассмотрим зависимость коэффициентов вскрытия запасов и коэффициента охвата системой разработки от площади, приходящейся на скважину (рис. 3.18). Видно, что при небольшом расстоянии между скважинами вовлекается и дренируется 100 % запасов нефти. С ростом расстояния между скважинами количество запасов, вскрытых добывающими скважинами, падает, причем падает также доля запасов, охваченная сеткой скважин. Доля запасов, несвязанных с системой ППД растет. При значительном расстоянии между скважинами коэффициент охвата сеткой приближается к нулевому значению, а вовлеченные запасы преимущественно составляет коллектор, не связанный с системой ППД. На рис. 3.18 видно, что при большом шаге сетки количество вскрытых запасов и количество запасов, несвязанных с системой ППД совпадают. Заметим, что коэффициент вскрытия ненулевой даже при большом шаге сетки, так как часть запасов, состоящая из песчаных тел, непосредственно вскрытых скважинами, ненулевая для данного примера.

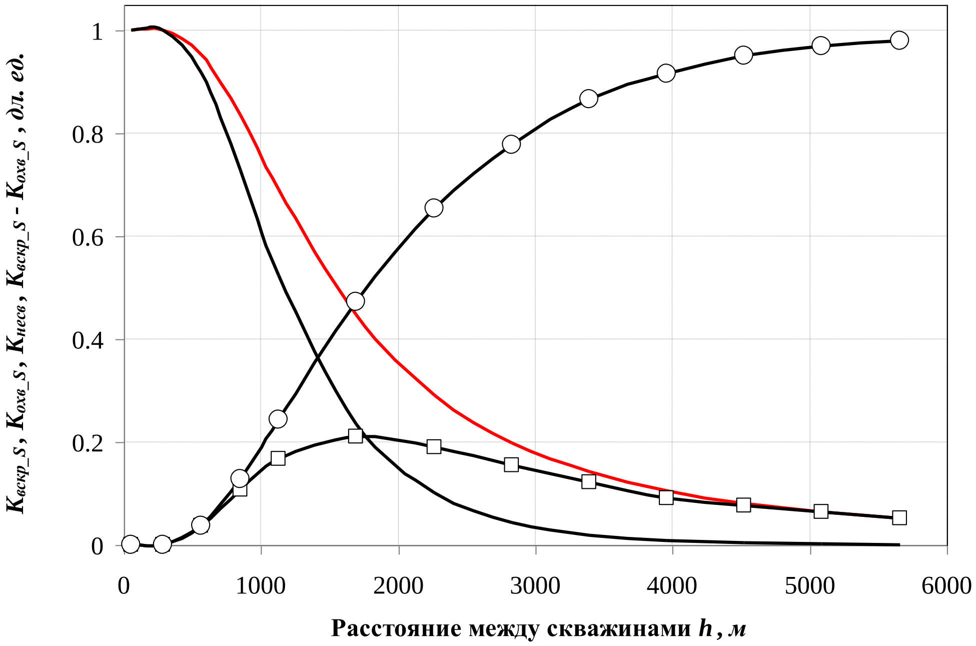


рис. 3.18. Зависимость $K_{вскр\_S}$, $K_{охв\_S}$, $K_{несв}$, $K_{вскр\_S} - K_{охв\_S}$ от расстояния между скважинами для пятиточечной системы разработки.

- Коэффициент вскрытия сеткой $K_{вскр\_S}$, *дл. ед.*

- Коэффициент охвата сеткой $K_{охв\_S}$, *дл. ед.*

- Коэффициент несвязанности $K_{несв}$, *дл. ед.*

- Доля вскрытых запасов, несвязанных с системой ППД $K_{вскр\_S} - K_{охв\_S}$, *дл. ед.*

Пользоваться зависимостью $K_{охв\_S}(h)$, изображенной на рис. 3.18 не всегда удобно, расчеты показывают, что она может быть аппроксимирована с помощью функции вида (3.24). На рис. 3.19 показан график $K_{охв\_S}(h)$ и его аппроксимация функцией $K_{охв\_S}^{аппр}(h) = e^{-\alpha S^1}$, где $\alpha = 0.008\, м^{-2}$, $S^1 = \dfrac{h^2}{2}$. Видно, что данная аппроксимация описывает полученную зависимость с удовлетворительной точностью.

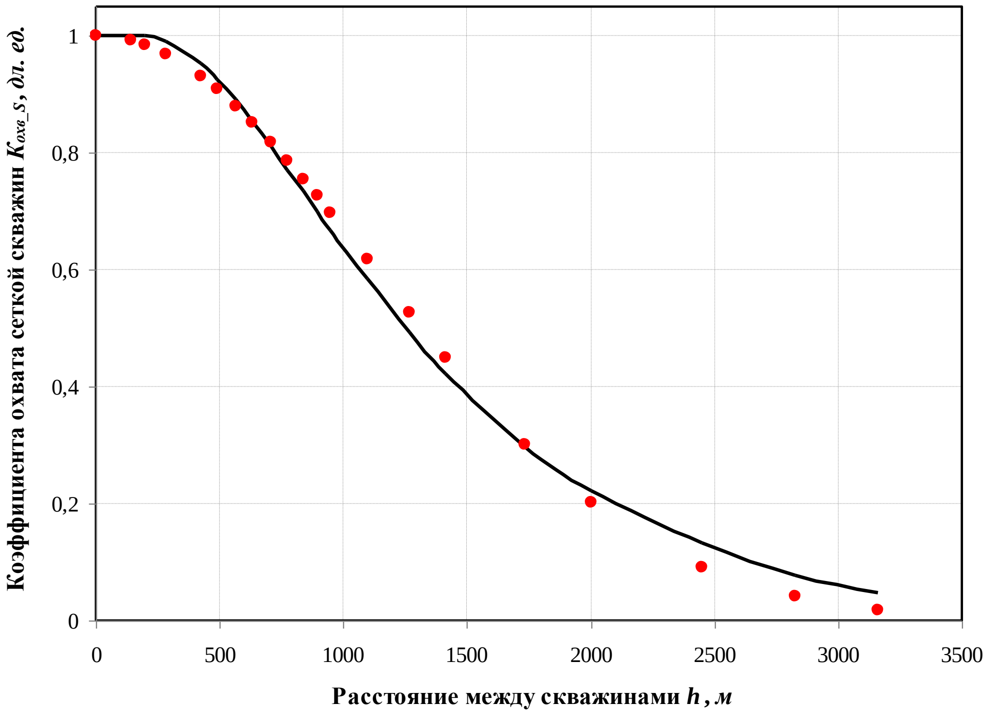


рис. 3.19. Пример расчета коэффициента охвата сеткой скважин $K_{охв\_S}(h)$ и его аппроксимация для пятиточечной системы разработки.

- Расчет по предлагаемой методике.

- Аппроксимация зависимостью $e^{-\alpha S^1}, \alpha = 0.008 м^{-2}, S^1 = \dfrac{h^2}{2}$.

В заключение приведем сравнение зависимостей коэффициента вскрытия запасов для девятиточечной и пятиточечной систем разработки от удельной площади на скважину на примере одного из месторождений Западной Сибири. На рис. 3.20 изображены графики $K_{вскр\_S}(S^1)$ для указанных схем разработки. Видно, что в девятиточечной системе разработки вовлекается больше запасов при одной и той же плотности сетки скважин. Это объясняется тем, что количество добывающих скважин в элементе симметрии девятиточечной схемы больше, чем в элементе симметрии пятиточечной. Однако, при этом очевидно, что коэффициент несвязности в девятиточечной схеме выше, чем в пятиточечной (так как количество нагнетательных скважин в элементе симметрии девятиточечной схемы меньше, чем в элементе симметрии пятиточечной). Зависимости $K_{несв}(S^1)$ для рассматриваемых схем разработки также представлены на рис. 3.20. Кроме того на данном рисунке изображены графики $K_{охв\_S}(S^1)$ для девятиточечной и пятиточечных систем разработки.

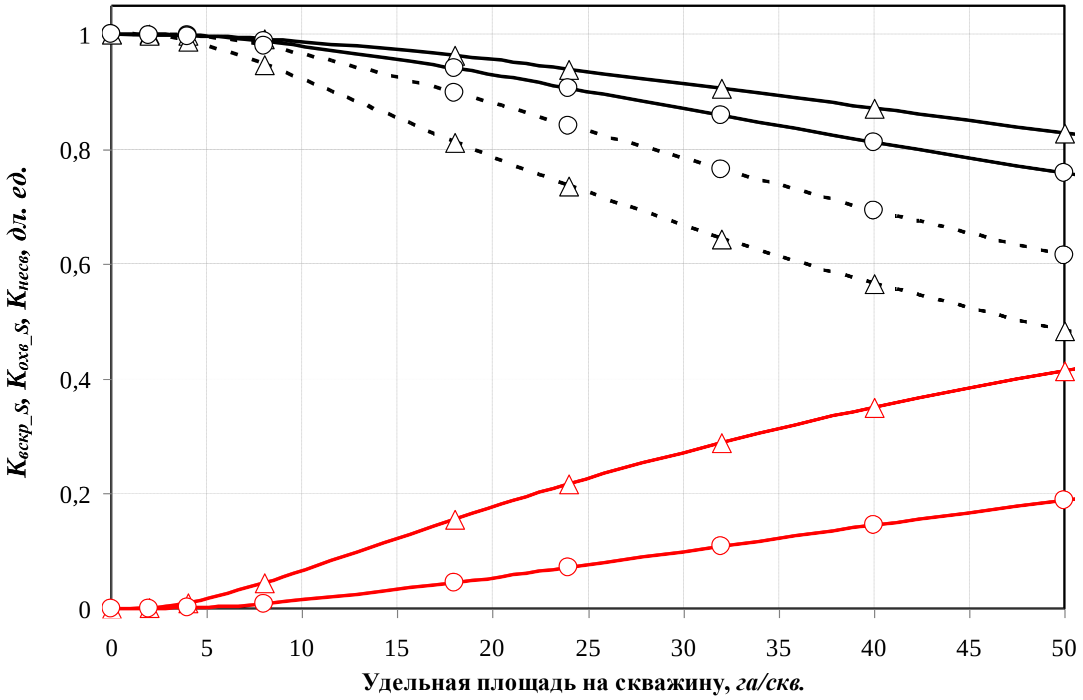


рис. 3.20. Зависимости $K_{вскр\_S}\left(S^1\right)$, $K_{охв\_S}\left(S^1\right)$, $K_{несв}\left(S^1\right)$ для пятиточечной и девятиточечной схем разработки.

- $K_{вскр\_S}\left(S^1\right)$ для девятиточечной системы разработки, *дл. ед.*
- $K_{охв\_S}\left(S^1\right)$ для девятиточечной системы разработки, *дл. ед.*
- $K_{несв}\left(S^1\right)$ для девятиточечной системы разработки, *дл. ед*
- $K_{вскр\_S}\left(S^1\right)$ для пятиточечной системы разработки, *дл. ед.*
- $K_{охв\_S}\left(S^1\right)$ для пятиточечной системы разработки, *дл. ед.*
- $K_{несв}\left(S^1\right)$ для пятиточечной системы разработки, *дл. ед.*

Таким образом, в разделе приведены алгоритмы оценки коэффициента вскрытия запасов и коэффициента охвата по площади сеткой скважин, представлены результаты расчета данных показателей на примере одного из месторождений Западной Сибири. Алгоритмы основаны на использовании функции распределения песчаных тел по размерам, параметры которого согласованы с данными эксплуатации. Показано, что наряду с методикой определения оптимального соотношения добывающих и нагнетательных скважин [119], [120], рассматривающей соотношение подвижностей вытесняющего и резидентного флюида как основной влияющий на эффективность разработки фактор, а также методикой, учитывающей послойную неоднородность [115], [116] (данные модели разработаны для выдержанных по горизонтали коллекторов), при определении оптимальных параметров разработки необходимо учитывать горизонтальную прерывистость коллектора и ее влияние на величину коэффициента вскрытия и коэффициента охвата сеткой скважин нефтеносных пластов.

3.2.5. Использование данных нормальной эксплуатации для устранения неопределенности при геологическом моделировании

Проблема неопределенности при построении геологической модели

В данном разделе рассмотрим способ, позволяющий с использованием данных нормальной эксплуатации скважин устранить неопределенность при геологическом моделировании. Обычно геологическая модель строится по данным сейсмических исследований и геофизических исследований скважин (ГИС). При этом о свойствах пласта мы можем судить только по значению на скважинах. Для распространения данного свойства в межскважинное пространство используют различные алгоритмы [21, 44]. Ключевым понятием при распространении пластовых свойств в межскважинное пространство является понятие вариограммы. Ее восстанавливают на основе данных ГИС в скважинах. Вариограмма оказывает ключевое влияние на распределение свойств и фаций в геологической модели. Однако, зачастую данные ГИС сильно «зашумлены», что является причиной неточного определения вариограммы. Как следствие геологическая модель, построенная на ее основе, оказывается некорректной.

На рис. 3.21 изображены данные для построения вариограммы. Видно, что через данное облако точек может быть проведено несколько различных вариограмм с сильно отличающимися параметрами.

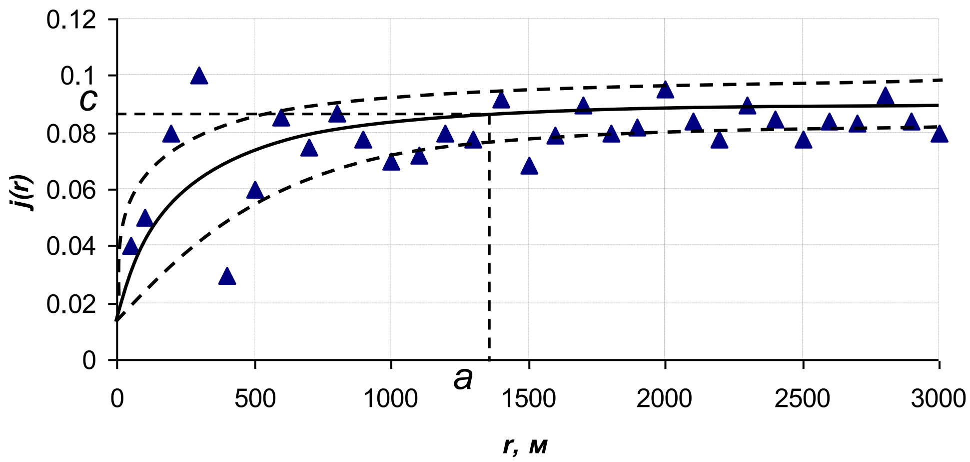


рис. 3.21. Набор вариограмм, построенных по одному и тому же набору исходных данных

Рассмотрим способ по регуляризации задачи нахождения оптимальной вариограммы с учетом данных эксплуатации посредством разработанных выше алгоритмов.

Уточнение параметров вариограммы из данных эксплуатации

Можно вывести зависимость, связывающую параметры вариаграммы и среднюю длину песчаного тела [17]. Рассмотрим коллектор, состоящий из двух фаций: песчаник и глина. Оценим средний размер песчаного тела. Рассмотрим одномерный столбик в направлении φ (см.рис. 3.22), он состоит из сменяющих друг друга песчаника (светлый) и глины (темный).

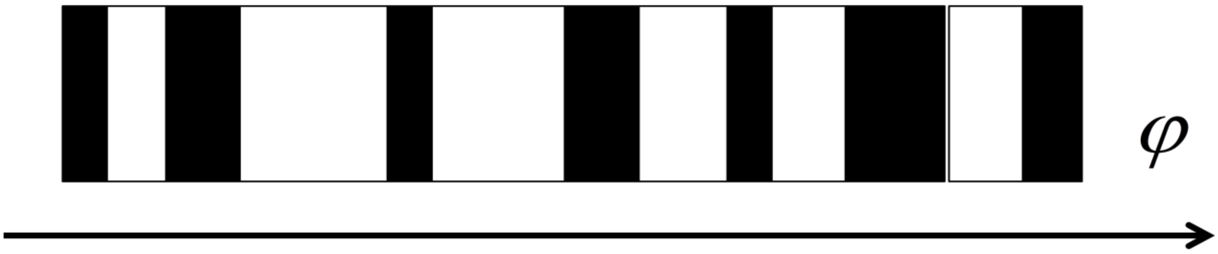


рис. 3.22. Распределение фаций в направлении φ

Разделим данный столбик на N частей, каждая длиной h. Средняя длина песчаного тела в направлении φ равна:

$$\bar{l}_{1,\varphi} = \frac{p_1 \cdot N \cdot h}{N_1}, \tag{3.28}$$

где p_1 общая доля песчаника в данном направлении, то есть «одномерный коэффициент песчанистости», N_1 - количество отрезков песчаника.

Можно показать [17], что средний размер песчаного тела связан с производной вариаограммы в нуле:

$$\frac{1}{\bar{l}_{1,\varphi}} = \frac{1}{p_1} \left. \frac{d\gamma_{11}(h)}{dh} \right|_{h=0}. \tag{3.29}$$

Таким образом, средняя длина песчаного тела в некотором направлении обратно пропорциональна производной функции вариограммы в нуле и прямо пропорциональна коэффициенту песчанистости в данном направлении.

Рассмотрим для примера одну из наиболее часто встречающихся моделей вариограмм – экспоненциальную вариограмму:

$$\gamma(h) = c \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right)\right), \tag{3.30}$$

где c - плато вариограммы: $\gamma(h) \to c$ при $h \to \infty$, a - радиус корреляции вариограммы.

Можно показать [17], что функция вариограммы γ_{11} при $h \to \infty$ стремится к значению $p_1(1-p_1)$:

$$\gamma_{11}(h) \xrightarrow{h\to\infty} p_1(1-p_1). \tag{3.31}$$

Вероятность обнаружить в точке $\vec{r} \in G$ песчаник p_1 можно очевидным образом приравнять коэффициенту песчанистости K. Где коэффициент песчанистости определяется как общая доля объема песчаника в объеме всего пласта:

$$K = \frac{V_п}{V_п + V_{гл}} = p_1, \tag{3.32}$$

где $V_п$ - суммарный объем песчаника в пласте, $V_{гл}$ - суммарный объем глин в пласте.

Таким образом плато вариограммы $c = K(1-K)$ и для средней длины песчаного тела получим:

$$\bar{l}_{1,\varphi} = \bar{l} = \frac{a}{1-K}. \tag{3.33}$$

Выше было показано как связать параметры вариограммы со средним размером песчаного тела, в предположении, что условия осадконакопления в пределах данной области G однородны и что, как следствие, во всевозможных направлениях φ (например, по латерали) параметры распределения тел по размерам одинаковы.

Также в предыдущем разделе были предложены алгоритмы по идентификации параметров распределения песчаных тел по размерам $f(r)$ с учетом данных нормальной эксплуатации. Таким образом, зная параметры распределения $f(r)$, можно легко получить средний размер тела:

$$\bar{l} = 2\bar{r} = 2\int_0^{+\infty} r \cdot f(r)\,dr. \tag{3.34}$$

Например, для логнормального распределения:

$$\bar{l} = 2\exp\left(\mu + \frac{\sigma_{\ln}^2}{2}\right), \tag{3.35}$$

где $f(r)$ - плотность вероятности, μ и $\sigma_{\ln}$ - параметры функции распределения вероятностей распределения песчаных тел по размеру, полученные из данных эксплуатации.

Таким образом, из данных эксплуатации можно оценить наклон функции вариограммы в нуле, а также радиус корреляции вариограммы. На примере логнормального распределения, получим:

$$\begin{gathered} \left.\frac{d\gamma_{11}(h)}{dh}\right|_{h=0} = \frac{K}{2}\exp\left(-\mu - \frac{\sigma_{\ln}^2}{2}\right), \\ a = 2(1-K)\exp\left(\mu + \frac{\sigma_{\ln}^2}{2}\right). \end{gathered} \tag{3.36}$$

В разделе приведен алгоритм по регуляризации процесса геологического моделирования с использованием не только данных ГИС, но и данных нормальной эксплуатации.

3.3. Определение и прогноз эффективности заводнения

В данном разделе предлагается подход к определению и прогнозу эффективности заводнения. Метод основан на применении упрощенной аналитической модели работы скважины в системе разработки. Данная модель позволяет рассчитать производительность скважин элемента симметрии шаблона заводнения на всех режимах работы (неустановившийся, псевдоустановившийся, установившийся), проводить различные практические расчеты по определению эффективности системы поддержания пластового давления (ППД). В разделе приведены примеры применения описываемого подхода для определения оптимального времени отработки нагнетательной скважины на нефть, а также для расчета потерь добычи при несвоевременном вводе объектов поверхностного обустройства и запаздывающем формировании системы ППД.

3.3.1. Затруднения при применении классических методов оценки эффективности заводнения

При мониторинге разработки месторождения с применением заводнения, планировании уровней добычи и закачки рабочего агента в продуктивный пласт инженер сталкивается с рядом практических задач. Перечислим примеры данных задач:

- *Расчет динамики добычи с участка месторождения при изменении режимов работы нагнетательных скважин, располагающихся в пределах рассматриваемой части залежи*. Для планирования обустройства месторождения, дат ввода объектов поверхностной инфраструктуры, экономического обоснования расшивок и реконструкций водоводов высокого давления и т.д. необходимо выполнять расчеты приростов добычи от перевода добывающих скважин в нагнетание, изменения забойных давлений нагнетательных или добывающих скважин. В настоящее время для решения данных задач разработаны коммерческие программные комплексы для интегрированного расчета системы “поверхностное обустройство-скважина-пласт”, например: Petex IPM, Avocet IAM. Однако их использование для оперативных расчетов затруднительно в виду значительных трудо- и время затрат на создание моделей и их адаптацию.
- *Определение оптимального времени отработки нагнетательной скважины на нефть.* Перевод скважины из добычи в нагнетание является одним из важнейших видов геолого-технологических мероприятий (ГТМ). Формирование системы поддержания пластового давления (ППД) оказывает существенное влияние на динамику пластового давления, распределение фильтрационных полей, коэффициент извлечения нефти (КИН). Несвоевременный перевод скважин под нагнетание способствует потерям добычи, снижению экономической эффективности разработки месторождения, недовыработке запасов и т.д. При принятии решения о дате перевода нагнетательной скважины необходимо учитывать наряду с технологическими параметрами работы скважин, фильтрационно-емкостные свойства продуктивных пластов, параметры неоднородности среды, запасы на скважину, режимы работы скважин и т.д.

Для определения эффективности системы ППД и оптимального режима заводнения необходимо располагать моделью, учитывающей взаимовлияние скважин многоскважинной системы. Рассмотрим различные подходы к описанию производительности скважин в многоскважинной системе.

Для решения задач разработки стандартом является использование полномасштабных гидродинамических моделей. Однако их применение на практике проблематично ввиду трудоемкости создания и оперативной адаптации. Кроме того, для настройки гидродинамической модели необходимо идентифицировать большое количество заранее неизвестных кубов свойств (фильтрационно-емкостные свойства каждой из ячеек), для этого нужен большой объем промысловой и геофизической информации. Однако зачастую таких данных нет – например, при рассмотрении новых участков текущего бурения и ввода скважин.

Подходы, основанные на матрице взаимной продуктивности [137, 149] и «емкостных» (capacitance) и корреляционных моделях [92, 122, 126, 127, 127, 133, 144, 152, 157, 158, 159] также не всегда подходят вследствие большого числа параметров, которые необходимо идентифицировать. Так, для многоскважинной системы, состоящей из N скважин необходимо идентифицировать порядка $\sim N^2$ значений. Например, для системы скважин одного куста (20 – 40 скважин) необходимо найти несколько сотен параметров. Это количество неизвестных, безусловно, меньше, чем в полномасштабной гидродинамической модели, однако и в данном случае для решения обратной задачи необходим продолжительный «обучающий» период (вплоть до 10 лет).

Следует отметить также использование нейронных сетей для описания фильтрации в многоскважинных системах, а также для задач планирования [113], [139]. Основным достоинством данного подхода является возможность описывать системы с подстилающей водой и газовой шапкой. Однако, главным недостатком использования нейронных сетей для обучения и прогноза является сложность построения нейронной сети – для каждого случая необходима нейронная сеть соответствующей топологии, а также длительность периода обучения – до нескольких десятков лет.

Также существуют различные аналитические модели производительности скважин в регулярных многоскважинных системах разработки, рассматривающих как единичное соотношение подвижности вытесняющего и насыщающего флюидов [43, 114], так и более общий случай [119, 120]. Главным недостатком таких моделей является то, что они рассматривают только установившийся режим, тогда как изменение режима работы на нагнетательной скважине сопровождается процессами перераспределения поля давления.

Ввиду ограничений вышеописанных методов на практике для оценки эффективности системы ППД, расчета потерь и приростов добычи из-за изменения уровней закачки (и решении других задач, связанных с расчетом взаимовлияния скважин) используют подход материального баланса [68]. Это простой и быстрый способ оценить величину эффекта взаимовлияния скважин через динамику среднего пластового давления. Однако данный метод имеет ряд недостатков: он не учитывает неустановившийся режим, что приводит к существенным ошибкам при анализе разработки низкопроницаемых участков месторождения. Таким образом, при использовании материального баланса невозможно оценить величину темпа падения дебита новых скважин при несвоевременном вводе объектов ППД, рассчитать оптимальное время перевода нагнетательной скважины.

3.3.2. Аналитическое решение в пространстве Лапласа

В п. 2.1.4 построена численно-аналитическая модель фильтрации в многоскважинной многопластовой системе, лишенная озвученных выше недостатков. Задача двумерной фильтрации в регулярной системе заводнения сводится таким образом к сопряжению решения задач в каждой из областей дренирования элемента симметрии (например, для пятиточечной системы разработки это сопряжение фильтрации в зоне закачки и в зоне отбора). Решение в каждой из областей дренирования может быть получено методом возмущения формы границы [12, 47], что позволяет снизить размерность задачи и перейти от двумерной к сопряжению решений нескольких одномерных задач. В данной работе в каждой из областей дренирования решается плоскорадиальная задача, а области дренирования аппроксимируются кругами с соответствующими площадями.

Представим каждую скважину элемента симметрии вскрывающую круговую зону дренирования с заданием на границах этой зоны граничных условий сопряжения. Скважины находятся в несимметричных условиях, что сводится к тому, что на скважину приходится большая или меньшая область дренирования. Поэтому зона дренирования *i*-ой скважины будет иметь следующий радиус дренирования:

$$r_{ei} = \sqrt{\frac{S_i}{\pi}}, \tag{3.37}$$

где S_i - площадь, приходящаяся на *i*-ую скважину.

Элемент симметрии задается следующими векторами:

$$\vec{r}_e = \begin{pmatrix} r_{e1} \\ r_{e2} \\ \dots \\ r_{eN-1} \\ r_{eN} \end{pmatrix}, \ \vec{r}_w = \begin{pmatrix} r_{w1} \\ r_{w2} \\ \dots \\ r_{wN-1} \\ r_{wN} \end{pmatrix}, \ \vec{G} = \begin{pmatrix} p_{wf1} \\ \dots \\ p_{wfK} \\ q_{sK+1} \\ \dots \\ q_{sN} \end{pmatrix}, \ \vec{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_{N-1} \\ R_N \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

где r_{wi} - отвечает эффективному радиусу *i*-ой скважины (если на разных скважинах разные скин-факторы), r_{ei} - радиус дренирования *i*-ой зоны, вектор $\vec{G}$ - отвечает за граничные условия на скважине: будем считать, что в элементе симметрии содержится *K* скважин с условием поддержания постоянного забойного давления и *(N-K)* скважин с условием поддержания постоянного дебита (мы всегда можем перенумеровать скважины так, чтобы вектор $\vec{G}$ имел вид (3.38), R_i - совокупность свойств пласта *i*-ой зоны дренирования.

Пусть все зоны вначале невозмущенны:

$$p_i\left(r,t\right)=p_{i0},\ t=0,\ r\in\left(r_{wi},r_{ei}\right],\ i=\overline{1,N}\ . \tag{3.39}$$

Граничные условия на скважинах выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} p_i\left(r,t\right)\Big|_{r=r_{wi}}=p_{wfi},\ i=\overline{1,K} \\ \left.\dfrac{\partial p_i\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=r_{wi}}=\dfrac{\mu_i B_{oi} q_{si}}{2\pi k_i h_i r_{wi}},\ i=\overline{\left(K+1\right),N}\end{cases},\quad t>0\ , \tag{3.40}$$

где μ_i - эффективная вязкость [119, 120].

Между зонами происходят межзонные перетоки, обозначим поток из *i*-ой зоны q_{zi}, в соответствии с законом Дарси:

$$q_{zi}=\frac{2\pi k_i h_i r_{ei}}{\mu_i}\left.\frac{\partial p_i\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=r_{ei}}. \tag{3.41}$$

Условие равенства нулю потоков из всех зон запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{N} q_{zi}=0\,. \tag{3.42}$$

По сути, уравнение (3.42) представляет собой закон сохранения вещества и представляет уравнение (2.21).

Также в качестве еще одного граничного условия необходимо взять условие равенства давлений на радиусе дренирования для различных зон, это следует из требования непрерывности функции давления при переходе из одной зоны в другую:

$$p_1\left(r,t\right)\Big|_{r=r_{e1}}=p_2\left(r,t\right)\Big|_{r=r_{e2}}=\ldots=p_N\left(r,t\right)\Big|_{r=r_{eN}}. \tag{3.43}$$

Условия (3.42), (3.43) записанные относительно давления и есть условия (2.21).

Запишем систему уравнений для *i*-ой зоны. В соответствии с рассматриваемыми упрощениями данная система запишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\kappa_i}\dfrac{\partial \Delta p_i(r,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Delta p_i(r,t)}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 \Delta p_i(r,t)}{\partial r^2} \\ \Delta p_i(r,t) = 0,\ (r_{wi}, r_{ei}],\ t = 0 \\ \begin{cases} \Delta p_i(r,t)\big|_{r=r_{wi}} = p_{wfi} - p_0, \quad i = \overline{1,K} \\ \left.\dfrac{\partial \Delta p_i(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_{wi}} = \dfrac{\mu B_o q_{si}}{2\pi k_i h_i r_{wi}},\ i = \overline{(K+1),N} \end{cases},\ t > 0 \\ \left.\dfrac{\partial \Delta p_i(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_{ei}} = \dfrac{\mu_i q_{zi}}{2\pi k_i h_i r_{wi}},\ t > 0 \end{cases}. \tag{3.44}$$

В пространстве Лапласа система (3.44) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\kappa_i}\dfrac{\partial \Delta \tilde{p}_i}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Delta \tilde{p}_i}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 \Delta \tilde{p}_i}{\partial r^2} \\ \begin{cases} \Delta \tilde{p}_i\big|_{r=r_{wi}} = \dfrac{p_{wfi} - p_0}{s}, \qquad i = \overline{1,K} \\ \left.\dfrac{\partial \Delta \tilde{p}_i(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_{wi}} = \dfrac{\mu B_o q_{si}}{2\pi k_i h_i r_{wi} s},\ i = \overline{(K+1),N} \end{cases},\ t > 0 \\ \left.\dfrac{\partial \Delta \tilde{p}_i(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_{ei}} = \dfrac{\mu_i \tilde{q}_{zi}}{2\pi k_i h_i r_{wi}},\ t > 0 \end{cases}. \tag{3.45}$$

Решением (3.45) в пространстве Лапласа является [150]:

$$\Delta \tilde{p}_i(r,s) = C_1^i I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa_i}}r\right) + C_2^i K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa_i}}r\right). \tag{3.46}$$

Константы C_1^i, C_2^i находятся из граничных условий и зависят от межзонных перетоков:

$$C_1^i = A_1^i \tilde{q}_{zi} + B_1^i, \tag{3.47}$$

$$C_2^i = A_2^i \tilde{q}_{zi} + B_2^i. \tag{3.48}$$

где введены следующие обозначения, если на скважине поддерживается постоянное забойное давление (т.е. $i = \overline{1,K}$):

$$A_1^i = \sqrt{\frac{\kappa_i}{s}} \frac{K_0(x_{wi})\mu_i}{2\pi k_i h_i r_{ei}\left(I_0(x_{wi})K_1(x_{ei}) + I_1(x_{ei})K_0(x_{wi})\right)},$$
$$B_1^i = \frac{(p_{wfi} - p_0)K_1(x_{ei})}{s\left(I_0(x_{wi})K_1(x_{ei}) + I_1(x_{ei})K_0(x_{wi})\right)} \tag{3.49}$$

$$A_2^i = -\sqrt{\frac{\kappa_i}{s}} \frac{I_0(x_{wi})\mu_i}{2\pi k_i h_i r_{ei}\left(I_0(x_{wi})K_1(x_{ei}) + I_1(x_{ei})K_0(x_{wi})\right)}, \tag{3.50}$$

$$B_2^i = \frac{\left(p_{wfi} - p_0\right) I_1\left(x_{ei}\right)}{s\left(I_0\left(x_{wi}\right)K_1\left(x_{ei}\right) + I_1\left(x_{ei}\right)K_0\left(x_{wi}\right)\right)}.$$

если на скважине поддерживается постоянный дебит (т.е. $i = \overline{\left(K+1\right), N}$):

$$A_1^i = \sqrt{\frac{\kappa_i}{s}} \frac{K_1\left(x_{wi}\right)\mu_i}{2\pi k_i h_i r_{ei}\left(K_1\left(x_{wi}\right)I_1\left(x_{ei}\right) - K_1\left(x_{ei}\right)I_1\left(x_{wi}\right)\right)},$$

$$B_1^i = -\frac{\sqrt{\kappa_i}}{s\sqrt{s}} \frac{K_1\left(x_{ei}\right)\mu_i q_{si} B_o}{2\pi k_i h_i r_{wi}\left(K_1\left(x_{wi}\right)I_1\left(x_{ei}\right) - K_1\left(x_{ei}\right)I_1\left(x_{wi}\right)\right)} \tag{3.51}$$

$$A_2^i = \sqrt{\frac{\kappa_i}{s}} \frac{I_1\left(x_{wi}\right)\mu_i}{2\pi k_i h_i r_{ei}\left(K_1\left(x_{wi}\right)I_1\left(x_{ei}\right) - K_1\left(x_{ei}\right)I_1\left(x_{wi}\right)\right)},$$

$$B_2^i = -\frac{\sqrt{\kappa_i}}{s\sqrt{s}} \frac{I_1\left(x_{ei}\right)\mu_i q_{si} B_o}{2\pi k_i h_i r_{wi}\left(K_1\left(x_{wi}\right)I_1\left(x_{ei}\right) - K_1\left(x_{ei}\right)I_1\left(x_{wi}\right)\right)}. \tag{3.52}$$

где $z_i = \sqrt{\dfrac{s}{\kappa_i}}$, $x_{wi} = z_i r_{wi}$, $x_{ei} = z_i r_{ei}$, I_0, I_1, K_0, K_1 - модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно.

В соответствии с (3.45), давление с учетом новых обозначений вычисляется по формуле:

$$\Delta\tilde{p}_i = \left(A_1^i I_0\left(x_i\right) + A_2^i K_0\left(x_i\right)\right)\tilde{q}_{zi} + \left(B_1^i I_0\left(x_i\right) + B_2^i K_0\left(x_i\right)\right). \tag{3.53}$$

Введем новые обозначения:

$$A^i = A_1^i I_0\left(x_i\right) + A_2^i K_0\left(x_i\right),\ B^i = B_1^i I_0\left(x_i\right) + B_2^i K_0\left(x_i\right). \tag{3.54}$$

С учетом новых обозначений:

$$\Delta\tilde{p}_i = A^i \tilde{q}_{zi} + B^i. \tag{3.55}$$

Уравнения (3.42), (3.43) в пространстве Лапласа выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \dots \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{cases} \Delta\tilde{p}_1 - \Delta\tilde{p}_2 = 0 \\ \Delta\tilde{p}_2 - \Delta\tilde{p}_3 = 0 \\ \dots \\ \Delta\tilde{p}_{N-1} - \Delta\tilde{p}_N = 0 \\ \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \dots + \tilde{q}_N = 0 \end{cases}. \tag{3.56}$$

С учетом введенных выше обозначений:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \dots \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{cases} A^1\tilde{q}_{z1} - A^2\tilde{q}_{z2} = L_1 \\ A^2\tilde{q}_{z2} - A^3\tilde{q}_{z3} = L_2 \\ \dots \\ A^{N-1}\tilde{q}_{zN-1} - A^N\tilde{q}_{zN} = L_{N-1} \\ \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \dots + \tilde{q}_N = 0 \end{cases}. \tag{3.57}$$

где введено обозначение:

$$L_i = B^{i+1} - B^i . \tag{3.58}$$

Система (3.57), имеет решение и притом только одно. Введем обозначение:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} A^1 & -A^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & -A^3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A^{N-1} & -A^N \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} L^1 \\ L^2 \\ \dots \\ L^{N-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_{z1} \\ \tilde{q}_{z2} \\ \dots \\ \dots \\ \tilde{q}_{zN} \end{pmatrix}. \tag{3.59}$$

Таким образом:

$$\hat{C}\vec{\tilde{q}} = \vec{b} . \tag{3.60}$$

Вектор неизвестных параметров вычисляется следующим образом:

$$\vec{\tilde{q}} = \hat{C}^{-1}\vec{b} . \tag{3.61}$$

где $\hat{C}^{-1}$ - обратная матрица $\hat{C}$.

После нахождения вектора неизвестных $\vec{\tilde{q}}$, по формулам (3.47)-(3.55) находим значения коэффициентов C_1^i и C_2^i, и определяем динамику поля давлений в *i*-ой зоне. В обычные координаты из пространства Лапласа переходим с помощью численного алгоритма.

3.3.3. Учет аквифера

Рассмотрим пример введения аквифера для элемента симметрии 5-точки, а затем обобщим введение аквифера для произвольного элемента. Рассмотрим элемент симметрии 5-точки с аквифером (см. рис. 3.23).

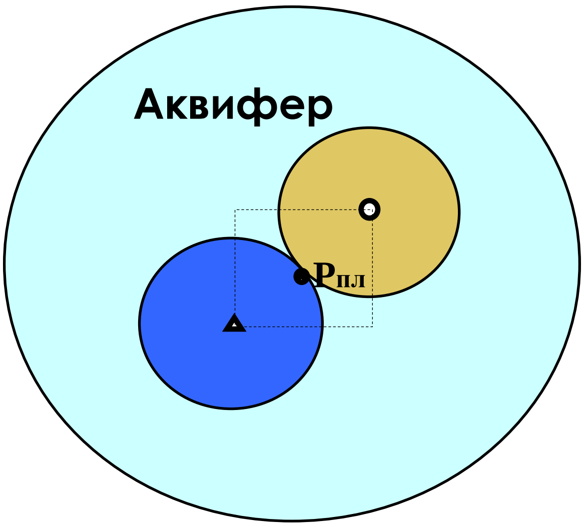


рис. 3.23. Элемент симметрии 5-точки с аквифером

Аквифер будем описывать как еще $(N+1)$-ую зону элемента симметрии, с внутренним радиусом $r_{wa} = r_e$ равным радиусу дренирования для зон закачки и отбора и внешним радиусом $r_a > r_e$.

Математически наличие аквифера для элемента с N скважинами выражается в $(N+1)$-ую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\kappa_a}\dfrac{\partial \Delta p_a(r,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Delta p_a(r,t)}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 \Delta p_a(r,t)}{\partial r^2} \\ \Delta p_a(r,t) = p_a - p_0,\ (r_e, r_a],\ t=0 \\ \begin{cases} \Delta p_a(r,t)\big|_{r=r_a} = p_a - p_0 \\ \left.\dfrac{\partial \Delta p_a(r,t)}{\partial t}\right|_{r=r_a} = 0 \end{cases},\ t>0 \\ \left.\dfrac{\partial \Delta p_a(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_e} = \dfrac{\mu_i q_{za}}{2\pi k_i h_i r_e},\ t>0 \end{cases}. \quad (3.62)$$

где индексом a отмечены параметры аквифера.

При этом уравнения (3.42), (3.43) переписываются в виде:

$$p_1(r,t)\big|_{r=r_{e1}} = p_2(r,t)\big|_{r=r_{e2}} = \ldots = p_N(r,t)\big|_{r=r_{eN}} = p_a(r,t)\big|_{r=r_a},$$
$$\sum_{i=1}^{N} q_{zi} = q_a \quad (3.63)$$

где $q_a = \dfrac{2\pi k_a h_a r_{wa}}{\mu_a}\left.\dfrac{\partial p_a(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_{wa}}$.

На внешней границе аквифера задаются условия постоянного давления или отсутствия перетока.

3.3.4. Оценка радиусов для зон r_{ei} в аналитической модели

Свободным параметром в представленной выше аналитической модели является значение радиусов. Рассмотрим путь по оценке r_{ei} в предположении, что рассматриваемая система является однородной. Если добывающие скважины элемента симметрии системы разработки находятся симметрично относительно нагнетательной скважины, как, например в 5-точечной или 7-ми точечной системе, то не вызывает трудностей определить радиусы зон добычи по формуле (3.37) из данных о плотности сетки скважин. В системах разработки с несимметричным расположением добывающих скважин в данной работе предлагается определять размеры зон добычи с использованием решений сопряженной задачи установившейся фильтрации. Для большинства регулярных систем заводнения такие решения построены [43], [114], [119].

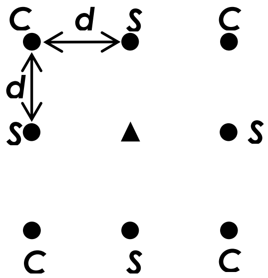


рис. 3.24. Девятиточечная схема разработки

Рассмотрим оценку радиусов зон дренирования на примере 9-точечной системы разработки. В пределах 9-точечной системы есть два типа добывающих скважин по отношению к нагнетательной: «угловая» и «боковая» (см. рис. рис. 3.24). В работе [114] построена модель по определению производительности нагнетательной скважины i:

$$i = \frac{2\pi kh\left(\Delta P\right)_{i,s}}{\left[\frac{3+R}{2+R}\left(\ln\frac{d}{r_w} - 0.272\right) - \frac{0.693}{2+R}\right]\mu}, \tag{3.64}$$

$$i = \frac{\pi kh\left(\Delta P\right)_{i,c}}{\frac{1+R}{2+R}\left(\ln\frac{d}{r_w} - 0.272\right)\mu}, \tag{3.65}$$

где $\left(\Delta P\right)_{i,s} = P_{inj} - P_{prodS}$ - разность забойных давлений на нагнетательной и боковой добывающей скважин, $\left(\Delta P\right)_{i,c} = p_{inj} - p_{prodC}$ - разность забойных давлений на нагнетательной и боковой добывающей скважин, $R = \frac{Q_{prodC}}{Q_{prodS}}$ - отношение дебитов боковой добывающей скважины к угловой.

Из формул видно, что в уравнениях (3.64), (3.65) присутствует лишний параметр R, определенный ранее. Если мы рассматриваем производительность нагнетательной скважины в пределах одного элемента симметрии, то очевидно, что производительность, определенная в (3.64) равна производительности в (3.65). Из этого можно получить выражения для R и избавиться от лишнего параметра в уравнениях (3.64) и (3.65). Хотя эти уравнения и будут иметь несколько более громоздкий вид:

$$i = \frac{\pi kh\Delta P_{i,c}}{\gamma\mu}\frac{\left(\gamma\left(2m+1\right) - 0.693\right)}{2\gamma - 0.693}, \tag{3.66}$$

$$i = \frac{\pi kh \Delta P_{i,s}}{\gamma \mu m} \frac{\left(\gamma\left(2m+1\right) - 0.693\right)}{2\gamma - 0.693}, \tag{3.67}$$

где введены следующие обозначения: $\gamma = \ln\frac{d}{r_w} - 0.272$, $m = \frac{\Delta P_{i,s}}{\Delta P_{i,c}} \equiv \frac{p_{inj} - p_{prodS}}{p_{inj} - p_{prodC}}$, при этом:

$$R = \frac{\gamma\left(3-2m\right) - 0.693}{\gamma\left(2m-1\right)}. \tag{3.68}$$

Таким образом, при одинаковых забойных давлениях на всех добывающих скважинах, то есть при $m=1$ ($p_{prodS} = p_{prodC} = p_{prod}$), уравнения (3.66)-(3.68) преобразуются следующим образом:

$$i\big|_{m=1} = \frac{\pi kh \Delta P}{\gamma \mu} \frac{\left(3\gamma - 0.693\right)}{2\gamma - 0.693}, \tag{3.69}$$

$$R = \frac{\gamma - 0.693}{\gamma}. \tag{3.70}$$

Из условия равенства закачки и отборов дебиты боковой и угловой скважин выражаются следующим образом:

$$Q_{prodS} = \frac{1}{2+R} i, \tag{3.71}$$

$$Q_{prodC} = \frac{R}{2+R} i. \tag{3.72}$$

Радиусы угловой и боковой зон добычи r_{eC}, r_{eS} найдем из условия, чтобы дебиты (3.71), (3.72) были равны дебитам, вычисленным по формуле Дюпюи:

$$r_e = r_w \exp\left(\frac{2\pi kh\left(p_{res} - p_{prod}\right)}{\mu Q_{prod}}\right). \tag{3.73}$$

где Q_{prod} - дебиты угловой или боковой скважин Q_{prodC}, Q_{prodS}, p_{res} - среднее пластовое давление, которое можно оценить по материальному балансу [120].

3.3.5. Проверка модели на численном симуляторе

Построенная модель была проверена на численном гидродинамическом симуляторе. На рис. 3.25 представлены результаты расчетов динамики пластового давления, дебита и приемистости скважин элемента симметрии пятиточечной системы разработки, с помощью предлагаемой модели и коммерческого гидродинамического симулятора (добывающая и нагнетательная скважины запущены одновременно). Показано хорошее совпадение результатов расчетов.

С помощью построенной модели можно оперативно рассчитать различные темпы падения жидкости и оценить динамику пластового давления для различных периодов отработки нагнетательной скважины на нефть (см. рис. 3.26).

В представленной выше постановке, модель применима для однопластовых месторождений без газовой шапки. Использование модели ограничено коллекторами с низкими газовыми факторами, когда влиянием выделения газа можно пренебречь.

а б

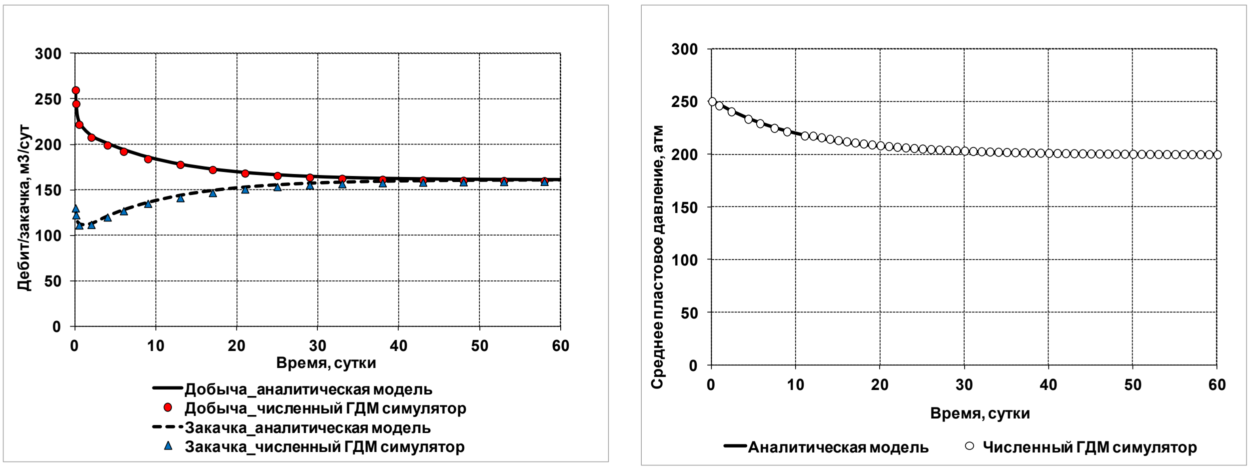


рис. 3.25. Проверка построенной аналитической модели на гидродинамическом симуляторе
а. Добыча и закачка;
б. Среднее пластовое давление.

а б

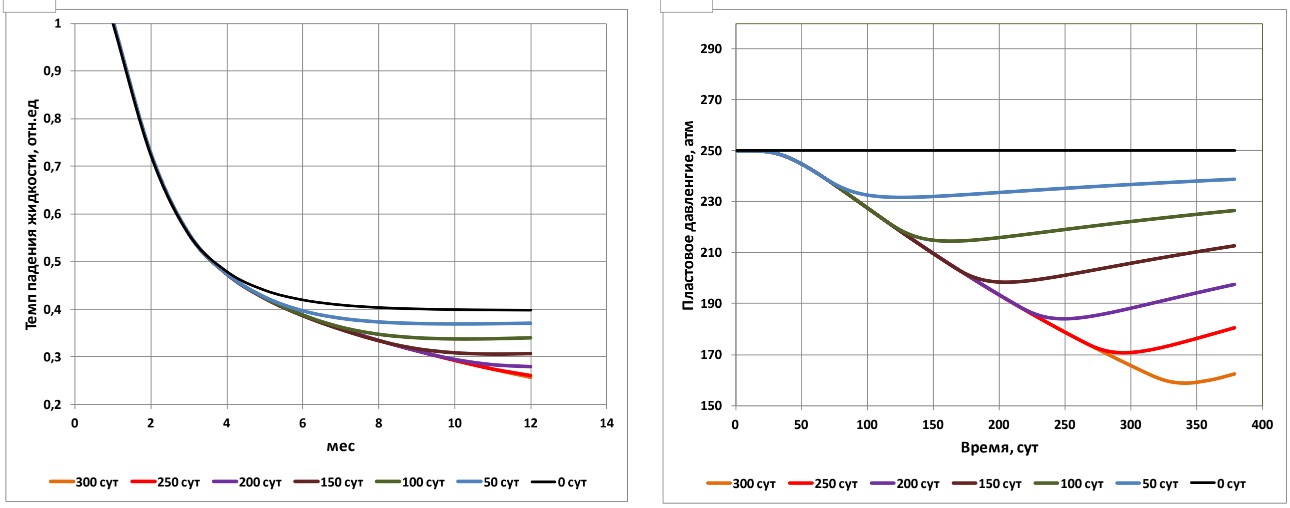


рис. 3.26. Темпы падения жидкости (а) и динамика пластового давления (б) для различных вариантов отработки нагнетательной скважины на нефть

3.3.6. Использование модели для оценки эффективности системы ППД

На основе вышеописанной модели был разработан удобный инструмент для инженера-разработчика по оценке эффективности ППД. Рассмотрим некоторые примеры использования данного инструмента.

В 2011г. возрос риск переноса даты запуска кустовой насосной станции (КНС) в районе бурения новых скважин на одном из месторождений Западной Сибири. Сдвиг даты перевода скважин в среднем составил 2 месяца (рис. 3.27.а). Необходимо было оценить величину увеличения темпа падения добычи новых скважин из-за снижения пластового давления, а также потери в добыче на окончание 2011г. (для уточнения входящей базовой добычи на 2012г.). Расчеты были выполнены по следующей схеме. На первом этапе осуществлялась адаптация описанной выше модели по фактическим данным. На втором этапе садаптированная модель использовалась для прогноза темпов падения, потерь добычи и оценке эффективности ППД см. рис. 3.27.б.

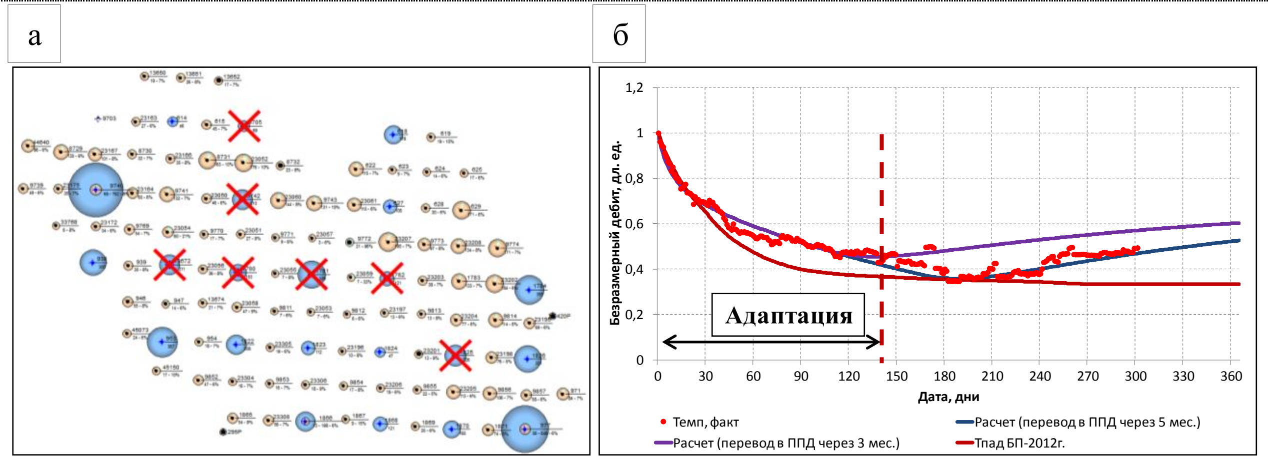


рис. 3.27. Адаптация и прогноз потерь добычи при запаздывающих переводах.
а. Карта текущих отборов;
б. Адаптация модели и расчет темпов падения дебита жидкости.
❌ - отсроченные переводы

На рис. 3.27.а изображена пузырьковая карта текущих отборов (2011г.), а также обозначены отложенные переводы скважин в ППД. На рис. 3.27.б изображен темп падения добычи: факт, его адаптация в течение первых 5 месяцев и дальнейший прогноз. Видна хорошая предсказательная способность рассматриваемой модели в период, следующий после адаптации. Как и предполагалось, риск несвоевременного ввода КНС оправдался: в феврале 2012г. потери базовой добычи из-за снижения пластового давления составили около 500 т/сут. Однако данные потери были учтены в утвержденном бизнес-плане добычи на 2012г. с помощью использования описанного выше алгоритма.

Рассмотрим еще один пример применения предлагаемой модели для оценки оптимального времени отработки нагнетательной скважины на нефть. В данной работе оптимизируемым значением являлся чистый дисконтированный доход (NPV), т.к. именно данный параметр отражает эффективность разработки месторождения в целом. На рис. 3.28 изображена полученная с помощью предлагаемой методики зависимость оптимального времени отработки нагнетательной скважины на нефть от проницаемости для стандартных условий работы скважин в Западной Сибири. Видно, что с ростом проницаемости время отработки на нефть уменьшается. Оптимальное время отработки может доходить до нескольких десятков месяцев для низкопроницаемых пластов. Причем, для пластов с проницаемостью более 10 мД перевод под нагнетание должен осуществляться как можно быстрее.

Заметим, что полученная зависимость по характеру аналогична зависимости, выведенной в работе [75] на основании построенной там же аналитической модели. Отличие рассматриваемого в данной работе подхода заключается в том, что для расчета предлагаемым методом нет необходимости предварительной настройки модели с помощью численного гидродинамического симулятора, как это требуется работе [75]. Кроме того, предлагаемая модель более универсальная, т.к. позволяет задавать на скважине произвольные граничные условия и режимы работы (произвольное забойное давление, дебит или их линейную связь, смену режимов работы).

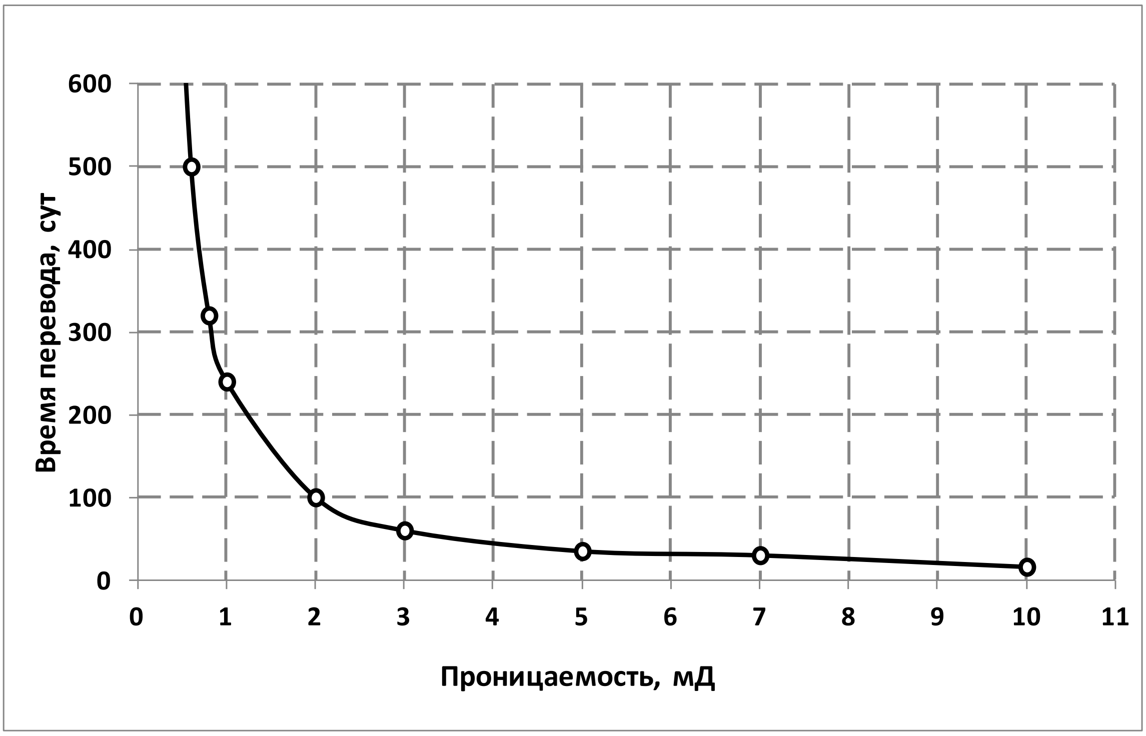
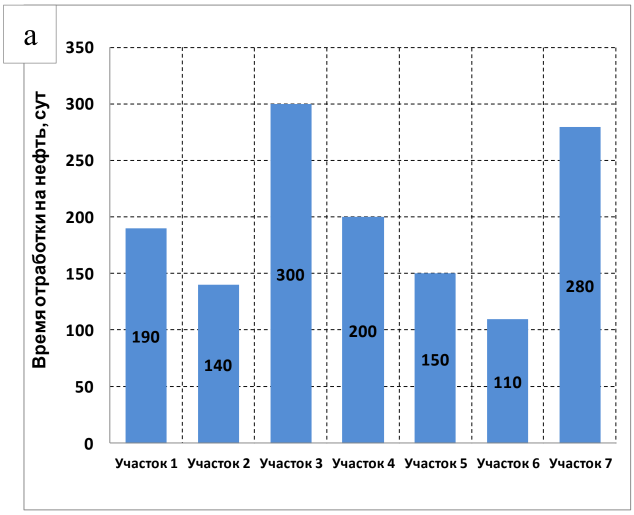


рис. 3.28. Оптимальное время перевода в зависимости от проницаемости

На рис. 3.29.а показано оптимальное время перевода нагнетательной скважины для различных районов одного из ключевых месторождений Западной Сибири. Видно, что даже в пределах одного месторождения подход к заводнению на различных его участках должен быть индивидуальным. На рис. 3.29.б показан дополнительный NPV (в приведенных единицах) при переводе скважин в нагнетание после рекомендуемого времени отработки. Выигрыш по сравнению с базовым сценарием, при котором время отработки равняется трем месяцам, составляет от 10 до 40 % для различных участков данного месторождения.



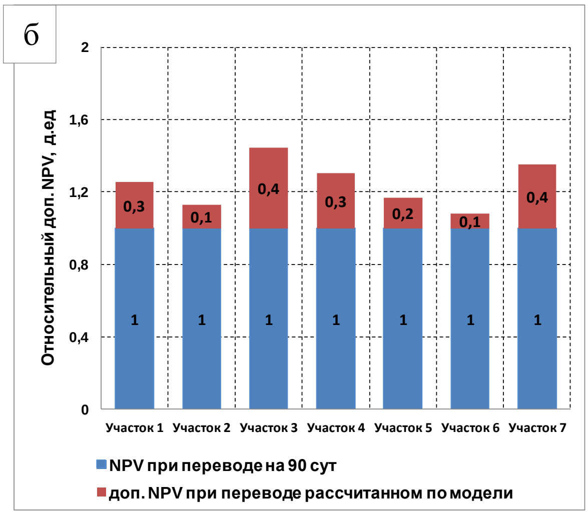


рис. 3.29. Результаты расчетов параметров заводнения для различных районов одного из ключевых месторождений ООО “РН-Юганскнефтегаз”
а. Оптимальное время отработки нагнетательной скважины на нефть для различных участков месторождения;
б. Выигрыш в NPV относительно сценария со стандартным временем перевода через 3 месяца.

4. Алгоритмы планирования добычи в условиях геологической неопределенности

В данной главе на основе разработанных во второй и третьей главах моделей и методов предлагается подход к планированию добычи в условиях геологической неопределенности. Рассматриваемый метод позволяет учесть риски за счет применения многовариантного расчета, использования разработанных физически содержательных моделей на основных этапах планирования. С помощью применения данного подхода удается оперативно рассчитать возможные варианты технологических и экономических характеристик проекта, что помогает принять наиболее объективное решение о начале разработке месторождения.

4.1. Проблемы планирования добычи в условиях геологической неопределенности

В данном параграфе обсуждается задача планирования добычи на нефтегазодобывающем предприятии, описывается традиционный подход к планированию добычи. Обсуждаются основные недостатки текущей схемы принятия решения о начале разработки.

Пусть участок месторождения, для которого производится расчет добычи, характеризуется следующим вектором параметров: $\vec{X}=\left(X^1,X^2,..,X^N\right)^T$. Способ разработки участка характеризуется набором величин: $\vec{\alpha}=\left(\alpha^1,\alpha^2,..,\alpha^K\right)^T$. Пусть существует оператор $\hat{H}\left(\vec{X},\vec{\alpha}\right)$, который ставит в соответствие векторам $\vec{X}$ и $\vec{\alpha}$ искомый вектор $\vec{Y}=\left(Y^1,Y^2,..,Y^M\right)$, характеризующий эффективность разработки месторождения:

$$\vec{Y}=\hat{H}\left(\vec{X},\vec{\alpha}\right). \tag{4.1}$$

В состав вектора $\vec{X}$ входят следующие параметры: проницаемость, пористость, мощность участка, характеристика вытеснения, пусковая обводненность скважин и т.д. Вектор $\vec{\alpha}$ характеризует параметры разработки участка: планируемые забойные давления скважин, параметры заканчивания (длина горизонтального ствола, размеры трещины ГРП), плотность сетки скважин и т.д. Координаты и размерность вектора $\vec{Y}$ зависит от специфики решаемой задачи планирования, чаще всего это показатели экономической эффективности (NPV, DPI, IRR, срок окупаемости), накопленная добыча и т.д.

На сегодняшний день перед большинством нефтедобывающих обществ, осуществляющих разработку месторождений Западно-Сибирского региона, стоит задача не допустить сверхпланового снижения добычи компаний. Т.к. дебит нефти базового фонда скважин непременно уменьшается, выполнить выше поставленную задачу возможно только посредством проведения геолого-технологических мероприятий (ГТМ). Наибольшие приросты от ГТМ приходятся на ввод новых скважин. Однако в настоящее время на территории Западной Сибири крупные и уникальные месторождения разведаны и вовлечены в разработку, их бурение прекращается. Поэтому с каждым годом возрастает роль ввода новых скважин на средних и мелких месторождениях. В свою очередь, эффективность инвестиций в разработку новых нефтяных залежей сопряжена с высокими рисками из-за существенной геологической неопределенности в параметрах месторождений, PVT-свойствах насыщающих флюидов и т.д. Кроме того, разработка большинства новых месторождений планируется на грани рентабельности (их запасы относятся к категории трудноизвлекаемых), что в свою очередь повышает значимость качественного планирования добычи с учетом всех вышеупомянутых факторов. Целью данной работы является разработка метода планирования добычи в условиях геологической неопределенности и инструмента для принятия решения о начале эксплуатационного бурения на новом месторождении или новых участках уже разрабатываемого месторождения.

Традиционный алгоритм принятия решения о начале разработки месторождения состоит в следующем (см. рис. 4.1). На первом и втором этапах специалисты геологической службы определяют исходные эффективные параметры залежи $\vec{X}$ (строят карты проницаемости, нефтенасыщенных толщин, определяют PVT-свойства насыщающего флюида и т.д.) и выполняют расчет добычи нефти и жидкости с месторождения в утвержденных в компаниях формах и инструментах. Далее на третьем и четвертом этапах, с использованием расчетного профиля добычи, специалисты смежных управлений вычисляют экономические показатели разработки, составляют экономический рейтинг бурения. При этом в данном подходе присутствуют следующие недостатки:

1. Отсутствует способ учета неопределенности. В исходных данных $\vec{X}$ всегда существует неопределенность. Использование единственного (детерминированного) набора исходных данных из всего множества вариантов не позволяет получить представление обо всех возможных исходах. Такой подход требует сведения всего распределения исходных данных к одному значению, выбор которого может быть недостаточно обоснованным.

2. Отсутствие физически содержательных моделей на некоторых этапах планирования. Темпы снижения добычи жидкости новых скважин в большинстве случаев определяют по статистическим данным работы скважин-аналогов. Использование статистических методов для прогноза вышеупомянутых показателей на новых месторождениях приводит к существенным ошибкам в планировании.

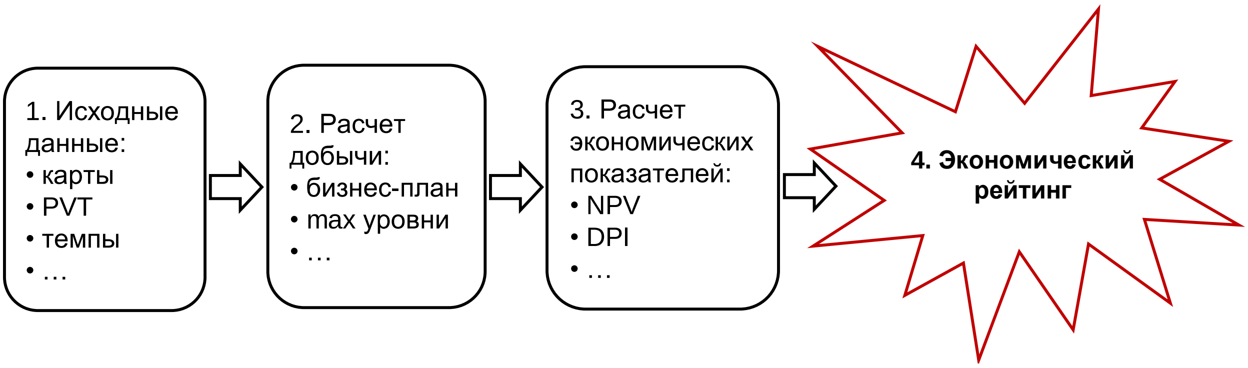


рис. 4.1. Традиционный алгоритм принятия решения о разработке месторождения.

Именно через устранение вышеупомянутых недостатков строится рассматриваемый подход к планированию добычи, излагаемый в данной работе.

4.2. Многовариантный подход к планированию добычи

4.2.1. Отказ от детерминистического описания исходных данных

Основной недостаток детерминистического подхода к планированию заключается в следующем. Традиционный алгоритм принятия решения построен таким образом, что результатом расчетов является один вектор параметров $\vec{Y}$ (NPV, DPI,…), характеризующий эффективность проекта. При этом данные экономические параметры – функции как нескольких исходных технологических и экономических $\vec{\alpha}$, так и геологических характеристик системы $\vec{X}$ (распределения насыщенности, проницаемости и т.д.), и именно в значениях последних всегда существует большая неопределенность. Однако чтобы получить один вектор чисел $\vec{Y}$ (NPV, DPI,…), характеризующий эффективность проекта, необходимо субъективно принять или закрепить некоторые постоянные исходные геологические параметры залежи и, следовательно, технологические параметры работы скважины (см. рис. 4.2 на примере пусковой обводненности скважин). Именно на этом этапе и появляется субъективная ошибка, величина которой определяется только постфактум.

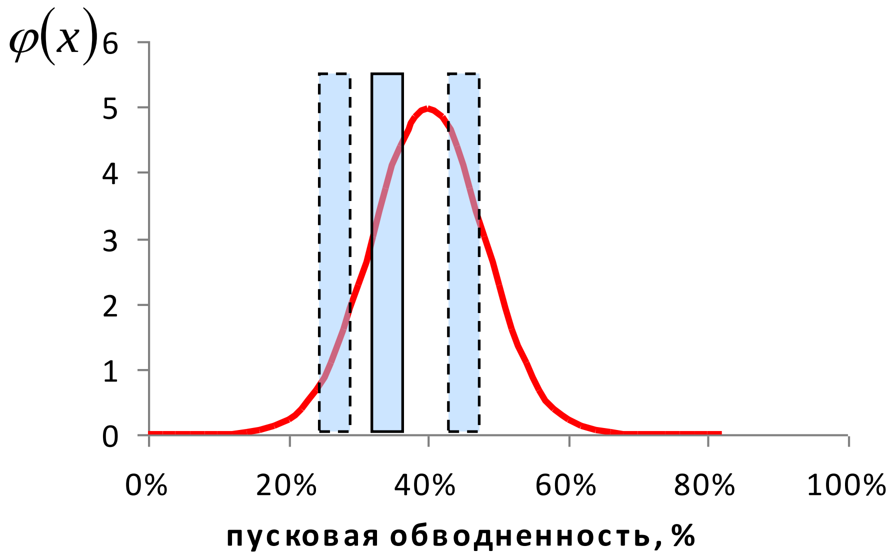


рис. 4.2. Стохастический и детерминистические подходы

– плотность распределения вероятностей пусковой обводненности скважины;

– закрепленное значение пусковой обводненности скважины.

В данной работе при прогнозировании уровней добычи предлагается более широко использовать вероятностный подход: заменить единственные значения исходных неопределенных параметров соответствующими распределениями плотности вероятностей. Пределы изменений рассматриваемых свойств пласта будут характеризовать величину неопределенности в значениях основных эффективных параметров залежи и работы скважины: проницаемости, мощности, пусковой обводненности скважины, пластового давления, вязкости нефти т.д. Для описания функции плотности распределения вероятностей $\phi(x)$ предлагается использовать двухпараметрические законы. Например, вариацию мощности, пусковой обводненности скважин, пластового давления и вязкости нефти предлагается описывать с помощью модифицированного нормального закона распределения по формуле (4.2) (в соответствии с центральной предельной теоремой [29]), проницаемости – с помощью логнормального. Данные зависимости предлагается использоваться для расчета добычи и экономических параметров проекта.

$$\phi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{f(x)-f(0)}{1-2F(0)-2\mu f(0)}, x>0\end{cases}$$
$$\Phi(x)=\int_0^x \phi(x)\,dx \qquad . \tag{4.2}$$
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

где μ и σ – математическое ожидание и стандартное отклонение, $f(x)$ - нормальная функция плотности распределения вероятностей с параметрами μ и σ, $\Phi(x)$ - функция распределения вероятностей.

Заметим, что доступные в настоящее время коммерческие продукты – комплексные инструменты для оценки объема запасов месторождений, определения рисков их подтверждения и расчета экономической эффективности поисково-разведочных проектов – также основаны на вероятностном походе описания эффективных свойств продуктивного пласта [24]. Важным достоинством данных программ является возможность быстрого количественного расчета степени влияния данного входного параметра на дисперсию результата. К существенным недостаткам относится отсутствие физически-содержательных моделей для расчета эффективных технологических характеристик работы скважины, и оценки экономической составляющей проекта с учетом различных капитальных вложений в зависимости от реализации того или иного варианта разработки залежи. Аналогичные ограничения присутствуют и в работе [35].

Таким образом, задача учета геологических рисков сводится к определению распределения результата $\vec{Y}$ в зависимости от распределения $\vec{X}$. Поставленная задача в работе решатся численно путем последовательного перебора реализаций моделируемых случайных величин $\vec{X}$. Для планирования оптимальных параметров разработки месторождения рассматриваются различные сценарии $\vec{\alpha}$. Это позволяет выбрать наиболее благоприятный и устойчивый вариант разработки месторождения.

На рис. 4.3 изображен предлагаемый многовариантный подход к планированию добычи. На первом этапе рассматриваются различные варианты по запасам на рассматриваемом участке месторождения. Далее с учетом набора распределений свойств пласта, отражающим неуверенность в исходных параметрах, рассматриваются различные сценарии развития разработки участка месторождения (тип заканчивания скважин, плотность сетки скважин и т.д.).

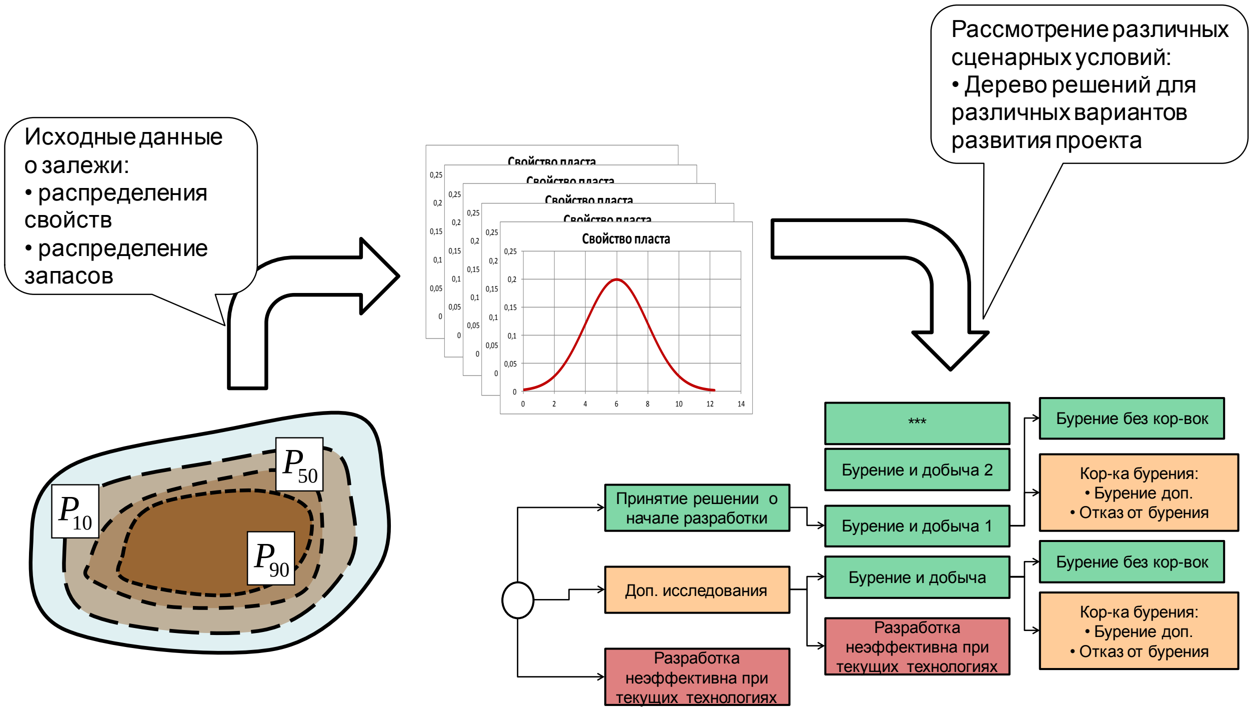


рис. 4.3. Многовариантный подход и корректный учет рисков

4.2.2. Количественный учет рисков при планировании на основе многовариантного подхода

Рассмотрим предлагаемый подход к планированию, основанный на многовариантном способе расчетов и корректном учете геологических рисков. Результатом планирования является не единственное значение, а гистограмма распределения вероятностей данного экономического показателя (например, распределение NPV). Количественно оценить вероятность экономически эффективного или неэффективного сценария предлагается по следующим формулам:

$$\begin{aligned} P^{+} &= \int_{0}^{+\infty} \phi(NPV)\,dNPV \\ P^{-} &= \int_{-\infty}^{0} \phi(NPV)\,dNPV \end{aligned} \quad . \qquad (4.3)$$

где $\phi(NPV)$ - плотность распределения вероятностей NPV, P^{+} - вероятность получить положительный NPV, при реализации проекта, P^{-} - вероятность получить отрицательный NPV, при реализации проекта. В зависимости от соотношения P^{+} и P^{-} существуют три возможных варианта принятия решения о разработке месторождения:

а. Если $P^{+} < P^{-}$ (или $P^{-} > \varepsilon$, где ε -параметр, определяемый экспертно, например $\varepsilon = 50\%$), то при существующих экономических условиях проект разработки неэффективен, следовательно необходимо отложить бурение скважин на данном месторождении, см. рис. 4.4.а;

б. Если $P^{+} \approx P^{-}$, или $V > \beta$, (V - коэффициент вариации NPV, β-параметр, определяемый экспертно, например $\beta = 0,5$) то риск неокупаемости проекта существен, необходимо провести дополнительные исследования, рассмотреть альтернативные методы разработки, см. рис. 4.4.б;

в. Если $P^{+} > P^{-}$ (или $P^{+} > 1 - \varepsilon$), то разработка месторождения экономически эффективна, необходимо начинать бурение скважин, см. рис. 4.4.в.

а. б. в.

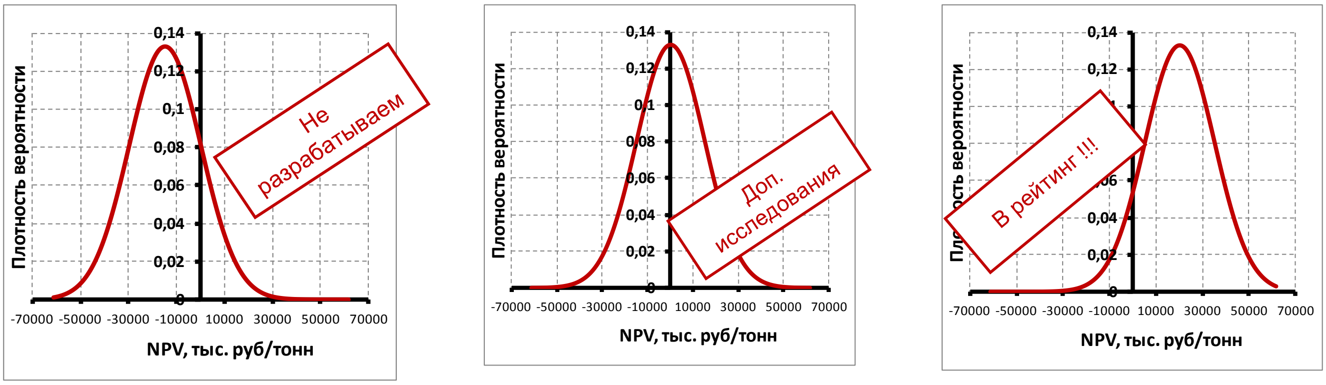


рис. 4.4. Варианты принятия решения:

а. $P^{+} < P^{-}$ разработка не рентабельна при текущих технологиях;

б. $P^{+} \approx P^{-}$, или $V > \beta$ необходимо запланировать дополнительные исследования;

в. $P^{+} > P^{-}$ следует внести бурение скважин в рейтинг бурения.

Благодаря использованию предлагаемого подхода, специалисты могут сосредоточиться не на расчетах добычи и экономики проекта, а на принятии решения о начале бурения и выборе наиболее предпочтительного варианта разработки.

Таким образом, численное определение распределения результата $\vec{Y}$ в зависимости от распределения $\vec{X}$ требует проведения большого количества расчетов (порядка нескольких тысяч). Применение трехмерных гидродинамических симуляторов для расчета добычи по различным вариантам ограничено ввиду больших затрат времени (до нескольких месяцев), а также отсутствия достаточного количества данных для новых залежей и новых участков уже разрабатываемых месторождений. Поэтому для определения и планирования эффективных параметров производительности скважин (пусковые приросты, темпы падения и т.д.) в данной работе предлагается использовать численно-аналитические модели производительности скважин, разработанные выше в предыдущих главах.

4.3. Использование физически содержательных моделей при планировании добычи

Данный параграф посвящен изложению путей применения алгоритмов и моделей, разработанных в предыдущих главах, для задач планирования добычи на нефтегазодобывающем предприятии. Показано, как разработанные модели и методы позволяют планировать темпы падения новых скважин, пусковые приросты, а также решать другие задачи разработки.

4.3.1. Планирование эксплуатационного бурения

Одной из главных неопределенностей при планировании участков под эксплуатационное бурение – является проницаемость. В данном разделе рассматривается методика уточнения карт проницаемости по данным работы скважин окружения на неустановившемся режиме.

В п. 3.2 было показано, как с использованием данных нормальной эксплуатации уточнить проницаемость пласта. Для анализа была необходима информация о работе скважины на неустановившемся режиме при ее запуске в режим из бурения, а также данные об ее стационарных параметрах на установившемся режиме. В данном разделе обобщен описанный подход для оценки параметров пласта из данных о неустановившемся режиме при запуске скважины после ее любой остановки. Основным идентифицируемым параметром является проницаемость.

Традиционный подход к построению карт проницаемости заключается в проведении ГДИС на опорной сетке скважин и последующей интерполяции полученных значений. Данный подход встречает ряд существенных трудностей, ограничивающих его применение на большинстве месторождений Западной Сибири. Во многих случаях исследования признаются неуспешными из-за недостижения псевдорадиального режима, что связано с большими трещинами ГРП и низкими проницаемостями. Охват исследованиями фонда мал – около 20% – этого недостаточно, для насыщения карт проницаемости, охват исследованиями нерегулярен. При этом необходимое количество исследований практически нереализуемо, вследствие больших потерь добычи на простои во время исследований: по оценкам, потери на простои в таком случае сравнимы с приростом добычи от основных видов ГТМ. Одним из выходов из сложившейся ситуации является использование в картопостроении наряду с промысловыми замерами расчетных методов, основанных на анализе данных эксплуатации скважин. В данном разделе описывается использование алгоритма по уточнению проницаемости из данных работы скважин на неустановившемся режиме.

Описание алгоритма уточнения проницаемости

Рассмотрим, скважину, которая запустилась после остановки (см. рис. 4.5). Уточнение проницаемости происходит путем минимизации отклонения расчетной динамики дебита скважины на неустановившемся режиме после остановки от ее фактического дебита. Данные алгоритмы уточнения параметров пласта подробно описаны в гл. 3. Расчетная динамика скважины моделируется в три этапа. На первом этапе принимается, что скважины работают на псевдоустановившемся режиме, с помощью разработанных алгоритмов строится начальное поле давления (см. гл. 2). На втором этапе моделируется глушение скважины во время остановки. На третьем этапе моделируется производительность скважины на неустановившемся режиме после ее запуска после остановки. Моделирование работы скважины на третьем этапе производится численно, а на первых двух – аналитически, с помощью разработанных в данной работе алгоритмов.

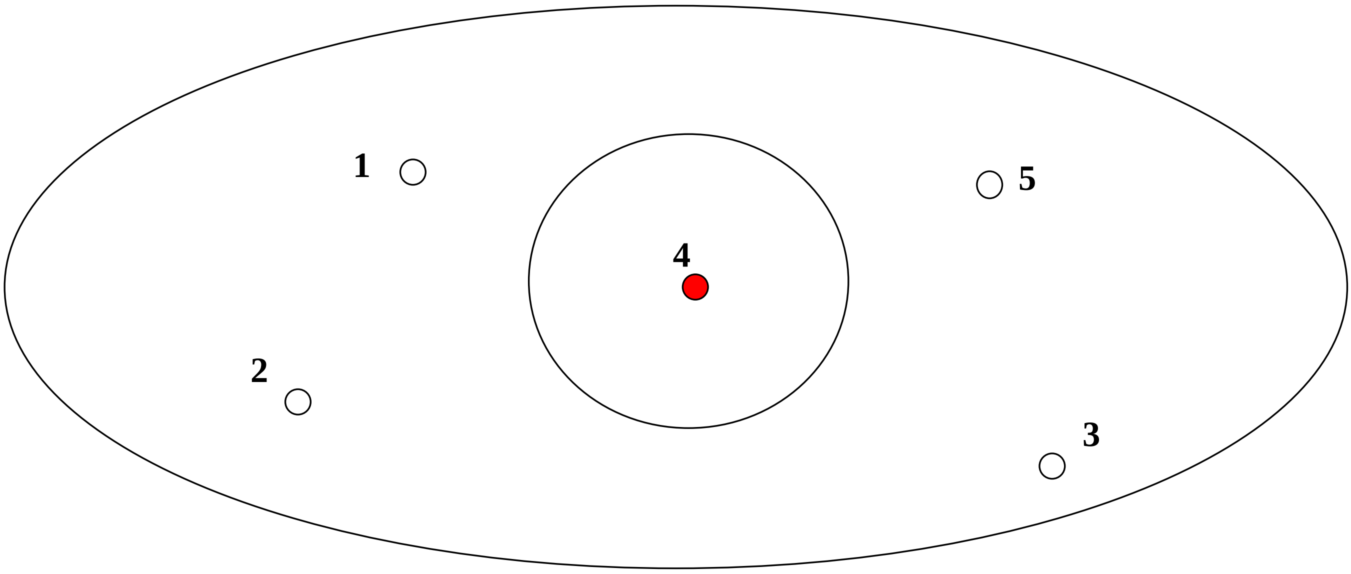


рис. 4.5. Участок месторождения и остановленная на ремонт скважина (4)

Корректность работы алгоритма определения проницаемости была сверена с результатами интерпретации достоверных ГДИС. Сравнение показано на рис. 4.6.

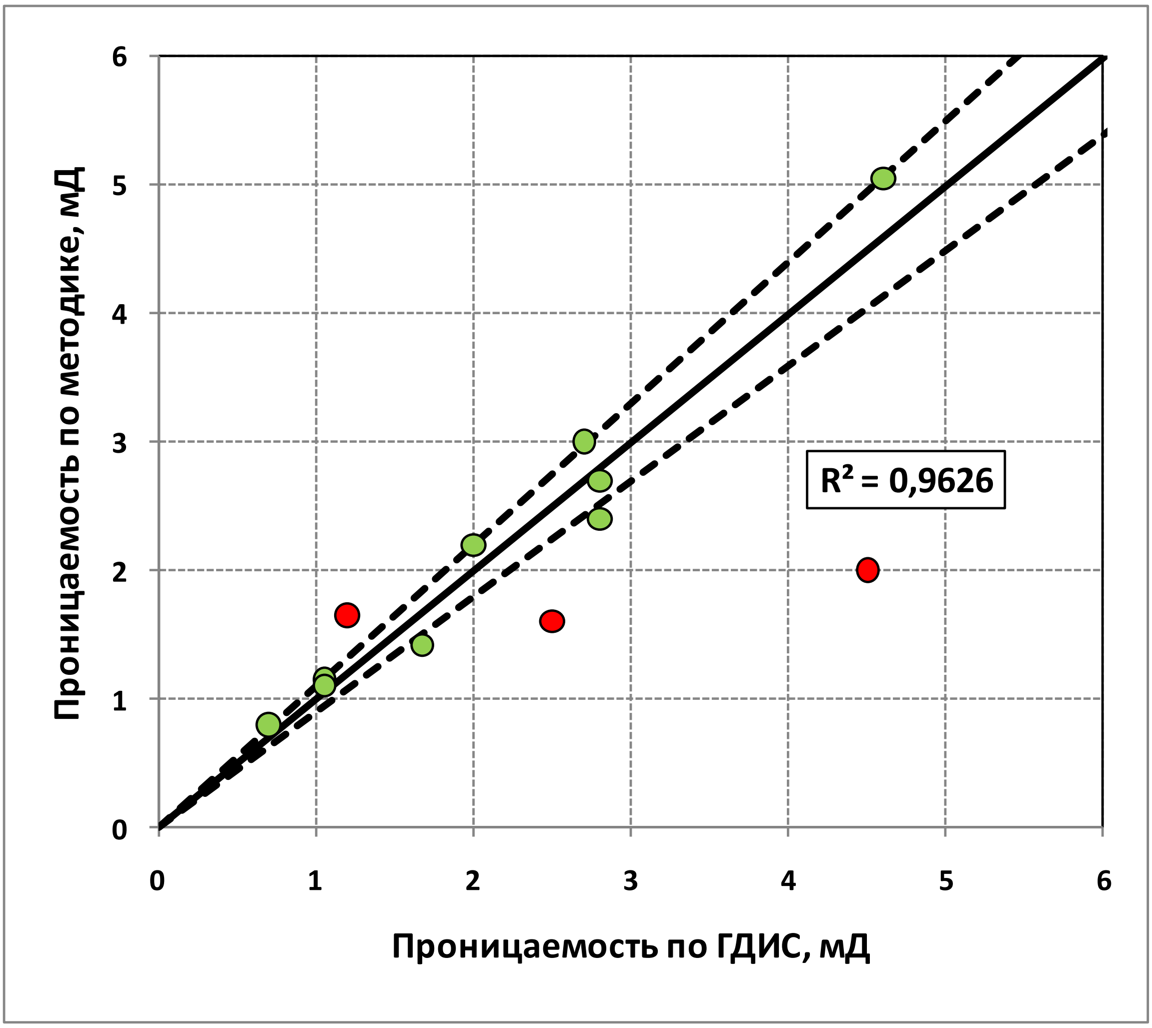


рис. 4.6. Участок месторождения и остановленная на ремонт скважина (4)

Результаты применения алгоритма при картопостроении

Описанный выше алгоритм внедрен и используется при картопостроении на самом крупном добывающем предприятии России – ООО «РН-Юганскнефтегаз». В связи с тем, что количество остановок на несколько порядков больше количества ГДИС, применение алгоритма уточнения проницаемости из данных неустановившегося режима после остановок позволяет существенно повысить качество картопостроения. На рис. 4.7 изображен алгоритм уточнения поля проницаемости из данных неустановившегося режима работы скважин. На первом этапе используется карта давлений: это может быть карта, построенная с помощью алгоритмов описанных в гл. 2, либо карта полученная другим способом. Эта карта используется в качестве начального условия при моделирования неустановившегося режима новой скважины или скважины после остановки. Далее с помощью описанного алгоритма на скважине закрепляется новое, уточненное значение проницаемости.

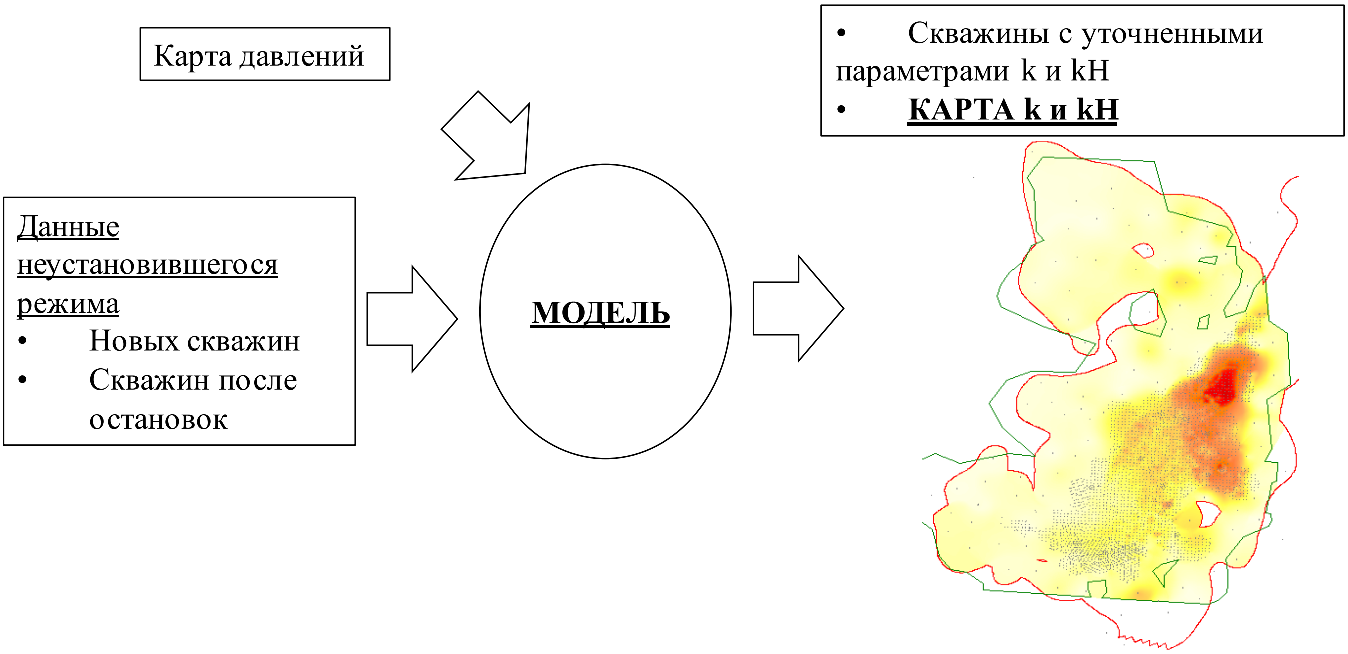


рис. 4.7. Схема использования алгоритма построения карты проницаемости

Построенные карты используются при планировании ГТМ и участков под эксплуатационное бурение. На данный момент описанный алгоритм является главным инструментом при планировании запускных приростов в ООО «РН-Юганскнефтегаз».

4.3.2. Определение эффективности и планирование ГТМ

Несмотря на то, что изначально методика разрабатывалась для планирования эксплуатационного бурения, эффект от ее внедрения на добывающем предприятии оказался многоцелевым. В данном разделе приведены примеры использования описанной выше методики построения карт проницаемости с учетом данных нормальной эксплуатации для определения и планирования эффективности ГТМ.

Определение эффективности ГТМ

С помощью анализа с использованием предлагаемой методики неустановившегося режима на скважинах после ГТМ (в том числе новых) можно оценить эффективность самих ГТМ, которая выражается в величине изменения скин-фактора. На рис. 4.8 приведен пример анализа эффективности проведенного ГРП. В обычной ситуации мы можем сделать это либо по достижению расчетного дебита скважины, либо, если он не достигнут, по результатам проведенного на скважине ГДИС для выявления конкретной проблемы. При этом скважину приходится останавливать для проведения исследования. Описанная методика позволяет по данным неустановившегося режима работы скважины оценить параметры ГРП и идентифицировать проблему без необходимости проведения исследования.

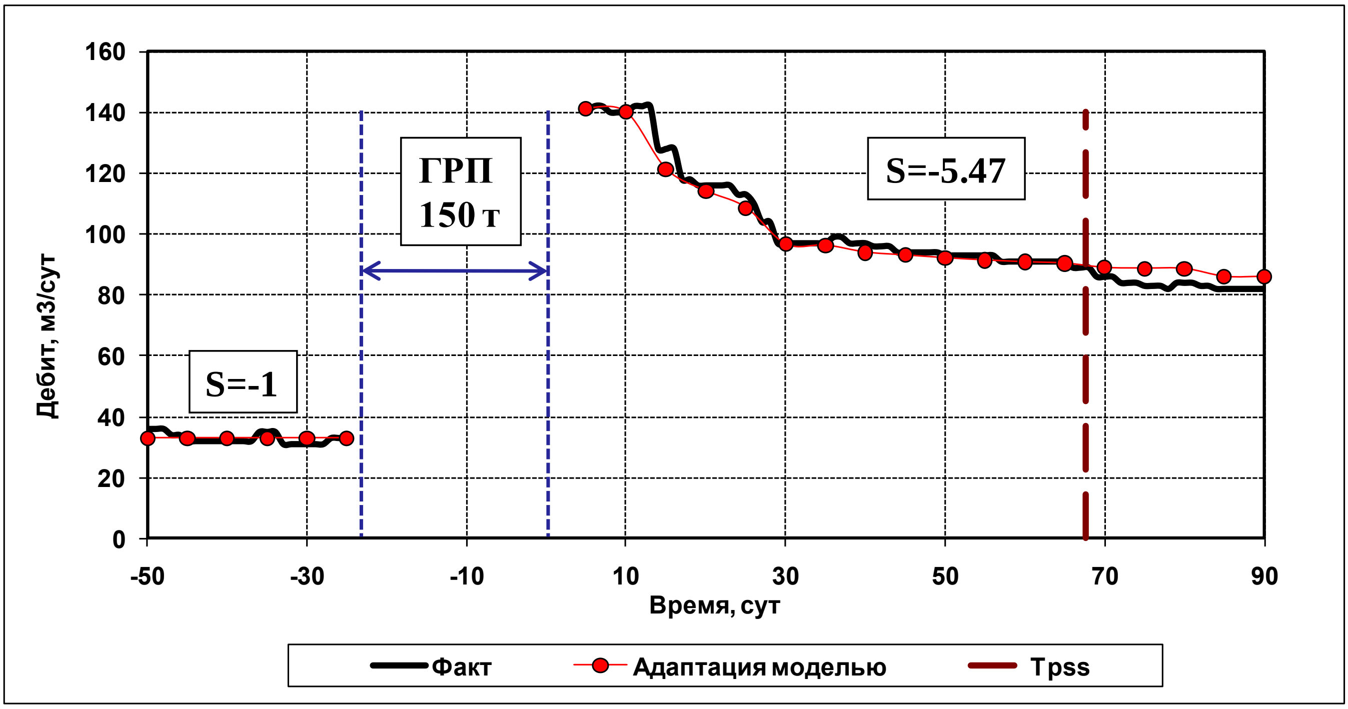


рис. 4.8. Анализ эффективности проведенного ГРП

Рассмотрим приведенный на рис. 4.8 пример: здесь изображен график динамики псевдорадиального скин-фактора [142], отражающего степень стимуляции призабойной зоны скважины. Как описано в гл. 3 при идентификации учитывается также и данные работы скважины до ГТМ. Из графика видно, что после проведения на скважине 150-тонного ГРП скин-фактор изменился с -1.13 до -5.47. Отметим, что в соответствии с отчетом ГРП величина скин-фактора составляет -5.55. Видно, что в автоматическом режиме уточняется и скин-фактор до ГТМ: значение -1.13 соответствует ожидаемым показателям: за 10 лет до анализируемого ГТМ на данной скважине был проведен 8-тонный ГРП.

Определение потенциала скважины АПВ при деоптимизации

Другой вариант использования разработанной методики – расчет потенциала скважины при ее работе в режиме автоматического повторного включения (АПВ). Известно, что очень трудно оценить реальные добычные характеристики скважины, которая работает в периодическом режиме, останавливаясь по нескольку раз в сутки на восстановление динамического уровня. Проследить за всеми изменениями дебита и забойного давления крайне проблематично, учитывая частоту замеров на автоматической групповой замерной установке (АГЗУ): около двух часов в сутки на каждую скважину. Поэтому в базу данных, как правило, вносится минимум усредненной субъективной информации, которая не позволяет оценить потенциал скважины и приводит к ошибкам при деоптимизации глубинного насосного оборудования (ГНО). Таким образом, на скважину спускается насос не подходящей производительности, что ведет к повторному ремонту либо к отложенной добыче.

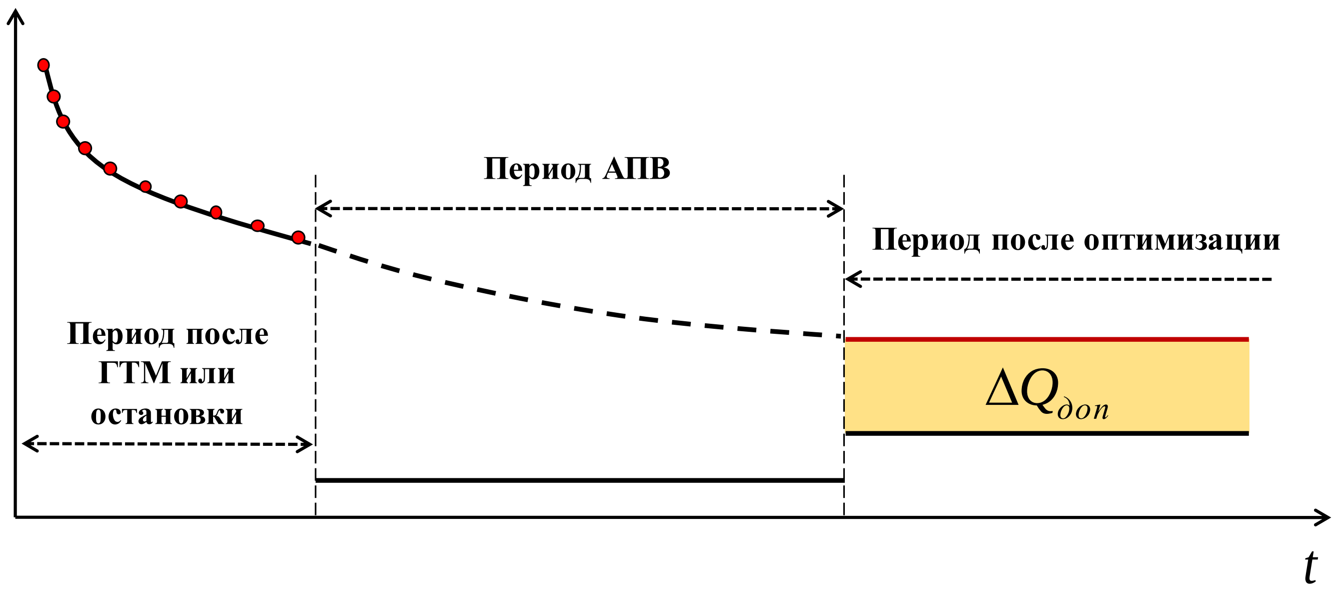


рис. 4.9. Схема определения потенциала скважины АПВ на деоптимизацию

Основная идея применения рассматриваемой методики изображена на рис. 4.9. Она заключается в использовании данных неустановившегося режима после ГТМ и прочих остановок для уточнения параметров пласта и оценки потенциала на деоптимизацию с помощью физически содержательной модели.

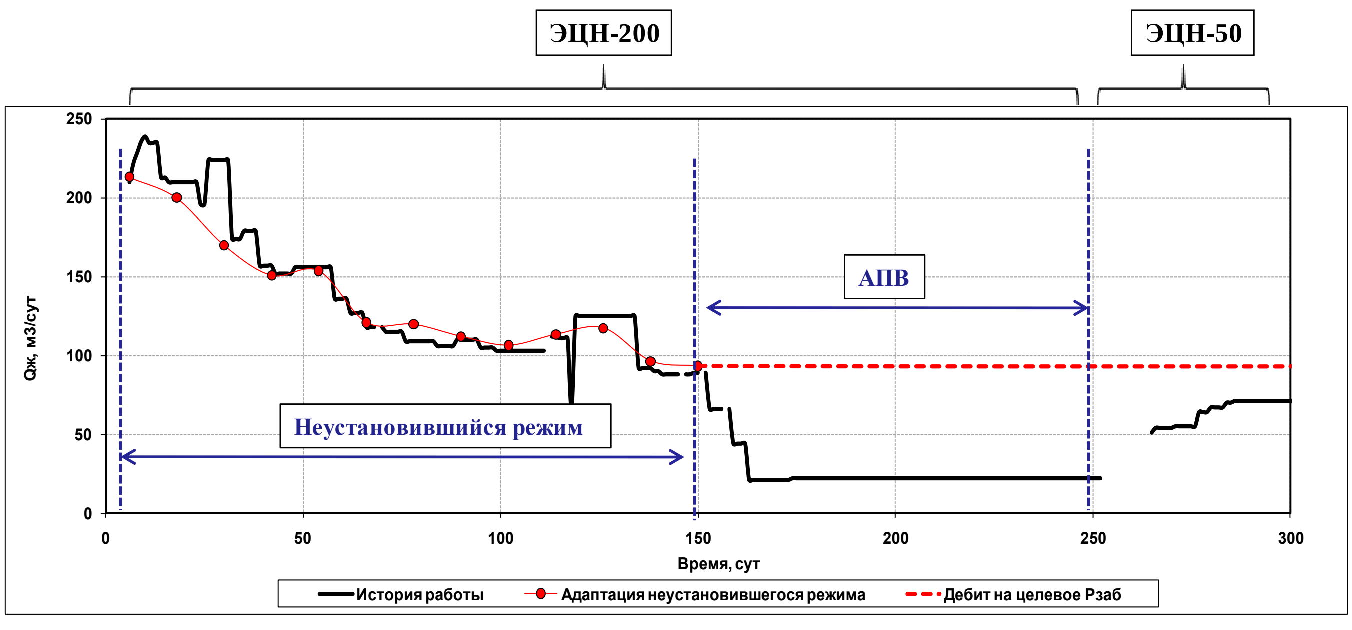


рис. 4.10. Пример использтования методики для определения потенциала скважины АПВ на деоптимизацию

На рис. 4.10 изображен реальный пример использования методики для определения потенциала скважины АПВ на деоптимизацию. Изначально в скважину был спущен насос ЭЦН-200, номинальной производительностью в 200 м^3/сут. Однако для данной скважины это слишком высокая производительность и скважина через несколько месяцев ушла в режим АПВ. По данным неустановившегося режима с помощью рассматриваемой методики возможно уточнить проницаемость пласта на данном участке – она оказалась почти в два раза ниже (план 1.7 мД, факт 0.9 мД). Потенциал на деоптимизацию, посчитанный с помощью физически содержательной модели с использованием данных об уточненной проницаемости составляет около 80 м^3/сут. Однако деоптимизацию провели на ЭЦН-50 (номинальной производительность 50 м^3/сут), получив таким образом потери в добыче (отложенную добычу). Позднее на скважине провели оптимизацию и спустили насос ВНН-79 (номинальной производительность около 80 м^3/сут), с которым скважина работает устойчиво уже продолжительное время.

4.3.3. Планирование темпов падения жидкости

В гл.3 (п.2) рассматривалась модель производительности скважины в неоднородном расчлененном коллекторе. Также была предложена методика планирования темпов падения с учетом построения карт проницаемости и карт интегральной связности с системой ППД. С помощью совместного использования этих данных предлагается планировать темпы падения с использованием физически содержательных моделей. Таким образом благодаря рассматриваемой методике на основных месторождениях ООО «РН-Юганскнефтегаз» отказались от планирования темпов падения по статистике и перешли к планированию расчетных темпов падения жидкости.

На рис. 4.11 изображен пример планирования темпов падения жидкости на участке одного из самых крупных месторождений Западной Сибири. На первом этапе по факту работы новых скважин краевых кустов предыдущих годов бурения были садаптированы параметры неоднородного пласта и построены карты проницаемости и несвязности в неразбуренной зоне. Далее на втором этапе были спрогнозированы темпы падения жидкости новых скважин в неразбуренной зоне. Дополнительное преимущество использования предлагаемого подхода заключается в том, что основываясь на физически содержательных моделях можно провести корректный анализ чувствительности результата планирования к неопределенности исходных данных. На рис. 4.11 изображен оптимистический и пессимистический прогнозы по темпам падения в зависимости от планируемой проницаемости.

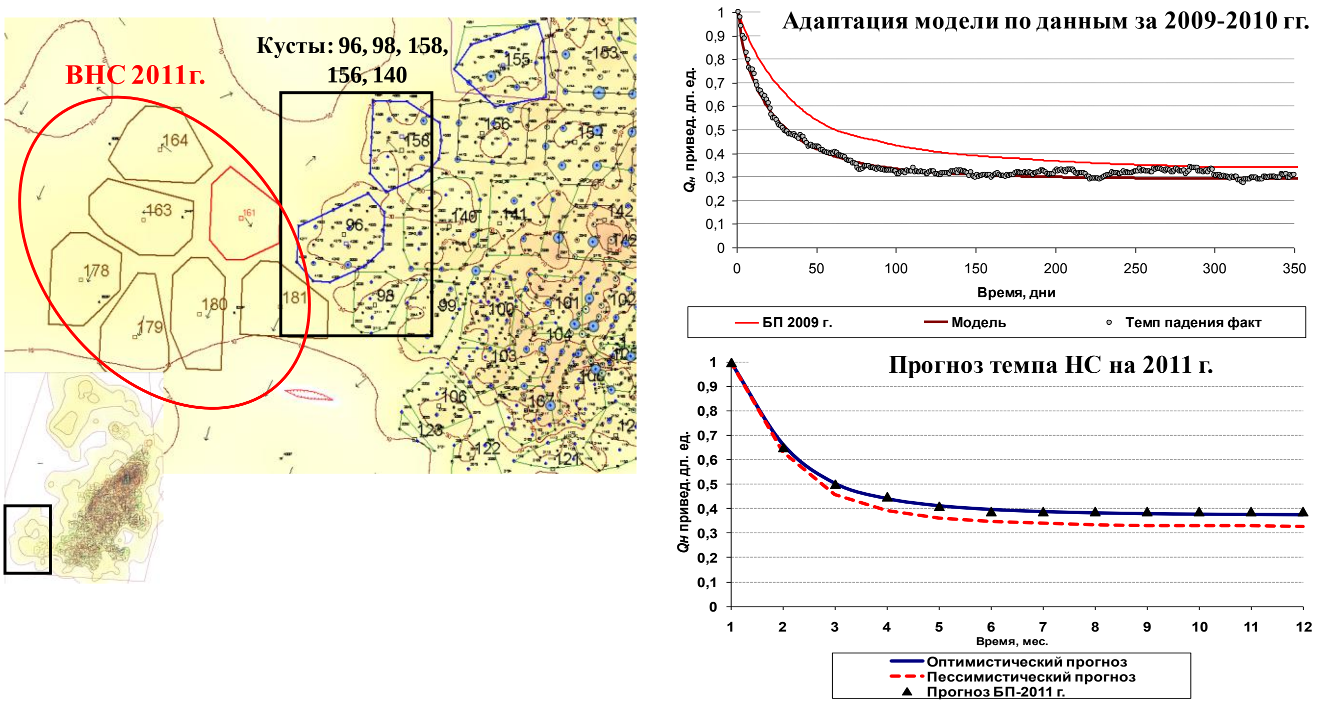


рис. 4.11. Планирование темпа падения жидкости

Рассмотрим другой пример, иллюстрирующий применение методики планирования темпов падения на одном из месторождений Западной Сибири. Данное месторождение разрабатывается продолжительное время, в настоящее время планируется бурение новых участков в краевых зонах продуктивного пласта. По результатам испытаний разведочных скважин, в новых зонах бурения прогнозируется снижение средней эффективной проницаемости. Так, средняя эффективная проницаемость района новых скважин 2011-2012гг. составляет $\overline{k} = 1,6\,мД$, скважин 2013г. – $\overline{k} = 1,2\,мД$, скважин 2014-2016гг. – $\overline{k} = 1\,мД$. На рис. 4.12.а для различных значений проницаемости представлен фактический темп снижения добычи жидкости новых скважин 2011г. и результаты адаптации с использованием модели описанной в гл.3 (п.2) пласта линзовидного строения. Таким образом, расчеты показывают, что ожидаются более резкие темпы падения жидкости, чем по факту работы новых скважин 2011-2012 года. С учетом ухудшения фильтрационно-емкостных свойств пласта, для поддержания планового уровня добычи на данном месторождении в ближайшие 5 лет необходимо пробурить дополнительно 36 новых скважин (см. рис. 4.12.б).

а. б.

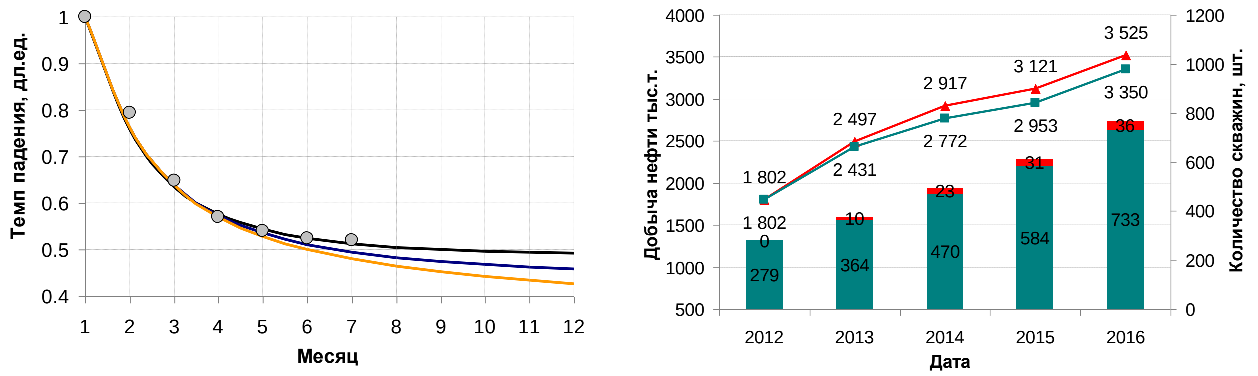


рис. 4.12. Пример расчета добычи от новых скважин в условиях ухудшения проницаемости:

a. Расчет темпа снижения добычи нефти от новых скважин;

- фактический темп снижения добычи жидкости скважин 2011г., $k = 1,6 мД$;

- темп снижения добычи жидкости, адаптация модели и новые скважины 2012г., $k = 1,6 мД$;

- расчетный темп снижения добычи жидкости новых скважин 2013г., $k = 1,2 мД$;

- расчетный темп снижения добычи жидкости новых скважин 2014-2016гг., $k = 1 мД$;

b. Расчет добычи нефти;

- расчет добычи с темпом по адаптации $k = 1,6 мД$;

- расчет добычи с учетом снижения проницаемости от $k = 1,6 мД$ в 2012г. до $k = 1 мД$ в 2014-2016гг.

- количество новых скважин;

- дополнительное количество новых скважин.

4.4. Использование разработанных алгоритмов для решения задач разработки месторождений Западной Сибири

В данном параграфе приведены примеры успешного использования предлагаемых в работе алгоритмов для решения задач разработки и планирования добычи нефти на месторождениях Западной Сибири.

4.4.1. Решение о целесообразности начала разработки малой залежи

Как сказано выше все крупные и уникальные месторождения в Западной Сибири уже разведаны и эксплуатируются. Для удержания добычи на заданном уровне необходимо вовлекать в разработку малые залежи. Разработка малых залежей сопряжена с большими рисками вследствие большой неопределенности в исходных данных. Для решения данной проблемы в предыдущих параграфах был развит многовариантный подход с количественным учетом геологических рисков при планировании добычи. Данный подход можно использовать при принятии решения о начале разработки участка малой залежи.

Приведем пример использования описанного подхода для решения озвученной задачи принятия решения о начале разработки залежи в Западной Сибири. Рассматриваемая залежь (см. рис. 4.13) характеризуется крайне низким охватом исследованиями. Средняя проницаемость, пусковая обводненность и даже физико-химические свойства нефти на рассматриваемой залежи имеют высокую неопределенность (см. рис. 4.13).

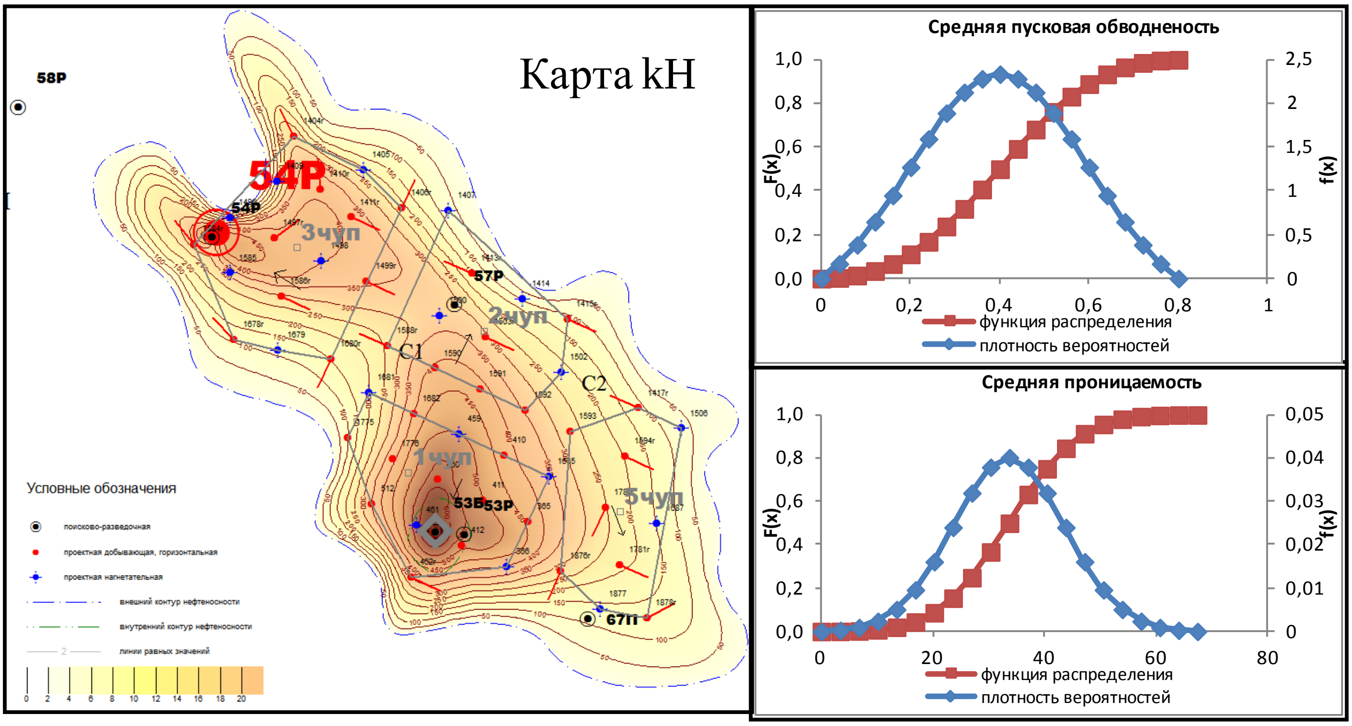


рис. 4.13. Залежь в Западной Сибири

После применения описанного выше многовариантного подхода было получено распределение чистого дисконтированного дохода (NPV) от разработки данной залежи (см. рис. 4.14). Видно, что в целом проект является экономически эффективным, так как распределение NPV лежит преимущественно в положительной области. Однако распределение добычи и NPV варьируется в широком диапазоне значений (1.6 – 5.7 млн. т. и 2.5 – 13.0 млд. руб за 15 лет), поэтому для рациональной разработки месторождения и планирования обустройства необходимы дополнительные исследования. Данные исследования были запланированы и произведены: была пробурена разведочная скважин (54Р), которая позже была испытана с ГРП. Сама залежь планируется к разработке в ближайшие три года (2015-2016 годы).

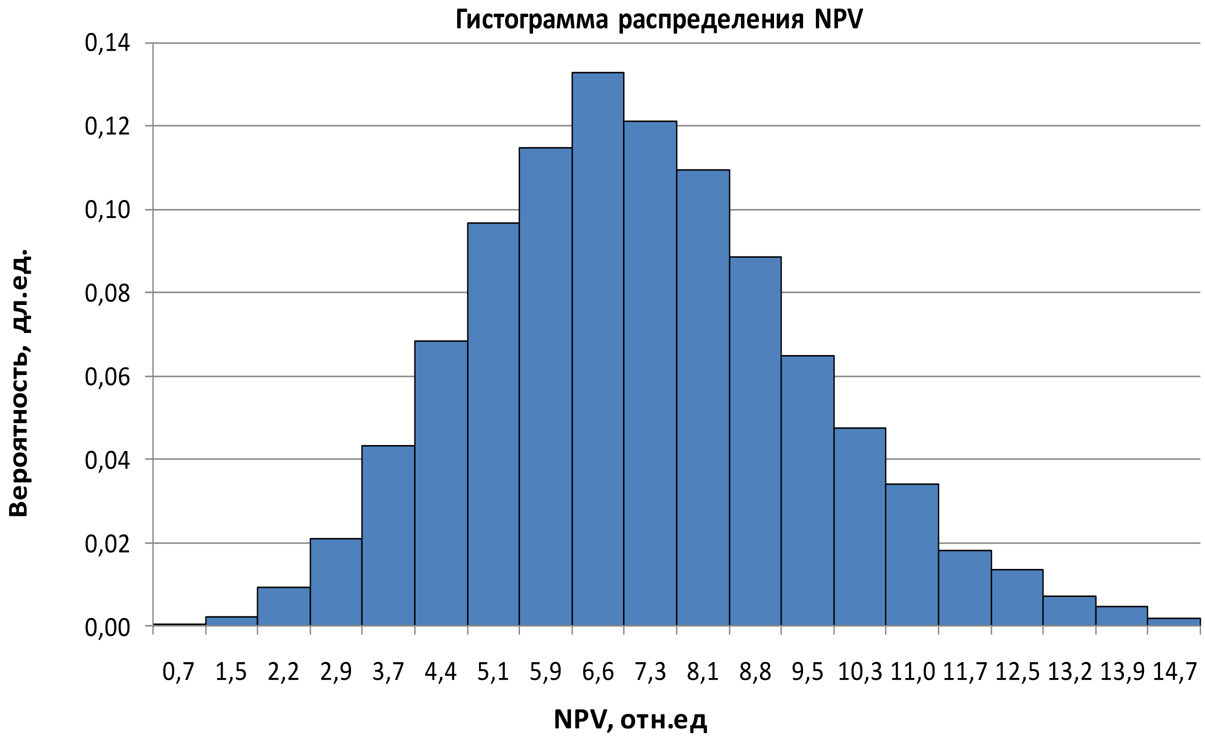


рис. 4.14. Гистограмма распределния NPV

4.4.2. Определение оптимальных параметров разработки

Рассмотрим пример применения предлагаемых в работе алгоритмов для определения оптимальной плотности сетки на одном из участков крупнейшего месторождения Западной Сибири. Рассматриваемый участок характеризуется огромными запасами нефти. Геология данного участка отличается от основной части месторождения. Разбуренная часть характеризуется шельфовыми и прибрежно-морскими отложениями, а, следовательно, обладает относительно высокими фильтрационно-емкостными свойствами. Рассматриваемый же участок характеризуется глубоководными морскими отложениями и обладает крайне низкими фильтрационно-емкостными свойствами и высокой неоднородностью коллектора. Таким образом, очевидно, что оптимальные параметры разработки, в том числе плотность сетки скважин, на рассматриваемом участке отличны от параметров в уже пробуренной части месторождения.

Для определения оптимальной плотности сетки скважин с помощью представленного выше подхода с учетом данных опробования и испытания разведочных скважин с ГРП были построены карты проницаемости, а также карты несвязности (с использованием месторождений и участков-аналогов). Оптимальная плотность сетки скважин определялась относительно экономических параметров (NPV). Возникла следующая оптимизационная задача: с одной стороны при уменьшении плотности сетки скважин увеличивается коэффициент извлечения нефти, добыча нефти производится за более короткий период, темпы падения жидкости уменьшаются. С другой стороны растут капитальные вложения. Все озвученные эффекты учтены в рамках моделей, построенных в гл.3. На основе данных моделей были проведены множественные расчеты добычи и экономической эффективности (см. рис. 4.15). Оптимальной оказалась плотность сетки скважин 15 га/скв. В результате расчетов было принято решение уменьшить плотность сетки скважин до 16 га/скв, по сравнению с плотностью сетки скважин на основной части месторождения в 25 га/скв. Проектный фонд участка с плотностью сетки в 16 га/скв составляет более 1500 скважин, из которых уже пробурено более 300.

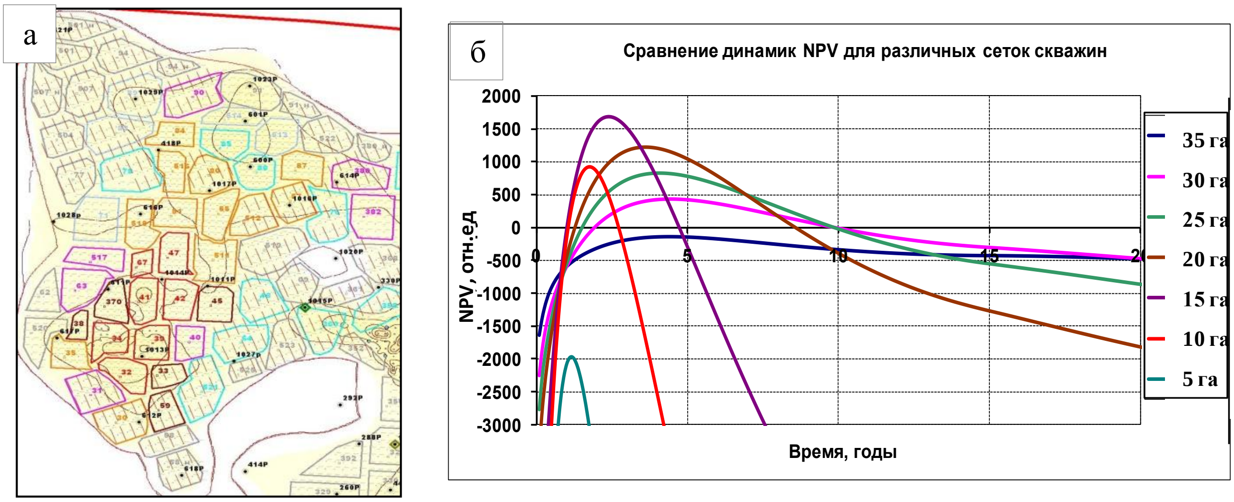


рис. 4.15. Исследуемый участок месторождения (а) и NPV для различной плотности сетки скважин (б)

4.4.3. Стратегия организации системы ППД

Рассматривается использование разработанных алгоритмов на примере определения стратегии организации системы поддержания пластового давления (ППД). На низкопроницаемых неоднородных коллекторах возникает ряд трудностей, связанных с организацией системы ППД. В некоторых случаях разработка без ППД оказывается экономически выгоднее. Это связано с тем, что, во-первых, система ППД может оказывать слабое влияние на добычу вследствие низкой проницаемости и высокой неоднородности коллектора, а во-вторых, работа скважины в нагнетании уменьшает суммарный текущий объем добычи.

Рассмотрим, описанный выше участок месторождения Западной Сибири. С использованием разработанных алгоритмов по данным опробований разведочных скважин с ГРП были построены карты проницаемости, которые показали, что проницаемость варьируется в диапазоне 0.4-0.6 мД. Анализ мирового опыта показал, что при проницаемости менее 0.1 мД эффективнее разрабатывать без ППД. С другой стороны при проницаемости более 1 мД разработка с ППД является эффективной, что доказывает не только мировой и отечественный опыт, но и факт разработки месторождений Западной Сибири. Диапазон проницаемостей 0.1-1.0 мД является зоной неопределенности в плане принятия решения о создании системы ППД.

Для принятия решения о принципиальной эффективности системы ППД были рассмотрены два варианта: разработка с ППД, когда все нагнетательные скважины переводятся в ППД без отработки на нефть и разработка без ППД. Также был проведен анализ чувствительности к неоднородности пласта и к экономическим показателям. На рис. 4.16 изображена разница в NPV между вариантами, озвученными выше: с организацией ППД и без организации ППД.

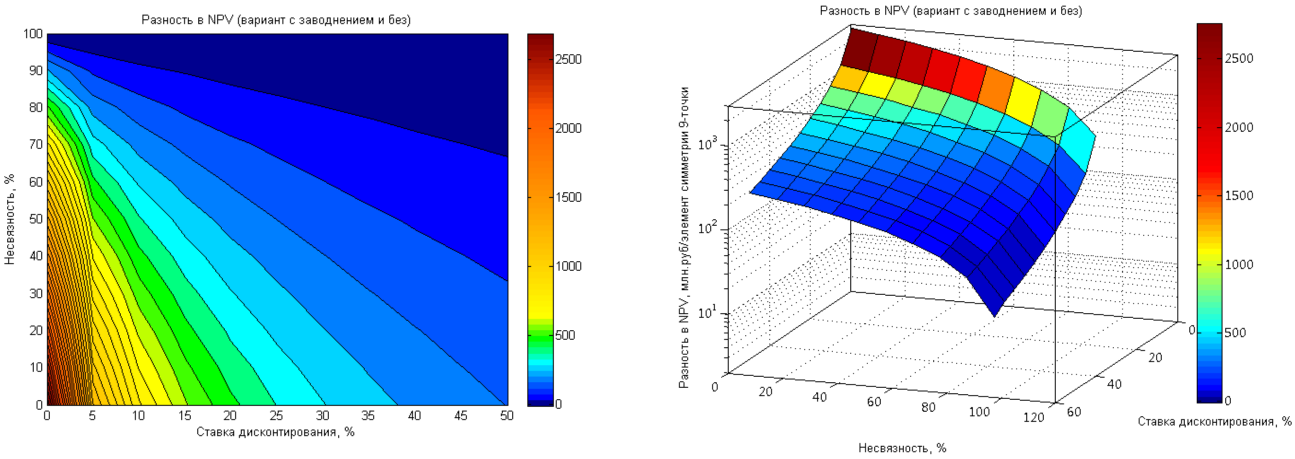


рис. 4.16. Гистограмма распределния NPV

Видно, что вариант без ППД для условий рассматриваемого месторождения выгоден только при высоких ставках дисконтирования (более 50%) и высоких гидродинамических несвязностях (более 85 %), что по данным анализа участков-аналогов не имеет место быть (несвязность оценивается на уровне 50 %). Также с учетом описанных алгоритмов были проведены оценки качества выработки запасов. На рис. 4.17 изображена зависимость КИН от величины интегральной несвязности для вариантов с ППД и без ППД. Видно, что КИН для варианта без ППД оказывается выше для значений несвязности более 95 %.

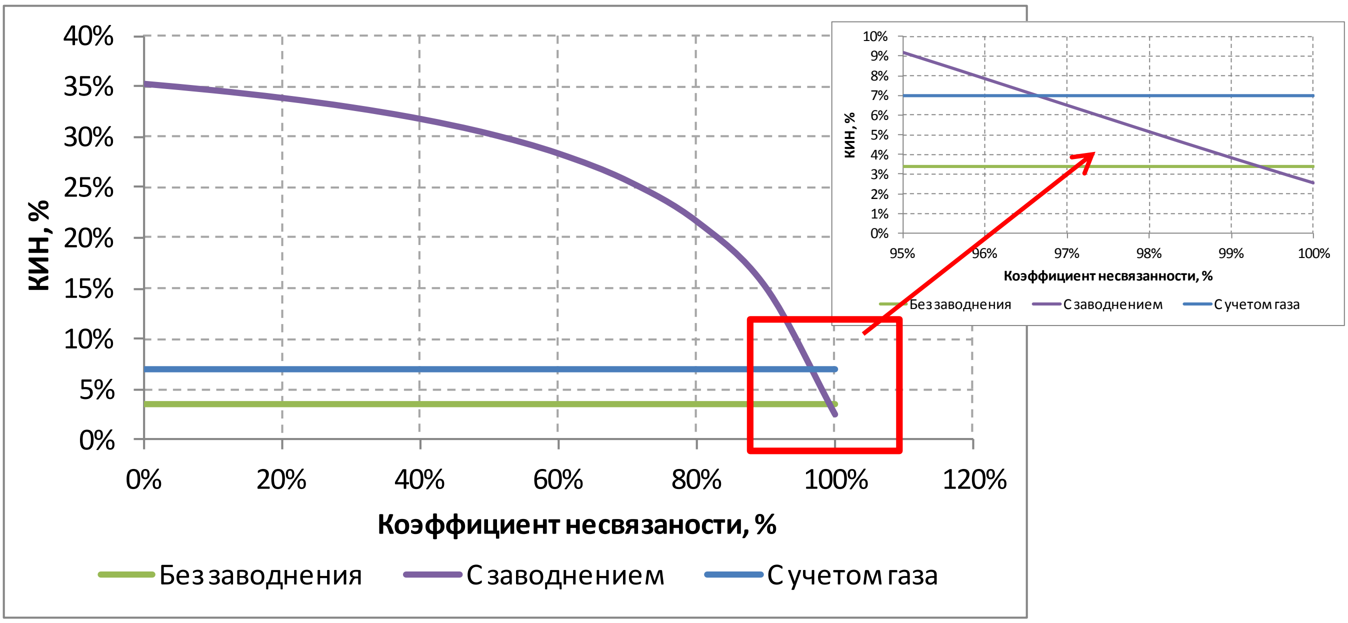


рис. 4.17. Гистограмма распределния NPV

В итоге проведенных расчетов было принято решение об организации системы поддержания пластового давления на рассматриваемом участке месторождения. В настоящий момент на скважинах наблюдается эффект от ППД, что соответствует расчетам и говорит о корректности принятых решений и разработанных алгоритмов.

4.4.4. Прогноз эффективных параметров добычи

В данном разделе показана предсказательная способность разработанных алгоритмов на примере планирования пусковых приростов и темпов падения. Рассматривается тот же участок месторождения Западной Сибири, который обсуждался ранее при планировании оптимальной плотности сетки скважин. После выбора плотности сетки скважин перед разработчиками стояла задачи планирования добычи с данного участка. Как было замечено выше для решения задачи планирования разработки данного участка с помощью разработанных в гл.3 алгоритмов были построены карты эффективных свойств пласта. На их основе с помощью моделей гл.2 были запланированы пусковые приросты и темпы падения жидкости. На рис. 4.18 проиллюстрированы соотношения плановых и фактических приростов нефти, а также плановый и фактический темпы падения.

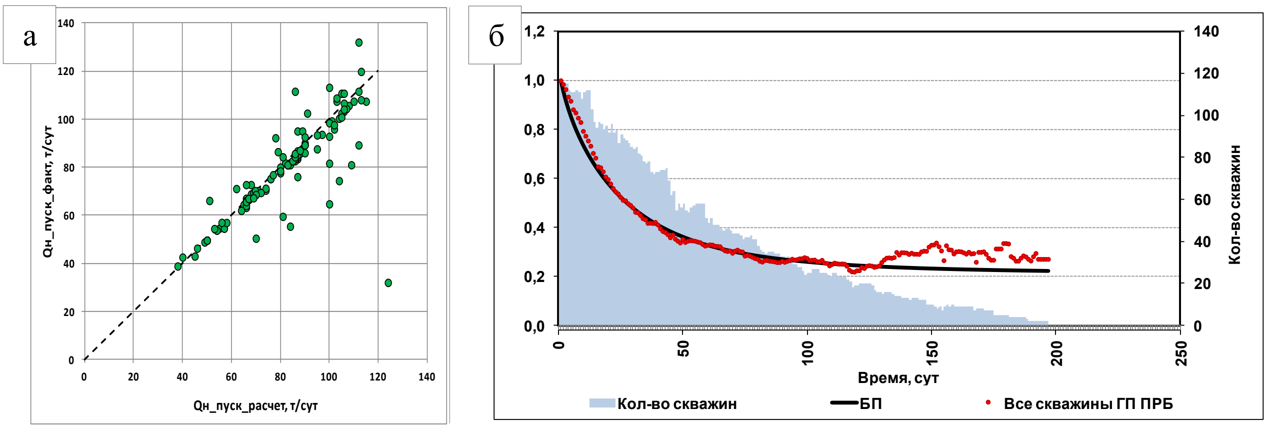


рис. 4.18. Плановые и фактические приросты новых скважин (а) и плановый и фактический темп падения жидкости новых скважин (б)

Дополнительной трудностью при планировании являлось то, что на рассматриваемом участке отсутствовал факт работы скважин, что дополнительно осложняло процесс планирования. Примечательно, что пусковые приросты и темпы падения на данной залежи были рассчитаны и заложены в бизнес-план до пуска первой скважины.

Основные результаты работы

1. Разработаны аналитические алгоритмы анализа производительности скважин в многопластовых многоскважинных системах на различных режимах работы.

2. Разработан метод регуляризации решения обратной задачи идентификации параметров неоднородного расчлененного пласта по данным нормальной эксплуатации скважин многоскважинной системы.

3. Использование метода планирования производительности скважин в неоднородном расчлененном пласте позволило повысить точность прогноза добычи с участка Горшковской площади Приобского месторождения на 30%.

4. Предложен метод определения эффективности системы поддержания пластового давления в неоднородном расчлененном пласте. На примере Приразломного месторождения показано, что применение разработанного метода позволяет повысить экономическую эффективность заводнения на 10-40 % для различных его участков.

5. Разработан подход к прогнозу добычных характеристик скважин в условиях высокой геологической неопределенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 416 стр.
2. Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. М.: Едиториал УРСС, 2004. — 304 с.
3. Асмандияров Р.Н., Кладов А.Е., Лубнин А.А., Юдин Е.В., Щербакова З.Г. Автоматизация анализа нефтепромысловых замеров // Нефтяное хозяйство. – 2011. – №6. – С. 58-61.
4. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1968 г., стр. 416.
5. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред: Учебник для втузов. — 2-е изд., испр. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 376 с: ил. (Прикладная механика сплошных сред: В 3 т. / Науч. ред. В.В. Селиванов; Т. 1).
6. Баренблатт Г.И.: Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Издание 2-е, переработанное и дополненное Ленинград Гидрометеоиздат 1982.
7. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972, 288 с.
8. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984, 211 с.
9. Басарыгин Ю.М., Будников В.Ф., Булатов А.И., Проселков Ю.М. Технологические основы освоения и глушения нефтяных и газовых скважин: Учеб. для вузов. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2001. – 543 с.
10. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика: Учебное пособие для вузов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 544 с.
11. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Учеб. Для вузов. – 10-е изд., испр. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 304 с.
12. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Днепропетровск: «Пороги», 2008 – 196 с.
13. Булыгин В.Я. Гидромеханика нефтяного пласта. –М.: Недра, 1973. – 232 с.
14. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.: Физико-математические основы фильтрации воды. «Мир», Москва, 1974г., 230 с.

15. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций, ч1. – Издательство иностранной литературы, 1949, Москва.
16. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – изд. 4-е. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 512 с.
17. Глечиков П.В. Анализ зависимости динамических показателей разработки месторождения от показателей пространственной корреляции коллектора. Магистерская диссертация. Московский Физико-Технический Университет, 2008.
18. Годунов С. К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976.– 432с.
19. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. –М.: Наука, 1973.–326с.
20. Дейк Л.П. Практический инжиниринг резервуаров. – Москва-Ижевск: ИКИ, РХД, 2008. – 668 с.
21. Дюбрюль О. Геостатистика в нефтяной геологии. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 256 с.
22. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М., Недра, 1975, 216 с.
23. Здольник С.Е., Латыпов А.Р., Гусаков В.Н., Телин А.Г., Хандрико А.Н., Аханкин О.Б. Технология глушения скважин с контролем поглощения в условиях интенсификации разработки терригенных коллекторов. – Нефтяное хозяйство, №11, 2007, с. 62 – 65.
24. Инструкции по оценке перспективных площадей при помощи пакета GeoX, Осло, Июнь 2010 г.
25. Кадет В., Дмитриев Н., Мамедов М. Комплексная лабораторная методика определения коллекторских свойств при фильтрации аномальных нефтей. SPE 138048.
26. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 128 с.
27. Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта: Недра-Бизнесцентр, 1999. - 212 с.
28. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с. (перевод со II англ. издания).
29. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы 1982, 160 с.
30. Кондауров В.И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 310 с.
31. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, часть 2. М.: Физматгиз, 1963, 728 стр.

32. Краснов В.А. Численно-аналитические методы моделирования фильтрации в неоднородных средах. Диссертация, УГАТУ, Уфа 2004 г.
33. Краснов В.А., Судеев И.В., Юдин Е.В., Лубнин А.А. Определение параметров продуктивного пласта с помощью анализа промысловых данных работы добывающих скважин. // Научно-технический Вестник ОАО "НК "Роснефть" – 2010. – №1 С. 30-34.
34. Краснов В.А., Юдин Е.В., Лубнин А.А. Модели работы скважины для решения задачи идентификации параметров пласта по данным эксплуатации. // Научно-технический Вестник ОАО "НК "Роснефть" – 2010. – №2 – С. 34-38.
35. Кузнецов М.А., Севастьянова К.К., Нехаев С.А. Стохастические методы оценки эффективности стратегии освоения месторождений арктического шельфа. // Нефтяное хозяйство. – 2011. – №6. – С. 2-6.
36. Кучеряев Б.В. — Механика сплошных сред. Теоретические основы обработки давлением композитных материалов.
37. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т VI. Гидродинамика. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. – 736 с.
38. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Государственное издание технико-теоретической литературы. 1947.
39. Лысенко В.Д. Инновационная разработка нефтяных месторождений, Издательство «Недра», Москва, 2000.
40. Лубнин А.А., Юдин Е.В., Асмандияров Р.Н. Планирование добычи с учетом ограничений инфраструктуры // Сборник статей V научно-практической конференции “Математическое моделирование и компьютерные технологии в процессах разработки месторождений”, М.: Нефтяное хозяйство, 2012. – С. 31.
41. Лубнин А.А., Юдин Е.В., Щутский Г.А. Инженерный подход к решению задач заводнения // Научно-технический вестник ОАО “НК “Роснефть”. – 2013. – №1. – С. 14-18.
42. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 640 стр.
43. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. Перев. с англ. М.-Л., Гостоптехиздат, 1953.
44. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — 492 с.
45. Мирзаджанзаде А.Х., Кузнецов О.Л., Басниев К.С, Алиев З.С. Основы технологии добычи газа. - М.: ОАО «Издательство «Недра», 2003. - 880 с.

46. Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 368 стр.
47. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики (в 2-х томах). — М.: ИЛ, 1958-1960. – 1816 с.
48. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. – М.: Недра, 1996. – 447 с.
49. Овнатанов С.Т., Карапетов К.А. Нефтеотдача при разработке нефтяных месторождений. Издательство “Недра”, Ленинград 1970.
50. Партон В. З. Механика разрушения: От теории к практике. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 240 с.— (Пробл. науки и техн. прогресса).
51. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения.— 2-е изд., пере-раб. и доп.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. - 504 с.
52. Половинкин Е.С.: Курс лекций по теории функций комплексного переменного. – М.: Физматкнига, 2003. – М., Издательство МФТИ, 2003. – 208с.
53. Пономарев С.В., Мищенко С.В., Дивин А.Г.: Теоретические и практические аспекты теплофизических измерений. Монография. В 2 кн. Тамбов: Изд-во Тамбовского государственного технического университета, 2006. Кн. 1. 204 с.
54. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. Изд. 2-е, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977, 664 стр.
55. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.
56. Рытов С.М., Кравцов Ю.А, Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2, Случайные поля. Издание второе, переработанное и дополненное.
57. Самарский А.А.: Введение в численные методы. – М.:Наука., 1982. – 269с.
58. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1976. – 335 с.
59. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл.ред. физ-мат. лит., 1989. – 432с.
60. Седов Л.И. Механика сплошной среды. т.I. – 4-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 528 с.
61. Селиванов В.В. Механика разрушения деформируемого тела: Учебник для втузов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. - 420 с. (Прикладная механика сплошных сред; Т. 2).
62. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. М., «Наука», 1968, «Популярные лекции по математике», вып. 46.

63. Судеев И.В. Тимонов А.В., Гук В.Ю., Асмандияров Р.Н. Факторный анализ измене-ния добычи новых скважин с использованием метода нестационарного узлового анализа // Нефтяное хозяйство. – 2008. – №11. – С. 58-61.
64. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов. - 3-е изд., исправл. - М.: Физматлит, 2001. - 672 с.
65. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. Изд. 2-е.
66. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. 6-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГУ, 1999, 799 стр.
67. Уолкотт Д. Разработка и управление месторождениями при заводнении. Издание второе, дополненное. Пер. с английского. – М: ЮКОС - Schlumberger, 2001. – 144 с.
68. Уолш М., Лейк Л. Первичные методы разработки месторождений углеводородов. – М. – Ижевск: ИКИ, 2008. – 652 с.
69. Уроев В.М. Уравнения математической физики. – ИФ «Яуза», 1998. – 373 с.
70. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 стр.
71. Чарный И.А. Подземная гидромеханика. –М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
72. Чекалюк Э.Б.: Об эффективном радиусе влияния скважины – Нефтяное хозяйство 1950
73. Фазлыев Р.Т.: Площадное заводнение нефтяных месторождений. М., Недра, 1979. 254 с.
74. Хасанов М.М., Мукминов И.Р., Бачин С.И. К расчету притока жидкости к скважинам, работающим в условиях локального разгазирования.
75. Хасанов М.М., Краснов В.А., Коротовских В.А., Определение оптимального перио-да отработки нагнетательной скважины на нефть, Научно-технический Вестник ОАО "НК "Роснефть". - 2007. - № 5. - С. 19-22.
76. Хасанов М.М., Краснов В.А., Мусабиров Т.Р. Решение задачи о взаимодействии пла-ста со скважиной в условиях нестационарного притока. Научно-технический Вестник ОАО "НК "Роснефть" – 2007. – №2. – С. 41-46.
77. Хасанов М.М., Краснов В.А., Мусабиров Т.Р., Юдин Е.В. О пластовом давлении и производительности скважин в системе разработки // SPE 135820 – 2010.
78. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. ГОСТОПТЕХИЗДАТ 1969.
79. Швидлер М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред.— М.: Недра, 1985. 288 с.
80. Щелкачев В.Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации – Монография: В 2 ч. – М.: Нефть и газ, 1995
81. Щелкачев В.Н. Расстановка скважин в пластах с водонапорным ре-жимом. // В кн.: Сб. научно-иссл. работ нефтяников, вып. III, –М.: Гостоптех-издат, 1944.

82. Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. Подземная гидравлика. –М.–Л.: Гостоптехиздат, 1949.
83. Эрлагер Р. мл.: Гидродинамические исследования скважин. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 512 с.
84. Эфрос Д.А. Исследование фильтрации неоднородных систем. М. Гостоптехиздат, 1963.
85. Юдин Е.В., Лубнин А.А., Краснов В.А, Мусабиров Т.Р., Хасанов М.М. Дифференциальный подход к определению продуктивных характеристик расчлененного пласта // SPE 161969. – 2012.
86. Юдин Е.В. Математическая модель работы многопластовой скважины и ее использование для анализа данных глушения. Магистерская диссертация. Московский Физико-Технический Институт, 2009 г.
87. Юдин Е.В., Лубнин А.А. Моделирование технологических операций на многопластовых скважинах // SPE 149924 – 2011.
88. Юдин Е.В., Лубнин А.А. Применение модели работы скважины в неоднородном пласте для задач разработки и планирования // Научно-технический вестник ОАО “НК “Роснефть”. – 2010. – №3. – С. 10-13.
89. Юдин Е.В., Лубнин А.А., Рощектаев А.П. Оценка коэффициента охвата сеткой с использованием данных эксплуатации скважин // Территория нефтегаз. – 2011. – №4. – С. 40-45.
90. Юдин Е.В., Лубнин А.А., Тимонов А.В., Малахов Р.А., Краснов В.А. Методика планирования добычи в условиях геологической неопределенности // Нефтяное хозяйство. – 2012. – №8. – С. 118-121.
91. Юдин Е.В., Лубнин А.А., Тимонов А.В., Юлмухаметов Д.Р., Судеев И.В. Подход к планированию добычных характеристик новых скважин в низкопроницаемом пласте // Нефтяное хозяйство. – 2012. – №11. – С. 25-29.
92. Albertoni A., Lake L. Inferring Interwell Connectivity Only From Well-Rate Fluctuations in Waterfloods, SPE 83381.
93. Almeida A.R., Cotta R.M. Analytical Solution of the Tracer Equation for the Homogeneous Five-Spot Problem. SPE 29218.
94. Ambrose W., Tyler N., Parsley M. Facies Heterogeneity, Pay Continuity, and Infill Potential in Barrier-Island, Fluvial, and Submarine-Fan Reservoirs: Examples from the Texas Gulf Coast and Midland Basin.
95. Aziz K., Settari A. Petroleum Reservoir Simulation. –New York.: Elsevier Applied Science Publishers, 1979. –362p.
96. Batyky R.P., Blunt M. J., Thiele M. R. A 3D Field Scale Streamline Based Reservoir Simulator. // SPE Reservoir Engineering, November 1997, pp. 246 – 254.

97. Blasingame T.A., Poe Jr. B.D. Semianalytic Solutions for a Well with a Single Finite-Conductivity Vertical Fracture, SPE 26424
98. Brigham W.E., Abbaszadeh-Dehghani M., Tracer Testing for Reservoir Description. Journal of Petroleum Technology May 1987.
99. Brigham W.E., Smith D.H. Prediction of Tracer Behavior in Five-Spot Flow. SPE 1130.
100. Brill J.P. and Mukherjee H.: Multiphase Flow in Wells. – SPE Monograph, 1999. – 156 p.
101. Brown K.E., James F.L.: Nodal Systems Analysis of Oil and Gas Wells. – J. Pet. Tech. (October 1985), 14714.
102. Brown M., Ozkan E., Raghavan R., Kazemi H. Practical Solutions for Pressure Transient Responses of Fractured Horizontal Wells in Unconventional Reservoirs, SPE 125043
103. Brown K. The Technology of Artificial Lift Methods. Volume 4. PennWell Books, Oklahoma. 1984.
104. Buckley S.E. and Leverett M.S. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. // Journ. Petr. Technology, 1941, T. P. 1337.
105. Carle S.F. and Fogg G.E. Transition Probability-Based Indicator Geostatistics – Mathematical Ge-ology, Vol. 28. No. 4, 1996.
106. Cheng H., Osako I., Datta-Gupta A., King M. A Rigorous Compressible Streamline Formulation for Two- and Three-Phase Black-Oil Simulation, SPE 96866.
107. Cheng H., Oyerinde D., Datta-Gupta A., Milliken W., Compressible Streamlines and Three-Phase History Matching, SPE 99465.
108. Cinco-Ley H., Meng H.-Z. Pressure Transient Analysis of Wells with Finite Conductivity Vertical Fractures in Double Porosity Reservoirs, SPE 18172
109. Coats K.H., Dempsey J.R., Henderson J.H. The Use of Vertical Equilibrium in Two-Dimensional Simulation of Three-Dimensional Reservoir Performance. // SPE Journal. – 1971. – V.11, №1. – P.63–71.
110. Coats K.H., Nielsen R.L., Terhune M.H., Weber A.G. Simulation of Three-dimensional Two-phase Flow in Oil and Gas Reservoirs. // SPE Journal. – 1967. – V.7, №4. –P.377–388.
111. Cockin A.P., Malcolm L.T., McGuire P.L., Giordano R.M., Sitz C.D. Analysis of a Single-Well Chemical Tracer Test to Measure the Residual Oil Saturation to a Hydrocarbon Miscible Gas Flood at Prudhoe Bay. SPE 68051.
112. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Ed. Victor Dal-mont. – Paris: 1856.
113. Demiryurek U., Banaei-Kashani F., Shahabi C. Neural-Network Based Sensitivity Analysis for In-jector-Producer Relationship Identification, SPE 112124.
114. Deppe J. C., Injection Rates – The Effect of Mobility Ratio, Area Swept, and Pattern, SPE 1472-G

115. Dykstra H., Parsons R.L. The Prediction of Oil Recovery by Waterflooding. Secondary Recovery of Oil in the United States, 1948 API Spring Meeting, Los Angeles, May.
116. El-Khatib N. Waterflooding Performance of Communicating Stratified Reservoirs With Log-Normal Permeability Distribution. // SPE 59071. – 1999.
117. Earlougher R. C. Jr.: Advances in Well Test Analysis. – SPE Monograph, 2003 (Эрлагер Р. Гидродинамические исследования скважин. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 512 с.).
118. Ghori S.G., Heller J.P. The Use of Well-to-Well Tracer Tests to Determine Geostatistical Parameters of Permeability. SPE 24138.
119. Hansen C.E. A General Pattern Flow Theory for Maximizing Waterflooding Rates. MS thesis, Colorado School of Mines, Golden, Colorado (May 2001).
120. Hansen C.E., Fanchi J.R.: Producer/Injector Ratio: The Key to Understanding Pattern Flow Performance and Optimizing Waterflooding, SPE 86574
121. Haseby O., Valestrand R., Sagen J. Natural and Conventional Tracers for Improving Reservoirs Models Using EnKF Approach. SPE 121190.
122. Heffer K., Fox R., McGill C., Koutsabeloulis N. Novel Techniques Show Links between Reservoir Flow Directionality, Earth Stress, Fault Structure and Geomechanical Changes in Mature Waterfloods, SPE 30711.
123. Hovanessian S.A. Pressure Studies in Bounded Reservoirs. SPEJ Dececmber 1961, 223-28.
124. Jensen J.L, Corbett P.W.M, Lake L.W., Gaggin D.J. Statistics For Petroleum Engineers and Geoscientists. Elsevier, 2000. – 202 p.
125. Joshi S.D. Augmentation of Well Productivity With Slant and Horizontal Wells, SPE 15375
126. Kaviani D. Interwell Connectivity Evaluation from Wellrate Fluctuations: a Waterflooding Management Tool. PhD thesis, Texas A&M University (December 2009).
127. Kaviani D., Jensen J., Lake L., Fahes M. Estimation of Interwell Connectivity in Case of Fluctuat-ing Bottomhole Pressures, SPE 117856.
128. Khasanov M., Krasnov V., Guk V. Reservoir Parameters Evaluation Based on Production Data Analysis. Paper SPE 117406.
129. Kermit E. Brown: The Technology of Artificial Lift Methods. – PennWellBooks, 1984. – 448 p.
130. Khasanov M., Khabibullin R., Krasnov V., Interactive Visualisation of Uncertainty in Well Test Interpretation // SPE - 88557
131. Krasnov V., Toropov K., Roschektayev A., Yakasov A. Express Method of Oil Recovery Ratio Estimation on the Basis of Oil Reservoir Statistical Characteristics // SPE – 136139.
132. Leverett M.C. Capillary Behavior in Porous Solids. // Trans. AIME, 1941. vol. 142, pp. 152–169.

133. Liang X., Weber D., Edgar T., Lake L., Sayarpour M., Yuosef A. Optitmization of Oil Production Based on a Capacitance Model and Injection Rates, SPE 107713.
134. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo Method, — J. Amer. statistical assoc. 1949 44 № 247 335—341.
135. Muskat M.A. Note on a Problem in Potential Theory. // Journ. Apl. Physics, vol. 8, No. 6, 1937.
136. Numbere D.T., Erkal A. A model for Tracer Flow in Heterogeneous Porous Media. SPE 39705.
137. Ozkan E. Performance of Horizontal Wells. PhD thesis, The University of Tulsa (1988).
138. Ozkan E., Raghavan R, Joshi D. Horizontal-Well Pressure Analysis, SPE 16378
139. Panda M.N., Chopra A.K. An Integrated Approach to Estimate Well Interactions, SPE 39563.
140. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressure in numerical reservoir simulation. // SPE Journal, vol.18, №3, 1978, pp. 183–194.
141. Peaceman D.W. Interpretation of well–block pressure in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability. // SPE Journal, vol.23 №3, 1978, pp. 531–543.
142. Prats M., Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior – Incompressible Fluid Case, SPE 1575-G
143. Rapoport L.A. and Leas W.J. Properties of Linear Waterfloods. // Trans AIME, 1953, vol. 198, pp. 139 –148.
144. Sayarpour M., Zuluaga E. Kabir C., Lake L. The Use of Capacitance-Resistive Models for Rapid Estimation of Waterflood Performance and Optimisation, SPE 110081.
145. Schindler, M.H.: Dynamic Nodal Analysis in Well Testing Interpretation, SPE 107239.
146. Stehfest, H.: Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms, Comm. ACM 13 (1), 1970.
147. Stiles L. H. Optimizing Waterflood Recovery in a Mature Waterflood, The Fullerton Clearfork Unit. SPE 6198.
148. Tang J.S. Extended Brigham Model for Residual oil Saturation Measurement by Partitioning Tracer Tests. SPE 84874.
149. Valko P.P., Doublet L.E., Blasingame T.A. Development and Application of the Multiwell Productivity Index (MPI). SPE 51793, 2000.
150. Van Everdingen A.F., Hurst W. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs. Petroleum Transactions, AIME (December 1949), p.p. 305-324.
151. Vogel J.V.: Inflow Performance Relationships for Solution-Gas Drive Wells, J. Pet. Tech. (January 1968), p. 83-93.
152. Weber D. The Use of Capacitance-Resistance Models to Optimize Injection Allocation and Well Location in Water Floods. PhD thesis, University of Texas at Austin (August 2009).

153. Welge H.J. A Simplified Method for Computing Oil Recovery by Gas or Water Drive. // Trans. AIME, 1952, vol. 195, pp. 91—98.
154. Willhite Paul G.: Waterflooding, SPE Textbook series vol.3.
155. Wycoff R.D., Botset H. G. The Flow of Gas-Liquid Mixtures through Unconsolidated Sands. // Physics, vol. 7, No 9, 1936.
156. Yi T, Daltaban T.S., Archer J.S. Analysis of Interwell Tracer Flow Behavior in Transient Two-phase Heterogeneous Reservoirs Using Mixed Finite Element Methods and the Random Walk Approach. SPE 28901.
157. Yousef A., Gentil P., Jensen J., Lake L. A Capacitance Model to Infer Interwell Connectivity from Production – and Injection –Rate Fluctuations, SPE 95322.
158. Yousef A. Investigating Statistical Techniques to Infer Interwell Connectivity from Production and Injection Rate Fluctuations. PhD thesis, University of Texas at Austin (May 2006).
159. Yousef A., Lake L., Jensen J. Analysis and Interpretation of Interwell Connectivity from Production and Injection Rate Fluctuations Using a Capacitance Model, SPE 99998.
160. Yudin E., Lubnin A. Simulation of Multilayer Wells Operating. SPE paper 149924.